UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s2journaldemathm02pari

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
ÉLÉMENTAIRES

A L'USAGE

DE TOUS LES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT
ET DES ASPIRANTS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION

DE MM.

J. BOURGET
Recteur de l'Académie de Clermont.

DE LONGCHAMPS
Professeur de Mathématiques spéciales
au Lycée Charlemagne.

VAZEILLE
Directeur des études
à l'École préparatoire de Sainte-Barbe

2e SÉRIE

TOME DEUXIÈME

Année 1883.

PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15

1883

QA
1
J6836
Sér. 2
t. 2

COMITÉ DE RÉDACTION

MM. BOURGET
DE LONGCHAMPS
VAZEILLE
MOREL
BOQUEL
COCHER

20501
6

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES

LA GÉOMÉTRIE RÉCURRENTE

Par M. **G. de Longchamps.**

1. — La plus grande partie des idées et des propriétés que nous allons développer dans cette note ne sont pas nouvelles. Nous avons eu occasion de les exposer déjà (*); mais le principe de ce que nous avons nommé la *Géométrie récurrente* est une idée simple, et tout à fait élémentaire : nous croyons qu'elle pourra intéresser les lecteurs de ce journal.

2. — Imaginons dans un plan trois droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$; soit P un point remarquable et bien défini de ce triangle : par exemple le centre de gravité, le centre des hauteurs, le centre du cercle circonscrit, etc., pour préciser cette définition. Pour marquer que P est un point bien déterminé du triangle $\Delta_1\Delta_2\Delta_3$, nous conviendrons de le désigner par P_{123}.

Prenons maintenant quatre droites Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 ; si l'on fait abstraction de l'une d'elles, de Δ_4 pour exemple, il reste un triangle $\Delta_1\ \Delta_2\ \Delta_3$ auquel correspond le point P_{123} précédemment défini, point sur lequel on se propose de faire une étude de Géométrie récurrente. Ayant ainsi fait successivement abstraction de l'une des quatre droites données, on obtiendra quatre points P,

$$P_{123},\ P_{234},\ P_{341},\ P_{412}.$$

(*) *Revue des Sociétés savantes*, mai 1864. — *Annales scientifiques de l'Ecole normale*, t. III, 1867. — *Nouvelle Correspondance mathématique*, 1877.

Ces quatre points jouissent, soit par leurs positions respectives les uns par rapport aux autres, soit par leur situation vis-à-vis des droites données, de propriétés géométriques qui, dans certains cas, peuvent être remarquables : nous en donnerons tout à l'heure des exemples divers. De cette étude géométrique peut résulter la découverte d'un point que nous désignerons par P_{1234}, et qui jouit, par rapport aux droites Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 ou par rapport aux points P_{123}, P_{234}, P_{341}, P_{412}, de propriétés géométriques remarquables et qui rappellent celles qui liaient le point P_{123} au triangle $\Delta_1\,\Delta_2\,\Delta_3$.

Nous conviendrons de dire que le point P_{123} défini par le triangle est *un point* P *d'ordre 3 ;* et que le point analogue P_{1234} qui correspond à quatre droites, est *un point* P *d'ordre 4.*

Prenons maintenant cinq droites et faisons successivement abstraction de l'une d'elles, de Δ_5 par exemple. Nous aurons à considérer un quadrilatère complet formé par les quatre autres droites, et à ce quadrilatère correspond un point P d'ordre 4, point que nous désignons par P_{1234}. On obtient ainsi cinq points d'ordre 4,

$$P_{1234},\ P_{2345},\ P_{3451},\ P_{4512},\ P_{5123}.$$

Si l'on peut avec ces cinq points construire un point P qui s'en déduise comme on a déduit le point P d'ordre 4 des points P d'ordre 3, nous dirons que ce point est *un point* P *d'ordre 5*, et nous le désignerons par P_{12345}.

3. — On voit maintenant, d'après ces explications, comment on peut former un théorème de Géométrie récurrente.

Prenons pour point de départ un théorème de Géométrie élémentaire, relatif au triangle : par exemple, et comme nous le ferons tout à l'heure, celui qui fait remarquer que *les perpendiculaires élevées au milieu des côtés d'un triangle se coupent au même point* O, *centre du cercle circonscrit à ce triangle.*

Pour faire l'étude récurrente de ce théorème on procédera comme nous allons l'expliquer. On prendra dans un plan quatre droites, deux à deux concourantes ; à ces droites correspondent quatre points O ; on étudiera la position respective de ces points O d'ordre 3, et l'on trouvera qu'ils sont

placés sur une même circonférence. Nous dirons que le centre de cette circonférence est le point O d'ordre 4.

Prenons maintenant 5 droites ; nous aurons 5 points O d'ordre 4 et nous ferons voir qu'ils sont placés sur une circonférence. Nous dirons que le centre de cette circonférence est le point O d'ordre 5.

Pour généraliser la proposition on admettra que les propriétés trouvées appartiennent aux points O d'ordre $(n - 1)$, et l'on fera voir qu'elles subsistent pour le point O d'ordre n.

Telles sont les idées générales qui servent de base à cette Géométrie récurrente ; les applications que nous allons exposer feront mieux ressortir, pensons-nous, l'intérêt qui s'attache à cette idée élémentaire.

PREMIÈRE APPLICATION

4. — *Étude d'une série de cercles se déduisant, par voie récurrente, du cercle circonscrit au triangle.*

On sait que *si l'on considère un quadrilatère complet défini par quatre droites, les circonférences circonscrites aux triangles formés par ces droites combinées trois à trois se coupent au même point.*

Ceci posé, nous énoncerons d'abord le théorème suivant :

Théorème I. — *Soient quatre droites* 1, 2, 3, 4 *situées dans un plan : considérons les cercles circonscrits aux triangles formés par les droites combinées trois à trois ; les centres* O_{123}, O_{134}, O_{124} *déterminent un triangle semblable à celui qui est formé par les droites* 2, 3, 4.

Nous désignerons, dans ce qui va suivre, les n droites dont il sera question par les nombres

$$1, 2, 3, \ldots n;$$

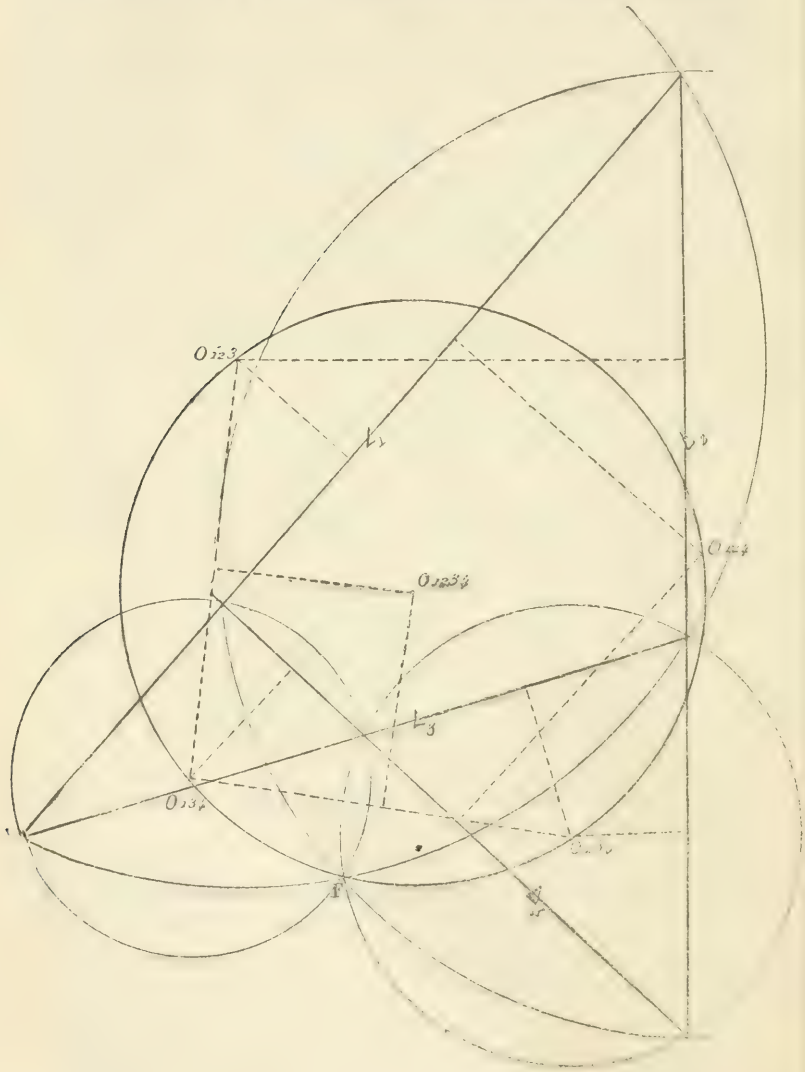
(α, β) désignera le point de concours des droites numérotées α, β, et nous supposerons formellement que ce point n'est pas rejeté à l'infini. La notation $\widehat{\alpha, \beta}$ indiquera l'un des angles que fait la droite α avec β et quand nous écrirons l'égalité

$$\widehat{\alpha, \beta} = \widehat{\alpha', \beta'}$$

nous voudrons exprimer par cette écriture que les droites α

et β forment un système qui est superposable à celui des droites α', β'.

Cette notation admise, revenons au théorème énoncé.



Appelons F le point commun aux quatre circonférences circonscrites aux triangles 123, 124, 134, 234. Les droites $O_{123}\,O_{124}$, et $O_{124}\,O_{134}$ sont respectivement perpendiculaires aux droites F (1, 2); F (1, 4). Les angles

$$O_{123}O_{124}O_{134} \text{ et } (1,2)\ F\ (1,\ 4)$$

sont donc égaux. Le quadrilatère déterminé par les sommets du triangle 124 et le point F étant inscriptible on a

$$O_{123}O_{124}O_{134} = \widehat{2.4}.$$

Ainsi, si l'on considère trois cercles circonscrits et leurs centres O_α, O_β, O_γ; *l'angle* $O_\alpha\ O_\beta\ O_\gamma$ *est égal à l'angle des deux droites dont les numéros s'obtiennent en retranchant aux indices extrêmes* α, γ *les numéros qui leur sont communs.*

Cette propriété qui sert de base aux propriétés suivantes montre aussi l'utilité, contestable au premier abord, de la notation à indices que nous avons adoptée. Sans cette notation il serait difficile d'indiquer nettement et sans ambiguïté quels sont, dans les figures que nous étudions, les couples de lignes qui sont superposables.

En appliquant successivement la remarque précédente aux trois angles du triangle $O_{123}\ O_{124}\ O_{134}$, on reconnaît que ce triangle a des angles égaux ou supplémentaires avec ceux du triangle 234, triangle obtenu en supprimant le numéro commun aux trois indices. Mais on sait que deux triangles qui ont les angles *égaux ou supplémentaires* ont nécessairement leurs angles égaux deux à deux et, par suite, sont semblables. C'est la propriété énoncée.

5. — Théorème II. — *Les centres des cercles circonscrits aux quatre triangles formés par quatre droites, combinées trois à trois, appartiennent à un même cercle.*

En effet, si l'on considère le quadrilatère

$$O_{123}\ O_{134}\ O_{124}\ O_{234},$$

on a, d'après le théorème précédent,

$$O_{123}\ O_{124}\ O_{134} = \widehat{2.4} \qquad (1)$$

et aussi

$$O_{123}\ O_{234}\ O_{134} = \widehat{2.4} \qquad (2)$$

puisqu'il faut faire abstraction du numéro commun aux trois indices, ici 3, et prendre dans l'indice moyen les deux autres numéros.

La comparaison des égalités (1) et (2) prouve bien que le quadrilatère considéré est inscriptible. Nous désignons par O_{1234} le centre du cercle circonscrit à ce quadrilatère et nous dirons *qu'il est d'ordre 4*.

6. — Considérons maintenant le pentagone complet formé par cinq droites 1, 2, 3, 4, 5 situées dans le même plan et deux à deux concourantes. Aux deux quadrilatères 1234, 1235 correspondent deux cercles d'ordre 4, lesquels ont un point commun O_{123}. Soit G le second point commun, on aura donc $O_{134}\ G\ O_{123} = O_{134}\ O_{234}\ O_{123}$.

Mais on a vu que $O_{134}\ O_{234}\ O_{123} = \widehat{2.4}$;

donc $$O_{134}\ G\ O_{123} = \widehat{2.4}. \qquad (1)$$

On voit que le second membre $\widehat{2,4}$ de cette égalité s'obtient en faisant abstraction des numéros communs aux deux indices 134, 123 de la lettre O dans le premier membre.

D'après cette remarque on peut écrire aussi

$$O_{123}\ G\ O_{135} = \widehat{2.5}. \qquad (2)$$

Des égalités (1) et (2) on déduit, en remarquant que les deux angles ont un côté commun $G\ O_{123}$,

$$O_{134}\ G\ O_{135} = \widehat{2.4} \pm \widehat{2.5} = \widehat{4.5}.$$

De cette égalité, après avoir répondu, comme nous le ferons tout à l'heure, à une difficulté et à une objection qu'elle soulève, on déduit la propriété suivante :

Soit G *le point de concours (autre que* O_{123}*) des deux circonférences d'ordre 4,* O_{1234} *et* O_{1235} ; *soient* O_α *et* O_β *deux points d'ordre 3 pris sur ces circonférences et tels que les indices* α *et* β *aient deux numéros communs : l'angle* $O_\alpha\ G\ O_\beta$ *est égal à celui des deux droites dont les numéros s'obtiennent en retranchant aux indices les numéros communs.*

7. — Mais avant d'aller plus loin nous devons nous expliquer sur la difficulté que nous venons de signaler, et qui se rencontre plus ou moins dans toutes les questions de Géométrie récurrente.

Dans la Géométrie élémentaire, la figure aide puissamment au raisonnement, et les constructions donnent aux éléments de la figure des positions respectives qui, pour ainsi dire,

s'imposent et permettent d'affirmer que tel angle A est bien égal à un angle B et non au supplément de celui-ci ou, dans d'autres cas, que tel angle A est bien égal à la *somme* des angles inférieurs B et C d'un triangle et non à leur différence.

Dans la Géométrie récurrente la figure ne peut plus, à un certain moment, être tracée, puisque, comme nous le verrons tout à l'heure, il faut poursuivre le raisonnement jusqu'à la considération de n droites. Il faut donc montrer ici, non par une figure dont le dessin est contestable ou impossible, mais par un raisonnement, que l'on a bien toujours, et dans tous les cas

$$\widehat{4.5} = O_{134}\,G\,O_{135}.$$

Considérons à cet effet le triangle 2 4 5 et soient α, β, γ les angles *intérieurs* de ce triangle.

Nous avons dit que l'angle $O_{123}GO_{134}$ était égal à l'angle α, ou à $(\pi - \alpha)$; de même $O_{123}GO_{135}$ est égal à β ou à $(\pi - \beta)$. Supposons pour fixer les idées que ces angles soient α et β : si les points $O_{134}O_{123}O_{135}$ et G sont disposés comme

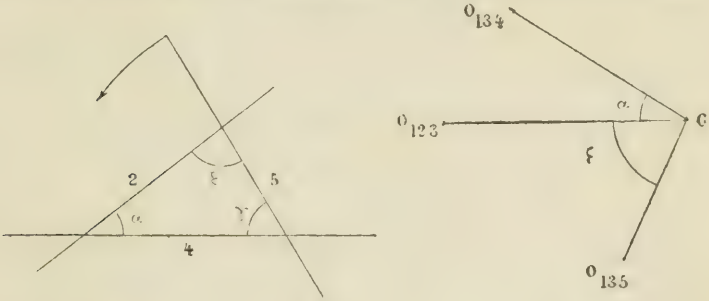


Fig. A.

le montre la figure (A), alors l'angle $O_{134}GO_{135}$ est égal à $(\pi - \gamma)$, par suite on peut écrire, comme nous l'avons fait,

$$O_{134}GO_{135} = \widehat{4.5}.$$

Mais cette conclusion n'est plus exacte dans l'hypothèse de la figure (B) ; le principe que nous avons énoncé ne pourrait plus être accepté, au moins dans tous les cas. C'est en ce point délicat que réside la difficulté que nous avons tenu à signaler et à laquelle on répond comme nous allons le montrer.

Supposons un instant que la disposition de la figure (B) soit possible : faisons tourner la droite 5 autour du point (4.5) jusqu'à ce qu'elle vienne se confondre avec 4. L'angle β augmente sans cesse et a pour limite $(\pi - \alpha)$; dans la figure (B) le point O_{135} se déplace de telle façon que la droite GO_{135} s'écarte de plus en plus et a pour position limite un point qui, dans aucun cas, ne peut venir se confondre avec O_{134}. Ceci implique contradiction, car il est évident que ladroite 5 étant confondue avec 4, le triangle 134 est le même que 135 et les deux points $O_{134}O_{135}$ doivent occuper la même position, à la limite.

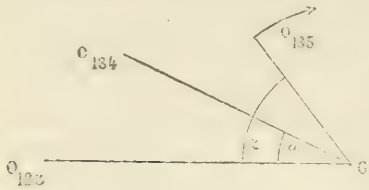


Fig. B.

On examinera de même les autres cas, ceux où l'on suppose $O_{123}GO_{134} = \pi - \alpha$ ou $O_{123}GO_{135} = \pi - \beta$ et l'on verra, en suivant le raisonnement précédent, que dans tous les cas on a

$$O_{134}GO_{135} = 4.5.$$

(A suivre.)

ÉTUDE SUR LE CERCLE DE BROCARD

Par M. **A. Morel**.

Nous nous proposons, dans cette note, de faire connaître à nos lecteurs quelques-unes des intéressantes propriétés qui ont été exposées par M. *Brocard*, capitaine du génie, dans la *Nouvelle Correspondance* d'abord, puis dans le *Mathesis* ; nous serons ainsi amenés à considérer deux points et un cercle auxquels, suivant l'avis de M. *Neuberg*, nous proposons de donner le nom de *points de Brocard* et de *cercle de Brocard*.

1. — Théorème. — *Étant donné un triangle* ABC, *on peut trouver un point* ω *dans le plan de ce triangle, tel que, en le joignant aux points* A, B, C, *les angles* ωAB, ωBC, ωCA *soient égaux.*

En effet, si je fais passer par les deux sommets A et B *(fig. 1)* une circonférence, tangente au côté BC, tout point ω de l'arc intérieur AωB est tel que les angles ωAB, ωBC sont égaux, car ils ont même mesure; si donc je fais passer par les points B et C; une circonférence tangente au côté AC, cette circonférence coupera la première en un point ω qui répond à la question; car, pour ce point particulier, on a

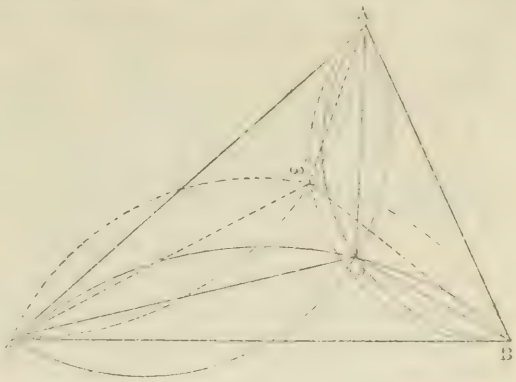


Fig. 1.

$$\omega AB = \omega BC = \omega CA.$$

L'arc AωB est le segment capable du supplément de l'angle B; de même l'arc BωC est le segment capable du supplément de l'angle C et l'on voit que : si sur chacun des côtés d'un triangle comme corde on décrit un segment capable du supplément d'un angle adjacent en prenant ces angles toujours dans le même sens, en parcourant le périmètre du triangle, ces trois segments de cercle se coupent en un point ω, qui jouit de la propriété indiquée.

La construction même que nous venons d'indiquer nous montre que si nous prenons les angles du triangle en parcourant le périmètre en sens contraire, nous aurons un second point ω′ tel que les angles ω′AC, ω′BA, ω′AB soient égaux.

Ce sont ces deux points ω et ω′ que nous appellerons les *points de Brocard* (*).

2. — Nous allons calculer la valeur de l'angle ωAB en

(*) M. Brocard appelle ces points les *points segmentaires*, par suite de la construction même qui a servi à les déterminer (voir *Nouvelle Correspondance mathém.*, t. III, p. 109).

fonction des angles du triangle donné; appelons α cet angle; x, y, z, les longueurs ωA, ωB, ωC; nous avons immédiatement

$$\frac{x}{y} = \frac{\sin(B-\alpha)}{\sin\alpha}; \quad \frac{y}{z} = \frac{\sin(C-\alpha)}{\sin\alpha}; \quad \frac{z}{x} = \frac{\sin(A-\alpha)}{\sin\alpha}.$$

Multiplions ces égalités membre à membre; les quantités x, y, z disparaissent, et il reste l'équation

$$\sin(A-\alpha)\sin(B-\alpha)\sin(C-\alpha) = \sin^3\alpha. \qquad (1)$$

Développons cette équation; divisons par $\sin^3\alpha$, qui n'est pas nul; il vient

$$\cot g^3\alpha \sin A \sin B \sin C$$
$$-\cot g^2\alpha \cos A \cos B \cos C\,(\operatorname{tg}B \operatorname{tg}C + \operatorname{tg}A \operatorname{tg}C + \operatorname{tg}A \operatorname{tg}B)$$
$$+\cot g\alpha \sin A \sin B \sin C - (1 + \cos A \cos B \cos C) = 0. \qquad (2)$$

En divisant par le produit des trois sinus, il vient après réductions faciles

$$\cot g^3\alpha - \cot g^2\alpha\,(\cot g\,A + \cot g\,B + \cot g\,C) + \cot g\,\alpha$$
$$-(\cot g\,A + \cot g\,B + \cot g\,C) = 0. \qquad (3)$$

Cette équation n'admet qu'une seule solution; car elle peut se mettre sous la forme:

$$(\cot g^2\alpha + 1)(\cot g\,\alpha - \cot g\,A - \cot g\,B - \cot g\,C) = 0.$$

Donc la relation cherchée est

$$\cot g\,\alpha = \cot g\,A + \cot g\,B + \cot g\,C. \qquad (4)$$

3. — On pourrait encore obtenir cette relation au moyen d'équations de degré moindre; en effet, le triangle $A\omega B$ nous donne

$$\frac{y}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin B};$$

de même, le triangle $A\omega C$ donne

$$\frac{z}{b} = \frac{\sin(A-\alpha)}{\sin A};$$

d'où l'on tire par division

$$\frac{by}{cz} = \frac{\sin A \sin\alpha}{\sin B \sin(A-\alpha)}.$$

Dans cette équation, remplaçons $\frac{y}{z}$ par la valeur trouvée précédemment, et $\frac{b}{c}$ par le rapport $\frac{\sin B}{\sin C}$; il vient

$$\frac{\sin B \sin (C - \alpha)}{\sin C \sin \alpha} = \frac{\sin A \sin \alpha}{\sin B \sin (A - \alpha)}.$$

Cette équation développée devient, en divisant par $\sin^2 \alpha$,

$$\cot g^2 \alpha \sin A \sin C \sin^2 B - \cot g \alpha \sin^3 B$$
$$- \cos B (1 + \cos A \cos B \cos C) = 0. \qquad (5)$$

Cette équation est du second degré; ses racines sont rationnelles, car la quantité sous le radical peut se mettre sous la forme

$\sin^2 B [\sin^4 B + 4 \sin A \sin C \cos B (1 + \cos A \cos B \cos C)] = 0$;

mais la quantité $1 + \cos A \cos B \cos C$ peut être remplacée, puisque A, B, C sont les angles d'un triangle, par

$$\sin^2 B + \sin A \sin C \cos B;$$

donc la quantité sous le radical est égale à

$$\sin^2 B (\sin^2 B + 2 \sin A \sin C \cos B)^2.$$

On trouve par suite pour l'une des racines

$$\cot g \alpha = \frac{\sin^2 B + \sin A \sin C \cos B}{\sin A \sin C \sin B}.$$

ou bien, d'après une transformation simple,

$$\cot g \alpha = \cot g A + \cot g B + \cot g C.$$

L'autre racine donne

$$\cot g \alpha = - \cot g B,$$

qui ne convient pas à la question.

On peut même obtenir immédiatement une équation du premier degré; en effet, le triangle $A\omega B$ donne

$$\frac{x}{c} = \frac{\sin (B - \alpha)}{\sin B};$$

de même, $A\omega C$ donne

$$\frac{z}{b} = \frac{\sin (A - \alpha)}{\sin A};$$

en divisant membre à membre, il vient, en remplaçant $\frac{x}{z}$ par sa valeur trouvée plus haut,

$$\frac{\sin B \sin \alpha}{\sin C} = \frac{\sin (B - \alpha) \sin A}{\sin B}. \qquad (6)$$

Cette équation développée donne

$$\cot g \alpha = \frac{\sin^2 B + \sin A \sin C \cos B}{\sin A \sin C \sin B},$$

et par suite $\cot g \alpha = \cot g A + \cot g B + \cot g C.$

4. — Nous pouvons nous proposer de calculer les lignes ωA, ωB, ωC ; pour cela, nous avons dans le triangle $A\omega B$

$$\frac{x}{c} = \frac{\sin(B - \alpha)}{\sin B}.$$

Le triangle $A\omega C$ nous donne

$$\frac{x}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin A}.$$

En égalant ces deux valeurs de x, nous avons

$$b \sin B \sin \alpha = c \sin A \sin (B - \alpha)$$

ce qui donne $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{c \sin BA \sin B}{b \sin B + c \sin A \cos B}$.

En multipliant haut et bas par $2a$, et remplaçant $2ac \sin B$ par $4S$, $2ab \sin B$ par $2b^2 \sin A$, et $2ac \cos B$ par $a^2 + c^2 - b^2$ il vient, pour la valeur de α en fonction des côtés,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4S}{(b^2 + c^2 + a^2)}, \tag{7}$$

d'où $\sin \alpha = \dfrac{4S}{\sqrt{(b^2 + c^2 + a^2)^2 + 16S^2}}$.

Mais on a

$$16S^2 = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4.$$

On en tire

$$\sin \alpha = \frac{2S}{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}. \tag{8}$$

Posons $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = K^2$;

il vient $\omega A = \dfrac{2bS}{K \sin A}$,

et. puisque $2S = bc \sin A$, on trouve

$$\omega A = \frac{b^2c}{K}.$$

On aura de même

$$\omega B = \frac{c^2a}{K}; \quad \omega C = \frac{a^2b}{K}. \tag{9}$$

Un calcul analogue nous donnerait, pour les distances du point ω' aux sommets, les valeurs suivantes :

$$\omega' A = \frac{c^2b}{K}; \ \omega' B = \frac{a^2c}{K}; \ \omega' C = \frac{b^2a}{K}. \tag{10}$$

Ces dernières valeurs trouvées par M. Chadu (*) vont nous permettre de signaler une relation fort importante entre les points ω et ω'. En effet, on a

$$\frac{\omega A}{\omega' A} = \frac{b}{c}\ ; \quad \frac{\omega C}{\omega' B} = \frac{b}{c}\ ;$$

donc les deux triangles ωAC, $\omega' AB$ sont semblables, et par suite les côtés homologues étant ωA et $\omega' A$, ωC et $\omega' B$, les angles ωAC, $\omega' AB$ sont égaux; donc les lignes $A\omega'$, $B\omega'$ sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle en A; il en est de même pour chacun des autres couples de droites par rapport à la bissectrice correspondante.

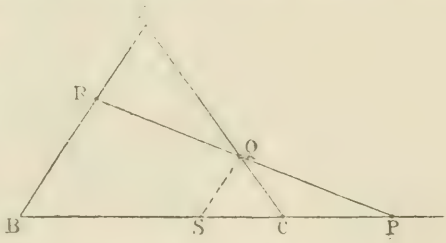
(A suivre.)

QUESTION 34

Solution par MM. Vail et Lenoir, Ecole Albert-le-Grand.

Par un point P ***sur le prolongement de la base*** BC ***d'un triangle, mener une transversale rencontrant*** AC ***en*** Q ***et*** AB ***en*** R, ***de façon que le produit*** AR. CQ ***soit minimum.***

(Educ. Times.)



Menons QS parallèle à AB. Soit $PC = d$, $PB = m$. $PS = x$. $m - d = a$.

On a
$$QC = \frac{b}{a}(x - d)$$
$$AR = c - \frac{mc}{ax}(x - d)$$
d'où
$$AR.QC = \frac{bc}{a}\left[x - d - \frac{m}{a}\left(x - 2d + \frac{d^2}{x}\right)\right]$$

(*) *Nouv. Annales math.*, 1875. Sol. de la question 1166.

$$= \frac{bc}{a}\left[x\left(1 - \frac{m}{a} + \frac{md^2}{ax^2}\right) - d + \frac{2md}{a}\right]$$

Cette expression est minima si

$$1 - \frac{m}{a} + \frac{md^2}{ax^2} = 0;$$

d'où $$x^2 = md;$$

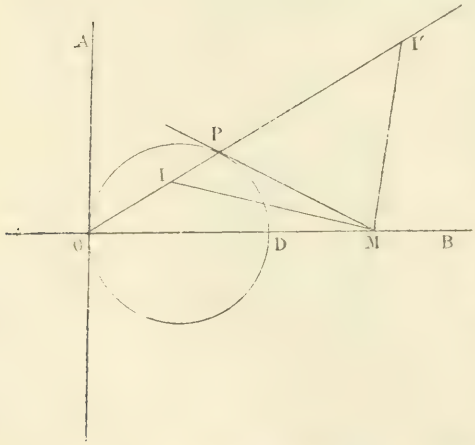
donc PS doit être moyenne proportionnelle entre PB et PC.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Lachesnais, de Saint-Louis ; Bablon, d'Épinal.

QUESTION 52

Solution par M. DEVILLE, brigadier d'artillerie de marine, à Lorient.

On prend un angle droit AOB, *et sur* OB *un point fixe* M. *Soit un cercle tangent en* O *à la droite* OA. *Menons par* M *une tangente à ce cercle et soit* P *le point de contact. Menons* OP *et les bissectrices des angles formés par les droites* OC *et* MP.



Démontrer que le lieu décrit par les points I *et* I' *où ces bissectrices rencontrent* OP *est un système de deux cercles quand on fait varier le cercle* C.

(G. L.)

Soit MI la bissectrice intérieure, on a

$$OIM = 180 - (IOM + IMO);$$

or IOM a pour mesure $\frac{\text{arc PD}}{2} = \frac{2PD}{4}$

$$\text{IMO} = \frac{\text{PMC}}{2} \text{ a pour mesure } \frac{\text{arc OP} - \text{arc PD}}{4};$$

donc $$\text{IOM} + \text{IMO} = \frac{\text{PD} + \text{PO}}{4} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ,$$

donc $\text{OIM} = 135^\circ$; de même $\text{OI'M} = 45^\circ$.

Les lieux des points I et I' sont donc respectivement deux segments de cercles capables de 135° et 45° décrits sur OM comme corde.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Puig, à Marseille ; Mosnat, à Thiers.

QUESTION 54

Solution par M. TOUSSAINT, à Bar-le-Duc.

Résoudre le système :

$$\frac{x^2 - y^2 - z^2 - d^2}{x^2 + y^2 + z^2 - d^2} = \frac{a}{d}, \tag{1}$$

$$\frac{2y(x - d)}{x^2 + y^2 + z^2 - d^2} = \frac{b}{d}. \tag{2}$$

$$\frac{2z(x - d)}{x^2 + y^2 + z^2 - d^2} = \frac{c}{d}, \tag{3}$$

en supposant $a^2 + b^2 + c^2$ *différent de* d^2. (G. L.)

L'équation (1) donne

$$\frac{x^2 - d^2}{y^2 + z^2} = \frac{a + d}{d - a}. \tag{4}$$

Divisant terme à terme les équations (2) et (3), on a

$$\frac{y}{z} = \frac{b}{c} \quad \text{ou} \quad y = \frac{bz}{c}. \tag{5}$$

Portant dans (4) cette valeur d'y, il vient

$$\frac{x^2 - d^2}{\dfrac{b^2z^2}{c^2} + z^2} = \frac{a + d}{d - a}; \tag{6}$$

portant de même dans (2) la valeur d'y, on a

$$\frac{2\,\dfrac{bz}{c}\,(x+d)}{x^2+\dfrac{b^2z^2}{c^2}+z^2-d^2}=\frac{b}{d}; \qquad (7)$$

or (6) peut s'écrire

$$\frac{x^2-d^2}{x^2+\dfrac{b^2z^2}{c^2}+z^2-d^2}=\frac{a+d}{2d}, \qquad (8)$$

en ajoutant à chaque dénominateur le numérateur.

Divisant membre à membre (7) par (8), il vient

$$x=\frac{(a+d)\,z}{c}-d. \qquad (9)$$

Portant dans (6) cette valeur de x, on a

$$z=\frac{2cd\,(d-a)}{d^2-a^2-b^2-c^2}.$$

Connaissant z, on tire x et y en substituant cette valeur dans (5) et (9)

$$x=d\,\frac{d^2-a^2+b^2+c^2}{d^2-a^2-b^2-c^2}.$$

$$y=2bd\,\frac{(d-a)}{d^2-a^2-b^2-c^2}.$$

Nota. — La même question a été résolue par MM. Poitresse, à Épinal; Mosnat, à Thiers.

QUESTION 56

Solution par Mlle Lucie J..., à Liège.

On considère un cercle C *de centre* O. *Soit* AB *un diamètre fixe de ce cercle. Par le point* O *on mène une circonférence* C′ *tangente à* AB, *puis on mène une tangente commune aux cercles* C *et* C′. *On propose de trouver le lieu des points de contact de cette droite avec* C′, *lieu qui se compose de deux droites parallèles.* (G. L.)

Soit M un des points du lieu et soit MP la perpendiculaire abaissée de M sur AB. Menons MO′, M′O. La figure MOO′Q est un parallélogramme. Donc MQ = OO′ (1).

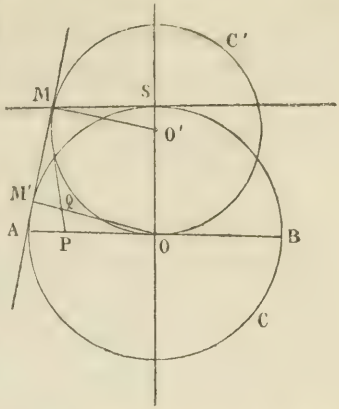
Les triangles rectangles OPQ, MM'Q qui ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal sont égaux, donc PQ = M'Q = OM' — OQ = OM' — O'M (2).

Additionnant (1) et (2) on a

$$MQ + PQ = MP = R,$$

rayon de la circonférence O.

Donc, quel que soit le point M, il est toujours éloigné de AB d'une quantité constante. Le lieu des points M est donc la parallèle au point S, à la droite AB. Le lieu se compose donc du système des tangentes au cercle C parallèles à AB.



NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Deville, à Lorient ; Puig, à Marseille ; Bordier, pensionnat de Blanzac (Charente) ; Musy, Richelet collège de Pontarlier ; Desplanques, collège de Condé ; Richelet, Sauv, à Moulins ; Bablon, à Epinal.

QUESTION 58

Solution par M. BERTHELOT, maître répétiteur au Lycée de Bourges.

On considère l'équation du quatrième degré

$$(x + \alpha)(x + \alpha + 1)(x + \alpha + 2)(x + \alpha + 3) + h = 0.$$

On propose de résoudre cette équation et de montrer que ses racines sont imaginaires si h *est supérieur à* 1 ; *deux à deux coïncidentes, si* h = 1, *et réelles si* h *est inférieur à* 1. (G. L.)

Cette équation peut s'écrire

$$[(x + \alpha)(x + \alpha + 3)][(x + \alpha + 1)(x + \alpha + 2)] + h = 0$$

$$[x^2 + (2\alpha + 3)x + \alpha^2 + 3\alpha + 2][x^2 + (2\alpha + 3)x + \alpha^2 + 3\alpha] + h = 0.$$

Si on pose $x^2 + (2\alpha + 3)x + \alpha^2 + 3\alpha = y,$ (1)

l'équation transformée devient

$$y^2 + 2y + h = 0;$$

d'où
$$y' = -1 + \sqrt{1-h}$$
$$y'' = -1 - \sqrt{1-h}$$

Remplaçons successivement dans (1) y par ces valeurs, il en résulte pour x les quatre valeurs suivantes :

$$x_1 = \frac{-(2\alpha+3) + \sqrt{5 + 4\sqrt{1-h}}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-(2\alpha+3) - \sqrt{5 + 4\sqrt{1-h}}}{2}$$

$$x_3 = \frac{-(2\alpha+3) + \sqrt{5 - 4\sqrt{1-h}}}{2}$$

$$x_4 = \frac{-(2\alpha+3) - \sqrt{5 - 4\sqrt{1-h}}}{2}.$$

Ces valeurs seront réelles si $5 \geq 4\sqrt{1-h}$.

Si $h > 1$, la quantité sans le radical est imaginaire, par suite les quatre racines sont imaginaires.

Si $h = 1$, la quantité sans le radical égale 5 ; les racines sont deux à deux égales.

Si $h < 1$, la quantité $4\sqrt{1-h}$ est plus petite que 5 ; les racines sont dès lors réelles.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Chevalier, à Sainte-Barbe ; Deville, brigadier d'artillerie, à Lorient ; Mosnat, à Thiers ; Rougelin, Sauv, Giat, à Moulins ; Bablon, à Epinal.

QUESTION 59

Solution par M. Chevalier, élève à l'École préparatoire Sainte-Barbe.

Résoudre l'équation
$$x(x+\alpha)(x+\beta)(x+\alpha+\beta) + h = 0.$$
(G. L.)

Cette équation peut s'écrire
$$[x(x+\alpha+\beta)][(x+\alpha)(x+\beta)] + h = 0$$
$$[x^2 + (\alpha+\beta)x][x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha\beta] + h = 0$$

et si l'on pose $x^2 + (\alpha + \beta)\, x = y,$ (1)

l'équation transformée devient

$$y^2 + \alpha\beta y + h = 0\,;$$

d'où $$y = \frac{-\alpha\beta \pm \sqrt{\alpha^2\beta^2 - 4h}}{2}$$

En remplaçant dans (1) et résolvant on trouve

$$x = \frac{-(\alpha + \beta) \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \pm 2\sqrt{\alpha^2\beta^2 - 4h}}}{2}.$$

Nous laissons au lecteur le soin de discuter cette valeur de x.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Berthelot, à Bourges ; Puig, à Marseille ; Marny, à Valenciennes ; Deville, brigadier d'artillerie, à Lorient ; Giat, Rougelin, Sauv, à Moulins ; Bablon, à Epinal.

QUESTION 61

Solution par M. BABLON, élève au Collège d'Épinal.

Résoudre l'équation

$$\frac{x}{x+1} + \frac{2x}{x+2} + \frac{3x}{x+3} + \frac{4}{(x+1)(x+2)(x+3)} = 0.$$

(G. L.)

Réduisant au même dénominateur, il vient, en chassant le dénominateur,

$$x(x+2)(x+3) + 2x(x+1)(x+3) + 3x(x+1)(x+2) + 4 = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$x(x+3)(3x+4) + 3x^2(x+3) + (6x+4) = 0$$

ou $$x(x+3)(6x+4) + 6x + 4 = 0$$

ou enfin $$(6x+4)(x^2 + 3x + 1) = 0.$$

Elle se décompose en deux autres :

$$6x + 4 = 0, \quad \text{d'où } x = \frac{-3}{2},$$

et $$x^2 + 3x + 1 = 0,$$

qui a pour racine $$\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Savonnet et Simon, à Salins.

QUESTION 63

Solution par M. Chollet, élève au Lycée d'Angers.

Les premiers termes d'une série sont 1, 7 *et* 19; *mais on a perdu la loi de récurrence de cette série; on sait seulement que le terme général* u_n *était une fonction entière et de second degré en* n.

Retrouver cette série et démontrer que la somme des n *premiers termes est égale à* n^3. (G. L.)

1. — On sait que $u_n = \alpha n^2 + \beta n + \gamma$

On en déduit

$$1 = \alpha + \beta + \gamma$$
$$7 = 4\alpha + 2\beta + \gamma$$
$$19 = 9\alpha + 3\beta + \gamma.$$

Ce qui donne,

$$\alpha = 3 \quad \beta = 3 \quad \gamma = 1.$$

Par suite

$$u_n = 3(n^2 - n) + 1 = 3n(n-1) + 1.$$

On pourra donc reconstituer la série de la manière suivante :

Sur une première ligne horizontale on écrira la suite naturelle des nombres entiers, précédée de zéro.

Sur une seconde ligne on écrira le produit de chacun des nombres de la ligne (I) par celui qui le précède immédiatement.

Enfin sur une troisième ligne on écrira le triple augmenté d'une unité de chacun des nombres de la ligne (II). — La ligne (III) contient alors la série demandée :

(I)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	....
(II)		0	2	6	12	20	30	42	56	....
(III)		1	7	19	37	61	91	127	169	....

1. — Appelons Σ la somme des n premiers termes de la série. — En vertu de l'égalité $u_n = 3(n^2 - n) + 1$, nous pouvons écrire

$$\Sigma = 3(1^2 - 1) + 1 + 3(2^2 - 2) + 1 + 3(3^2 - 3) + 1 \ldots + 3(n^2 - 2) + 1.$$

Ou en groupant les facteurs de même espèce

$$\Sigma = 3[(1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots + n^2) - (1 + 2 + 3 \ldots + n)] + n.$$

L'expression entre crochets représente l'excès de la somme S_2 des secondes puissances des n premiers nombres, sur la somme S_1 des premières puissances de ces mêmes nombres.

Or $$S^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

et $$S_1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Portant ces valeurs dans Σ, on a

$$\Sigma = 3\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right] + n.$$

Et après réduction $\Sigma = n^3$ C. Q. F. D.

Nota. — La même question a été résolue par MM. H.-S., à Toulouse; Gilloteaux au lycée Charlemagne; Savonnet, Simon, à Salins; Desplanques, à Condé.

QUESTIONS PROPOSÉES

67. — On considère un rectangle dont les sommets sont les points O, P, Q, R. Par les points P, Q, on fait passer une infinité de cercles; soit Δ l'un d'entre eux. Ce cercle Δ coupe QR en un point M, et la droite OM coupe à son tour le cercle Δ en un point I; démontrer que le lieu du point I est une circonférence. *(G. L.)*

68. — On considère un cercle fixe Δ, et un diamètre fixe PQ de ce cercle. Soit A un point, supposé mobile, sur Δ; abaissons de ce point une perpendiculaire AB sur PQ, et du point A comme centre, avec AB comme rayon, décrivons une circonférence qui rencontre Δ aux points C et D; la droite CD rencontre AB au point I. 1° Trouver le lieu décrit par le point I; 2° démontrer que si l'on considère sur Δ deux points A et A′ tels que la corde AA′ soit vue du centre O sous

un angle droit et si l'on répète au point A′ la construction indiquée pour le point A, les distances du point O aux deux cordes CD, C′D′ ainsi déterminées ont une somme constante; 3° étudier les variations de CD quand le point A se déplace sur Δ; 4° après avoir remarqué que le point I est le milieu de AB, on propose de démontrer que les cercles décrits sur BP et BQ comme diamètres sont tangents l'un et l'autre à la droite CD; 5° CD rencontre PQ en un point R; démontrer que la polaire du point R par rapport aux droites AP et BQ passe par le pied de la perpendiculaire abaissée de B sur CD.

(G. L.)

69. — Dans un triangle ABC, on a

$$2R = \frac{l^2}{h}\sqrt{\frac{m^2 - h^2}{l^2 - h^2}}.$$

R, l, m, h étant respectivement le rayon du cercle inscrit, la bissectrice, la médiane et la hauteur partant d'un même sommet. *(E. Lemoine.)*

70. — Dans un triangle ABC, si h_1, h_2, h_3 sont les trois hauteurs partant de A, B, C, x, y, z les distances du point de concours des hauteurs aux côtés BC, AC, AB, on a

$$\frac{1}{h_3 z} + \frac{1}{h_2 y} = \frac{h_1 + x}{h_1 x (h_1 - x)}.$$

(Em. Lemoine.)

71. — Dans un triangle ABC, on mène les bissectrices BD, CF des angles en B et C, et la droite DF. Demontrer que si d'un point quelconque M de DF, on abaisse les perpendiculaires MP, MQ, MN respectivement sur AB, AC, BC, on a

$$MN = MP + MQ.$$ *(D. André.)*

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 286-3.

LA GÉOMÉTRIE RÉCURRENTE

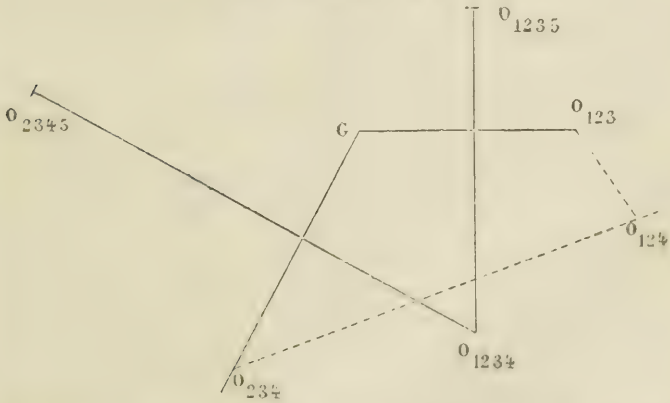
Par M. **G. de Longchamps**.

(*Suite*, voir p. 3.)

8. — Théorème III. — *Soit un polygone complet formé par les cinq droites* 1, 2, 3, 4, 5 ; *soit fait abstraction de l'une d'entre elles, de la droite* 5 *par exemple. Au quadrilatère complet* 1, 2, 3, 4, *correspond un cercle d'ordre quatre, cercle précédemment défini : les cinq circonférences d'ordre quatre ainsi obtenues, en faisant successivement abstraction des droites données, vont passer par un même point.* $\widehat{5}$

En effet G désignant le point, autre que O_{123}, qui est commun aux circonférences d'ordre quatre O_{1234}, O_{1235}, nous venons de montrer que l'on avait

$$O_{234}\ G\ O_{235} = \widehat{4.5}$$



D'autre part, d'après la remarque établie au théorème I, on a

$$O_{234}\ O_{345}\ O_{235} = \widehat{4.5}$$

De ces deux égalités il résulte que les angles

$$O_{234}\ G\ O_{235} \text{ et } O_{234}\ O_{345}\ O_{235}$$

sont égaux ou supplémentaires. Dans l'un et l'autre cas, le quadrilatère $G\ O_{234}\ O_{345}\ O_{235}$ est inscriptible. Mais le cercle

circonscrit au triangle O_{234} O_{345} O_{235} est précisément le cercle d'ordre quatre O_{2345}.

Ainsi les trois cercles O_{1234}, O_{1235}, O_{2345} passent par le même point; par suite l'on peut conclure que les cinq cercles d'ordre quatre passent par le même point.

9. — Remarquons maintenant que la ligne O_{1234} O_{1235} est perpendiculaire sur G O_{123}; et O_{1234} O_{2345} sur G O_{234}. Considérons le point O_{124}; les trois points O_{123}, O_{124}, O_{234} sont situés sur la circonférence O_{1234}, laquelle, nous venons de le remarquer, passe par le point G. Ainsi les deux droites O_{1234} O_{2345}, O_{1234} O_{1235} forment un système superposable à celui des droites O_{124} O_{123}, O_{124} O_{234}. D'ailleurs nous avons reconnu (§ 4) que l'angle O_{123} O_{124} O_{234} était égal à l'angle des deux droites qu'on obtenait en retranchant aux indices extrêmes les numéros qui leur sont communs. On a donc

$$\widehat{O_{123}\ O_{124}\ O_{234}} = 1.4;$$

par suite

$$\widehat{O_{1235}\ O_{1234}\ O_{2345}} = 1.4.$$

Nous pouvons alors énoncer la propriété suivante :

Si l'on considère trois cercles d'ordre quatre : O_α, O_β, O_γ, *l'angle* $O_\alpha\ O_\beta\ O_\gamma$ *est égal à celui des deux droites dont les numéros s'obtiennent en retranchant aux indices extrêmes les chiffres qui leur sont communs.*

10. — Appliquons cette remarque aux trois angles

$$O_\alpha\ O_\beta\ O_\gamma,\quad O_\beta\ O_\gamma\ O_\alpha,\quad O_\gamma\ O_\alpha\ O_\beta;$$

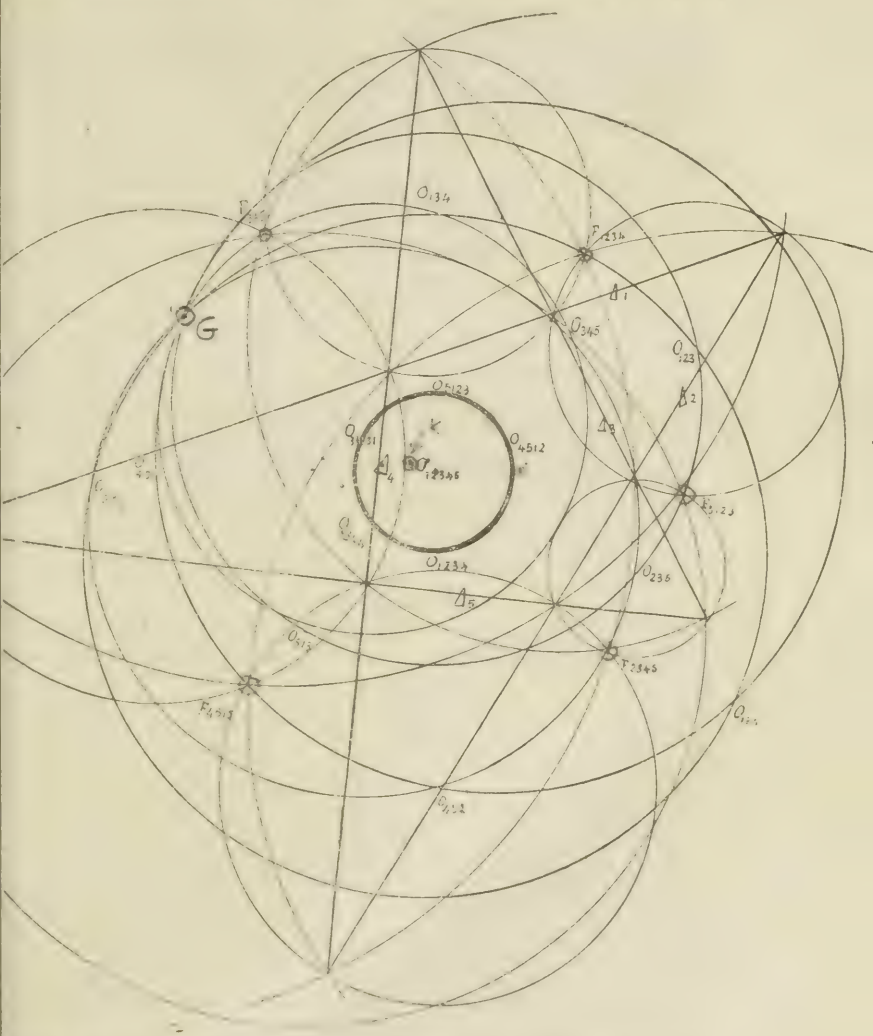
on reconnaît que le triangle formé par les trois points O_α, O_β, O_γ a des angles égaux ou supplémentaires deux à deux de ceux du triangle formé par les numéros qui ne sont pas communs aux trois indices $\alpha\ \beta\ \gamma$.

Pour préciser ce point considérons les trois centres d'ordre quatre

$$O_{1234},\ O_{2345},\ O_{3451}.$$

Il y a nécessairement aux trois indices deux numéros communs ; ici ce sont les chiffres 3 et 4. Les autres numéros sont 1, 2, 5 : les angles du triangle O_{1234} O_{2345} O_{3451} sont deux à deux égaux à ceux du triangle 1 2 5 ou deux à deux supplémentaires des angles de ce triangle. Mais deux triangles qui jouissent de cette propriété ont, comme l'on sait, leurs

angles nécessairement égaux deux à deux, et sont par conséquent semblables. Nous dirons donc : *Le triangle* $O_\alpha\ O_\beta\ O_\gamma$



formé par trois centres d'ordre quatre est semblable au triangle déterminé par les trois droites dont les numéros s'obtiennent en

The Miquel points F_{1234}, F_{4123}, F_{2345}, F_{4512}, F_{3451} are on a circle (centre K). The point F_{1234} lies on the circle (see Comptes Rend. Acad. Paris, Vol. 95, 1882, p. 270) discovered by Sondat. Bibl. der Math. (Wien), 3e Folge, Band 79, 1878, p. 167

supprimant aux trois indices α, β, γ les deux numéros qui leur sont communs.

11. — Théorème IV. — *Les centres des cinq circonférences d'ordre quatre qui correspondent à un pentagone formé par cinq droites indéfinies et deux à deux concourantes sont situés sur une même circonférence. Cette circonférence est d'ordre cinq.*

Il résulte, en effet, de la remarque que nous venons de faire (§ 9), que les angles obtenus en joignant les deux points O_{1234}, O_{2345} successivement à chacun des points

$$O_{1235},\ O_{1245},\ O_{1345}$$

sont tous les trois égaux à l'angle $\widehat{1.5}$. Les cinq points O d'ordre quatre sont donc situés sur une même circonférence. C'est cette circonférence d'ordre cinq que nous désignons par la notation O_{12345}.

12. — Théorème V. — *Lorsque cinq droites 1 2 3 4 5 sont tangentes à une même parabole, les cinq circonférences d'ordre quatre passent par le foyer de la courbe.*

Considérons, en effet, les trois circonférences d'ordre quatre

$$O_{1234},\ O_{2345},\ O_{3451}$$

qui se coupent au point G (théorème III). En dehors de ce point G ces circonférences se coupent deux à deux aux points O_{234}, O_{134}, O_{345}.

Les droites GO_{134}, GO_{345} sont perpendiculaires, respectivement sur les droites

$$O_{1234}\,O_{3451} \quad \text{et} \quad O_{3451}\,O_{2345}.$$

On a donc $\quad O_{134}\,GO_{345} = O_{1234}\,O_{3451}\,O_{2345}.$

Mais nous avons vu (§ 9) que l'on avait

$$O_{1234}\,O_{3451}\,O_{2345} = \widehat{1.5}.$$

On a donc finalement

$$O_{134}\,GO_{345} = \widehat{1.5}.$$

Le point F, par où passent tous les cercles d'ordre trois, dans l'hypothèse où les cinq droites sont tangentes à une même parabole, jouit précisément (§ 4) de cette propriété. Cette remarque s'appliquant aux indices 1, 2, 3, 4, 5 combinés deux à deux de toutes les façons possibles, on peut conclure que

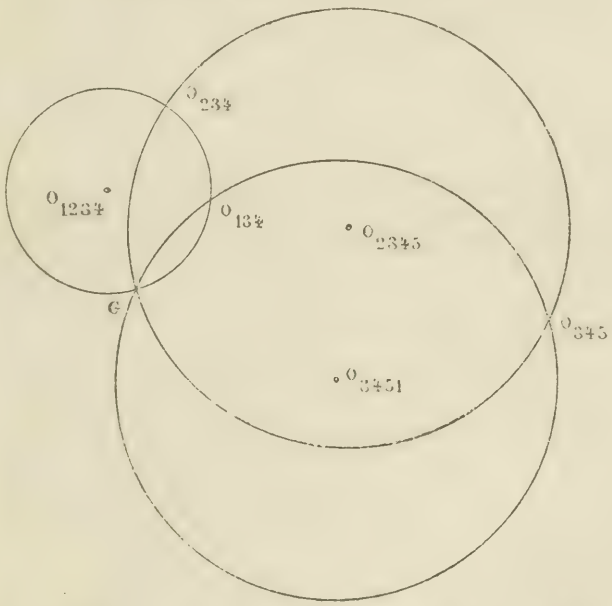
le point G coïncide avec le foyer F de la parabole tangente aux cinq droites proposées.

13. — Théorème VI. — *La circonférence d'ordre cinq qui correspond aux cinq droites* 1, 2, 3, 4, 5; *lorsqu'on suppose qu'elles sont tangentes à une même parabole, passe par le foyer de cette courbe.*

En effet, considérons le quadrilatère

$$GO_{1234}\, O_{2345}\, O_{3451};$$

nous allons reconnaître qu'il est inscriptible.



On a vu (§ 7) que l'angle $O_\alpha\, G\, O_\beta$ pour des points O d'ordre quatre était égal à celui des deux droites dont les numéros s'obtenaient en retranchant aux indices α et β les chiffres communs.

D'après cela on a donc

$$O_{1234}\, G\, O_{3451} = 2 \cdot \widehat{5}.$$

On a vu aussi (§ 9) que l'angle $O_\alpha\, O_\beta\, O_\gamma$ pour des points O d'ordre quatre était égal à celui des droites dont les numéros

s'obtenaient en supprimant les deux chiffres communs aux indices α, γ. On peut donc écrire

$$O_{1234}\, O_{2345}\, O_{3451} = \widehat{2 \,.\, 5}.$$

Le quadrilatère considéré est donc inscriptible. D'ailleurs le cercle circonscrit au triangle $O_{1234}\, O_{2345}\, O_{3451}$, c'est le cercle O_{12345}; on peut donc dire que le cercle O d'ordre cinq passe par le point G foyer de la parabole inscrite au pentagone proposé.

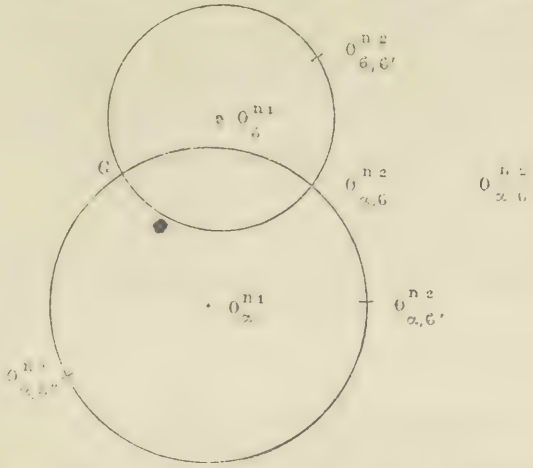
14. — Les théorèmes V et VI sont des cas particuliers des théorèmes généraux que nous avons donnés plus haut en supposant cinq droites quelconques et non pas cinq droites tangentes à une même parabole. Ces cas particuliers ont été retrouvés par M. Ritschie (*). Il nous reste à montrer comment on étend à n droites *quelconques du plan* les théorèmes III et IV.

Nous indiquerons d'abord, à propos de cette généralisation, la notation qu'il nous paraît bon d'employer pour exposer les raisonnements nécessaires à cette généralisation. Le point sur lequel on effectue une étude de géométrie récurrente étant désigné par P, nous l'affecterons de deux indices. *L'indice supérieur indique l'ordre du point; l'indice inférieur représente le numéro de la droite qui a été supprimée pour considérer le point en question.* D'après cela P^{α}_{β} désigne un point P d'ordre α obtenu en considérant $(\alpha + 1)$ droites, parmi lesquelles on a supprimé celle qui portait le numéro β. Lorsqu'il n'y a pas d'indice inférieur à la lettre P, lorsqu'on écrit P^n on entend représenter par là le point P d'ordre n qui correspond aux droites $1, 2, \ldots n$. De même $P^{n-2}_{\alpha\beta}$ désigne le point P d'ordre $(n-2)$ qui correspond au polygone complet obtenu en supprimant les droites α, β, et ainsi de suite. Ces notations peuvent présenter quelque difficulté, quand on les emploie pour la première fois; mais elles sont indispensables à une étude de géométrie récurrente.

15. — Il est maintenant facile de comprendre comment

(*) *Messenger of mathematics*, vol. IV, p. 127. — *Nouvelle Correspondance mathématique*, 1877, p. 147.

on pourra passer de l'étude des polygones de $(n-1)$ droites à celle du polygone de n droites. On admettra les propriétés



établies ci-dessus pour tous les points P d'ordre $(n-2)$ qui se déduisent, d'après la loi étudiée, des polygones de $(n-1)$ droites; on démontrera que ces propriétés appartiennent encore aux points P d'ordre $(n-1)$ obtenus avec un polygone de n droites, quand on fait successivement abstraction de l'une d'entre elles. Les théorèmes démontrés pour les points P d'ordre $(n-1)$ subsisteront donc pour les points P d'ordre n.

Considérons les trois points d'ordre $(n-2)$

$$O^{n-2}_{\alpha\beta},\quad O^{n-2}_{\alpha\beta'},\quad O^{n-2}_{\alpha\beta''}. \qquad \text{(A)}$$

Le cercle qui passe par ces trois points, cercle qui renferme tous les points O^{n-2}, $O^{n-2}_{\alpha,\beta}$, etc., a pour centre le point que nous désignons par O^{n-2}_{α}. Considérons de même le cercle O^{n-1}_{β}. Ces deux circonférences ont un point commun, savoir : $O^{n-2}_{\alpha\beta}$: nous désignerons par G le second point d'intersection de ces deux circonférences.

Les points (A) sont trois points d'ordre $(n-2)$ appartenant au polygone d'ordre $(n-1)$, $\left(\frac{1.2\ \ldots\ldots\ n}{\alpha}\right)$; si l'on

convient de désigner ainsi les $(n - 1)$ droites qui se déduisent des droites proposées $1, 2, \ldots n$; en supprimant celle qui est numérotée α.

On peut appliquer aux points (A) la propriété du § 9; on a donc

$$O^{n-2}_{\alpha\beta}\, O^{n-2}_{\alpha\beta'}\, O^{n-2}_{\alpha\beta'} = \widehat{\beta,\beta'}. \qquad (1)$$

Prenons maintenant sur la circonférence O^{n-1}_{β} le point $O^{n-2}_{\beta,\beta'}$ qui est certainement situé sur elle; ceci résulte de la définition même de cette circonférence O^{n-1}_{β}. De l'égalité (1) on conclut

$$O^{n-2}_{\alpha\beta'}\, G\, O^{n-2}_{\alpha\beta} = \widehat{\beta,\beta'}. \qquad (2)$$

Cette égalité constitue un principe, duquel on déduit

$$O^{n-2}_{\beta\beta'}\, G\, O^{n-2}_{\alpha\beta} = \widehat{\alpha,\beta'}. \qquad (3)$$

Des égalités (2) et (3) on tire

$$O^{n-2}_{\beta\beta'}\, G\, O^{n-2}_{\alpha\beta'} = \widehat{\alpha,\beta}. \qquad (4)$$

Ceci posé, considérons les trois points

$$O^{n-2}_{\beta\beta'}\, O^{n-2}_{\alpha\beta'}\, O^{n-2}_{\alpha\beta'}$$

qui sont trois points d'ordre $(n - 2)$ du polygone

$$\left(\frac{1 \cdot 2 \ldots n}{\beta'}\right).$$

On sait que l'on a (§ 9)

$$O^{n-2}_{\beta\beta'}\, O^{n-2}_{\alpha\beta'}\, O^{n-2}_{\alpha\beta'} = \widehat{\alpha,\beta}. \qquad (5)$$

En comparant (4) et (5) on voit que le cercle $O^{n-1}_{\beta\beta'}\, O^{n-2}_{\alpha\beta'}\, O^{n-2}_{\alpha\beta'}$ passe par le point G. Tous les cercles O_1^{n-1}, $O_2^{n-2}, \ldots$ passent donc par le même point G.

On voit ensuite, en raisonnant comme nous l'avons fait plus haut (théorème IV), que les n points d'ordre $(n - 1)$ appartiennent à une même circonférence. Cette circonférence passe par le point G, quand les n droites sont tangentes à une même parabole, et ce point G est alors le foyer de cette courbe.

Nous pouvons donc finalement énoncer le théorème suivant :

Théorème général. — *Soit un système de* n *droites*

1, 2, 3, ... n

deux à deux concourantes; faisons abstraction de l'une d'entre

elles : nous obtiendrons (n — 1) *droites formant un polygone complet auquel correspond un point d'ordre* (n — 1) *et une circonférence d'ordre* (n — 1) *définis par la loi de récurrence que nous avons développée. Cette loi qui prend pour point de départ la considération des cercles circonscrits aux triangles formés par les quatre droites d'un quadrilatère complet, conduit aux conclusions suivantes :*

1° *Les* n *circonférences ainsi obtenues passent par un même point* G ;

2° *Les centres de ces circonférences sont situés sur une même circonférence* O ;

3° *Dans le cas particulier où les* n *droites enveloppent une même parabole, le point* G *est le foyer de la courbe et la circonférence* O *passe par ce point.*

(A suivre.)

ÉTUDE SUR LE CERCLE DE BROCARD

Par M. **A. Morel**.

(*Suite*, voir p. 10.)

---

5. — Lorsque le triangle a une forme particulière, on peut trouver facilement la valeur de l'angle α, et par suite la position des points ω et ω'.

Si le triangle est équilatéral, il est évident que l'angle α est égal à 30°; les points ω et ω' sont confondus au centre du triangle. Du reste, la formule qui donne α devient alors

$$\operatorname{cotg} \alpha = 3 \operatorname{cotg} A = \sqrt{3}.$$

Donc $\alpha = 30°$.

Si le triangle est isoscèle, on a $B = C = \frac{\pi - A}{2}$. Donc

$$\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{cotg} A + 2 \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

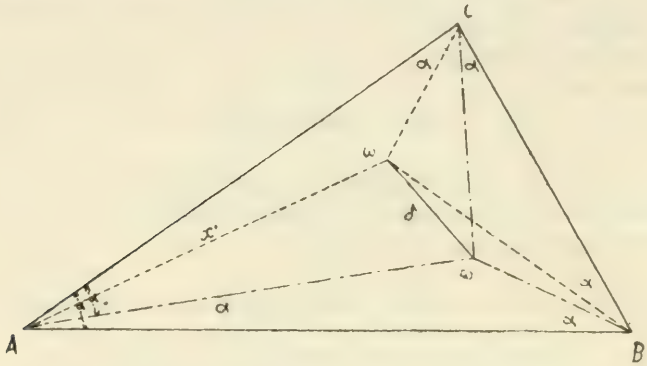
En remplaçant $\operatorname{cotg} A$ par $\frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{A}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2}$, on trouve

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{3}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{A}{2} = \frac{2 \cos A}{\sin A}.$$

Lorsque le triangle est rectangle

$$A = \frac{\pi}{2}, \text{ et } B = \frac{\pi}{2} - C;$$

on a alors $\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{cotg} B + \operatorname{tg} B = \dfrac{2}{\sin 2B}$.



6. — Cherchons dans le cas général la distance des deux points ω et ω'. Soient d cette distance, ωBA, ωCB les angles égaux à α. En désignant $A\omega$ et $A\omega'$ par x et x', on a

$$x = \frac{c \sin \alpha}{\sin A}; \quad x' = \frac{b \sin \alpha}{\sin A}.$$

Le triangle $\omega\omega' A$ nous donne

$$\delta^2 = x^2 + x'^2 - 2xx' \cos (A - 2\alpha).$$

Si nous remplaçons x et x' par leurs valeurs, nous trouvons

$$\delta^2 \frac{\sin^2 A}{\sin^2 \alpha} = b^2 + c^2 - 2bc \cos (A - 2\alpha);$$

d'autre part nous avons

$$b^2 + c^2 = a^2 + 2bc \cos A;$$

donc $$\delta^2 \frac{\sin^2 A}{\sin^2 \alpha} = a^2 - 4bc \sin \alpha \sin (A - \alpha).$$

Nous trouverions de même très facilement les valeurs

$$\delta^2 \frac{\sin^2 B}{\sin^2 \alpha} = b^2 - 4ca \sin \alpha \sin (B - \alpha),$$

$$\delta^2 \frac{\sin^2 C}{\sin^2 \alpha} = c^2 - 4ab \sin \alpha \sin (C - \alpha).$$

En égalant les deux premières valeurs de δ^2, nous avons

$$\frac{a^2 - 4bc \sin \alpha \sin (A - \alpha)}{\sin^2 A} = \frac{b^2 - 4ca \sin \alpha \sin (B - \alpha)}{\sin^2 B}.$$

Cette relation donne, après réduction,

$$\frac{b \sin (A - \alpha)}{\sin^2 A} = \frac{a \sin (B - \alpha)}{\sin^2 B}$$

ou encore $\sin^3 B \sin (A - \alpha) = \sin^3 A \sin (B - \alpha)$

d'où nous tirons

$$\operatorname{cotg} A = \frac{\sin^3 B \cos A - \sin^3 A \cos B}{\sin A \sin B \sin C \sin (B - A)};$$

Mais on a

$$\frac{\sin^3 B \cos A - \sin^3 A \cos B}{\sin (B - A)} = \sin^2 A + \sin B \sin C \cos A;$$

par conséquent, nous retrouvons ici l'expression déjà obtenue pour $\operatorname{cotg} \alpha$:

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\sin^2 A + \sin B \sin C \cos A}{\sin A \sin B \sin C}.$$

7. — La discussion de la valeur que nous venons d'indiquer pour la valeur de δ conduit à un résultat intéressant.

Nous avons trouvé l'égalité

$$\delta^2 \frac{\sin^2 A}{\sin^2 \alpha} = a^2 - 4bc \sin \alpha \sin (A - \alpha).$$

Or on a aussi

$$\sin (A - \alpha) = \frac{\sin \alpha \sin^2 A}{\sin B \sin C}.$$

Donc on trouve

$$\delta^2 \frac{\sin^2 A}{\sin^2 \alpha} = a^2 - 4bc \frac{\sin^2 \alpha \sin^2 A}{\sin B \sin C}.$$

Mais, d'autre part, dans le triangle ABC, on a

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

On en tire facilement

$$\frac{\delta^2 \sin^2 A}{\sin^2 \alpha} = a^2(1 - 4 \sin^2 \alpha),$$

et par suite on a

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{\delta}{\sin \alpha \sqrt{1 - 4 \sin^2 \alpha}} = 2R,$$

R étant le rayon du cercle circonscrit au triangle.

Cette intéressante relation entre δ, l'angle α et le rayon, nous apprend en outre que, pour que l'on ait des valeurs réelles, il faut que l'angle α ne dépasse pas 30 degrés; car cet angle est évidemment aigu et son sinus, comme nous le voyons, ne peut surpasser $\frac{1}{2}$.

On pourrait, du reste, obtenir ce résultat en partant immédiatement de la formule

$$\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C.$$

Les angles A, B, C, étant les angles d'un triangle, on a

$$\operatorname{cotg} C = - \operatorname{cotg} (A + B).$$

Donc

$$\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B - \operatorname{cotg} (A + B).$$

Supposons d'abord l'angle A constant; il suffit donc de chercher le maximum ou le minimum de

$$\operatorname{cotg} B - \operatorname{cotg} (A + B),$$

ou de

$$\frac{2 \sin A}{\cos A - \cos (A + 2B)}.$$

Cette expression, essentiellement positive, passera par un minimum pour $\cos (A + 2B) = -1$

ou $A + 2B = \pi.$

Mais déjà $A + B + C = \pi$;

donc $B = C.$

et par suite, pour une valeur donnée de A, α deviendra maximum lorsque le triangle sera isoscèle, les côtés égaux étant ceux qui comprennent l'angle A.

Cherchons maintenant pour quelle valeur de A la fonction

$$\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{cotg} A + 2 \operatorname{tg} \frac{A}{2}$$

devient minima.

Nous avons vu que cette expression pouvait se mettre

sous la forme $$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{3 \operatorname{tang}^2 \frac{A}{2} + 1}{2 \operatorname{tang} \frac{A}{2}}:$$

il est alors facile de voir qu'elle passe par un minimum pour

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

alors $$A = 60^\circ,$$

et par conséquent le triangle est équilatéral.

(A suivre.)

QUELQUES THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

Par M. **E. Catalan** (*).

1. — *Annexes d'un triangle.* — Soient M, N, P les points

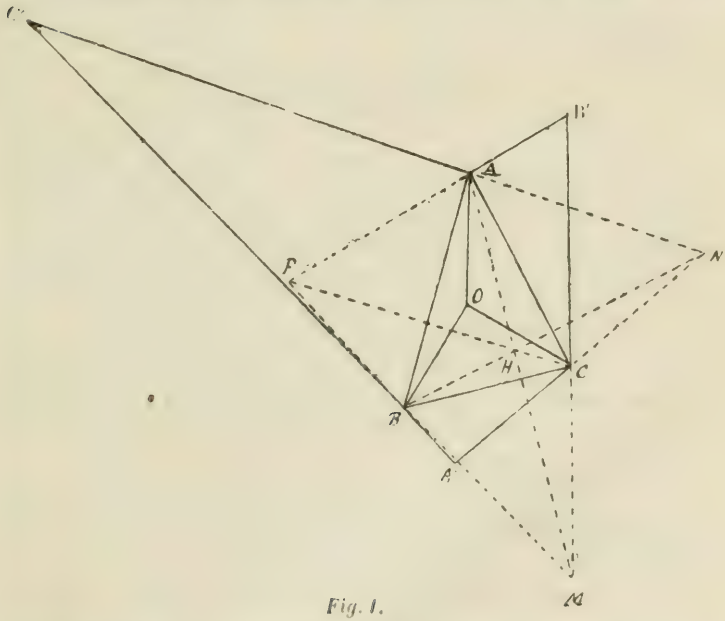


Fig. 1.

symétriques des sommets A, B, C d'un triangle, relativement aux côtés BC, CA, AB. Si l'on mène les droites PB, NC,

(*) Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 3e série, t. IV, nos 9, 10, 1882.

elles déterminent en général, avec BC, un triangle BCA′ (*), que l'on peut appeler *annexe* de ABC, suivant BC. De même, CAB′, ABC′ sont des annexes. Ces triangles jouissent de propriétés assez remarquables.

2. — *Angles des annexes.* — Soit Bx le prolongement de AB. D'après la construction,

$$A'Bx = PBA = CBA = B;$$

donc $$A'BC = 2^d - 2B.$$

De même, $$BCA' = 2^d - 2C.$$

Par conséquent, $$A' = 2^d - 2A. \qquad (**)$$

Ainsi, *les angles de l'annexe suivant* BC *sont les suppléments des doubles des angles de* ABC. Il en est de même pour les deux autres annexes. Conséquemment, *les trois annexes sont semblables* ; et, en outre :

$$A'BC = ABC' = B',$$
$$BCA' = ACB' = C',$$
$$BAC' = CAB' = A'.$$

3. — Remarque. — Soit O le centre du cercle inscrit au triangle ABC. L'angle *au centre*, BOC, est double de A. Donc BOC + A′ = 2^d : *le quadrilatère* BOCA′ *est inscriptible.* De même COAB′, AOCA′ sont des *quadrilatères inscriptibles* (***).

4. — *Hexagone des annexes.* — Dans l'hexagone

A′C B′A C′B A′,

les angles en A′, B′, C′ ont pour valeur, respectivement :

$$2^d - 2A,\ 2^d - 2B,\ 2^d - 2C.$$

L'angle en A égale

$$CAB' + A + BAC' = 2A' + A = 4^d - 3A.$$

Donc *l'angle extérieur* (****) B′AC′ *est le triple de* A. Semblablement : angle ext. B′CA = 3C,

angle ext. C′BA′ = 3B.

(*) Il est visible que, si l'angle A est droit, les lignes PB, NC sont parallèles entre elles. Cette conclusion résulte, d'ailleurs, des valeurs suivantes.

(**) Lorsque A = 1^d, A′ est nul, conformément à la remarque précédente.

(***) Nous reviendrons sur cette propriété.

(****) L'expression : *angle extérieur*, n'a pas, ici, la signification habituelle.

5. — Remarques. — I. La somme des angles *intérieurs*, en A, B, C, est $12^d - 3(A + B + C) = 6^d$;
donc *un au moins de ces trois angles surpasse deux droits.*

II. *L'hexagone est non convexe.*

III. *La somme des angles intérieurs, en* A', B', C', *égale deux droits.*

6. — Théorème. — *1° La droite* AA', *qui joint un sommet de* ABC *au sommet correspondant d'une annexe* BCA', *contient le centre* O *de la circonférence circonscrite au premier triangle et le centre* α *de la circonférence inscrite à l'annexe : 2° le second centre est situé sur la première circonférence.*

Soient Bf perpendiculaire à BA, Cg perpendiculaire à CA. D'après la *définition* (1), ces droites sont bissectrices des angles CBA', BAC'; dont elles se coupent au centre α du cercle inscrit à l'annexe.

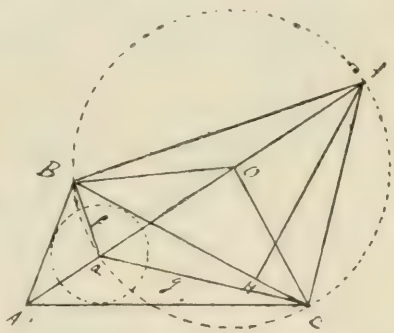


Fig. 2.

En second lieu, la circonférence décrite sur Aα, comme diamètre, contient les sommets B, C : elle est circonscrite au triangle ABC.

Menons la droite αA', laquelle est bissectrice de l'angle A'. Nous aurons

$$B\alpha A' = 2^d - \frac{1}{2}(A' + B) = A + B;$$

et, parce que BαA, BCA sont inscrits au même segment,

$$B\alpha A = BCA = C.$$

Donc $\quad B\alpha A' + B\alpha A = A + B + C = 2^d.$
A'αOA *est une ligne droite.*

7. — Corollaires. — I. *Si, dans le cercle* O, *la corde* BC *est fixe, et que le point* A *soit mobile, le lieu du point* A' *est un arc de la circonférence* BOC (3).

II. *Si, au contraire, le point* A *est fixe, et que la corde* BA *soit mobile, le lieu du point* A′ *est le prolongement du diamètre passant en* A (*).

8. — *Autre construction de l'annexe.* — Soit α le point diamétralement opposé à A, dans la circonférence circons-

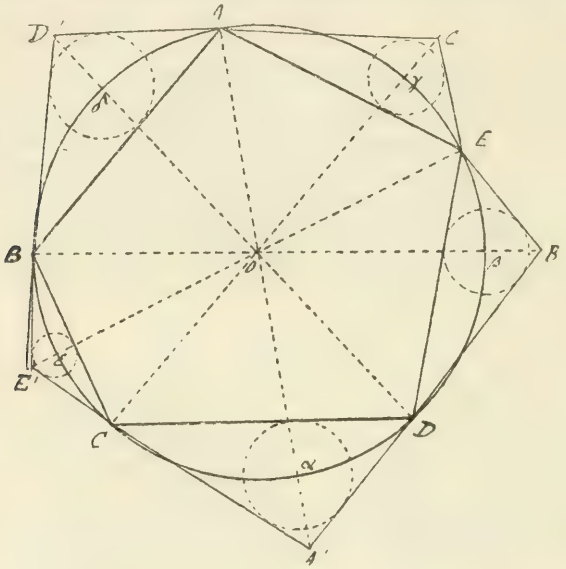


Fig 3.

crite au triangle ABC. De ce point, comme centre, décrivez la circonférence tangente au côté BC. Des extrémités de ce côté menez les tangentes BA′, CA′ : elles se coupent en un point A′, situé sur AOα ; et BA′. C'est l'annexe demandée.

9. — *Annexes d'un polygone inscrit, ayant un nombre impair de côtés.* — Soit, par exemple, le pentagone ABCDE, inscrit à la circonférence O. La construction indiquée ci-contre détermine les annexes DA′C, EB′D, ... ; puis le décagone AC′EB′D ..., dans lequel *les diagonales se coupent au centre du cercle donné* (*). (*A suivre.*)

(*) On verra, tout à l'heure, comment on doit prendre la *corde mobile* pour que le point A′ soit *fixe*.

QUESTION 32

Solution par E. Mosnat, à Thiers.

Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$(ab' - ba')x^2 + 2(ac' - ca')x + (bc' - cb') = 0$$

aient une racine commune est que l'une ou l'autre de ces équations ait ses racines égales. (Lauvernay.)

Si les deux équations

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

ont une racine commune, elle sera racine de l'équation obtenue en éliminant x^2 entre les deux équations précédentes, c'est-à-dire égale à $\dfrac{c\alpha - a\gamma}{a\beta - b\alpha}$.

Portons cette valeur de x dans la première équation ; nous aurons

$$a(c\alpha - a\gamma)^2 + b(c\alpha - a\gamma)(a\beta - b\alpha) + c(a\beta - b\alpha)^2 = 0 ;$$

telle est la condition pour que les deux équations aient une racine commune.

Développons et ordonnons par rapport à α, β, γ, et supprimons le facteur commun a, différent de zéro, il vient

$$c^2\alpha^2 + ac\beta^2 + a^2\gamma^2 + (b^2 - 2ac)\alpha\gamma - b\beta(c\alpha + a\gamma) = 0.$$

Dans le cas particulier considéré on a

$$c\alpha + a\gamma = \frac{b\beta}{2}$$

et par suite $$c^2\alpha^2 + a^2\gamma^2 = \frac{b^2\beta^2}{4} - 2ac\alpha\gamma.$$

Portons ces valeurs dans la condition donnée, on obtient après simplifications

$$\left(\frac{\beta^2}{4} - \alpha\gamma\right)(b^2 - 4ac) = 0,$$

si a est différent de zéro ; il faut donc que l'on ait

$$b^2 - 4ac = 0$$

ou $$\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0.$$

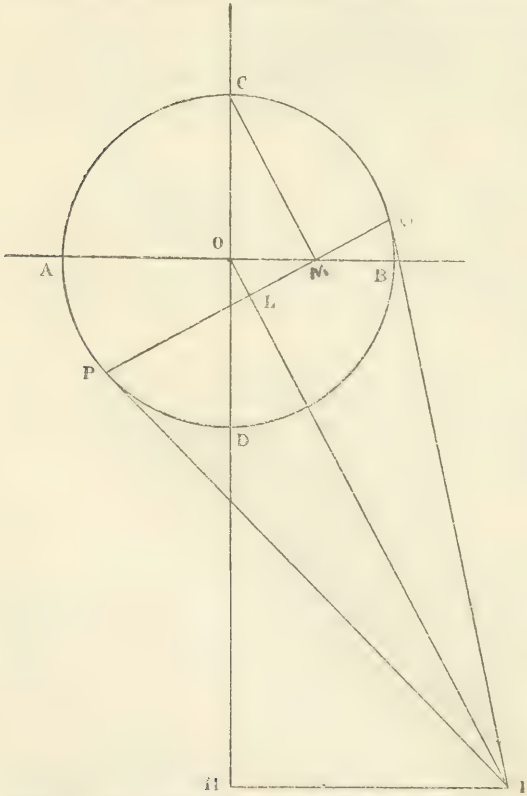
c'est-à-dire que l'une ou l'autre des équations ait ses racines égales.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Gino-Loria, à Mantoue ; Lachesnais, lycée Saint-Louis.

QUESTION 51

Solution par M. M. VAZOU.

On considère un cercle O et deux diamètres rectangulaires AB, CD; *on joint le point* C *à un point* M *pris arbitrairement sur* AB, *et en ce point* M *on élève à* CM *une perpendiculaire qui rencontre* O *aux points* P *et* Q; *si en ces points* P *et* Q *on mène les tangentes au cercle, ces droites se coupent en un point* I *dont on demande le lieu géométrique quand le point* M *se déplace sur* AB. (G. L.)



Menons OI qui rencontre PQ en L, et abaissons du point I la perpendiculaire IH sur CD.

On a $$OI = \frac{R^2}{OL}.$$

La similitude des triangles OCM et OML donne

$$OL = \frac{OM^2}{CM},$$

par suite on a $$OI = R^2 \times \frac{CM}{OM^2},$$

ce qui peut s'écrire $$\frac{OI}{CM} = \frac{R^2}{OM^2};$$

mais la similitude des triangles OCM, HOI donne

$$\frac{OI}{CM} = \frac{IH}{OM};$$

par suite $$IH = \frac{R^2}{OM}; \quad IH^2 = \frac{R^4}{OM^2}.$$

La similitude des mêmes triangles donne également

$$\frac{OH}{R} = \frac{OI}{CM} = \frac{R^2}{OM^2},$$

ce qui donne $$\frac{OH}{R} = \frac{IH}{OM},$$

ou $$\frac{IH}{OH} = \frac{OM}{R} = \frac{R}{IH}.$$

Donc $$IH^2 = R.\,OH,$$

ce qui montre que les points I appartiennent à une parabole ayant pour sommet O et pour paramètre $\frac{R}{2}$.

NOTA. — La même question a été résolue par M. Deville, à Lorient.

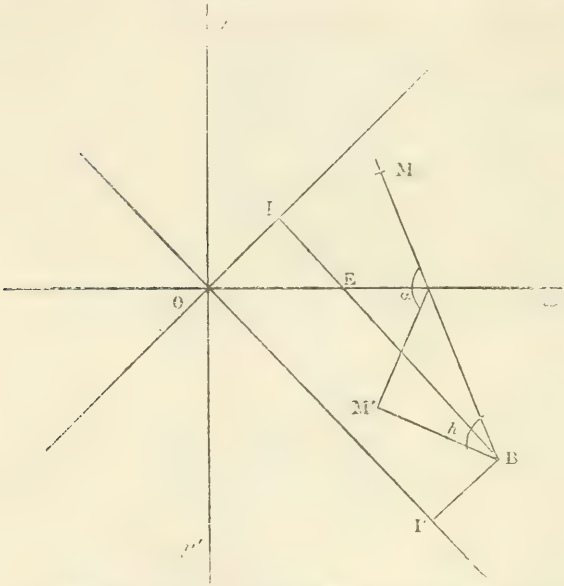
QUESTION 55

Solution par M. CH. MASCART, élève au Lycée Henri IV.

On considère deux droites rectangulaires Ox, Oy, *et dans un plan une courbe* φ *quelconque, mais symétrique par rapport à* Ox. *Soit* M *un point de la courbe; on mène la normale en* M *à* φ; *puis ayant pris le point* M', *symétrique de* M *par rapport à* Ox, *point qui est sur* φ, *par hypothèse, on mène la tangente à* φ

au point M′ : *cette tangente et la normale en* M *donnent deux droites. On considère les bissectrices de leur angle et, du point* O, *on abaisse des perpendiculaires sur ces bissectrices. Lieu des pieds de ces perpendiculaires.*

Appelons α l'angle MAM′ des normales à φ en M et M′ ;



h l'angle MBM′ de la normale en M et de la tangente en M′; BE, BE′ les bissectrices de cet angle et I, I′, les projections du point O sur ces bissectrices.

Nous avons

$$h = 1 \text{ dr.} - \text{BAM}' = \alpha - 1 \text{ dr.}$$

$$\text{AEB} = 2 \text{ dr.} - \left(\frac{h}{2} + \text{EAB}\right) = \frac{1}{2} \text{ dr.}$$

$$\text{XOI} = 1 \text{ dr.} - \text{IEO} = \frac{1}{2} \text{ dr.}$$

On à de même $\qquad \text{XOI}' = \frac{1}{2} \text{ dr.}$

Le lieu cherché se compose donc de deux droites situées dans le plan de φ, se coupant en O sur l'axe Ox et inclinées à 45° sur cet axe.

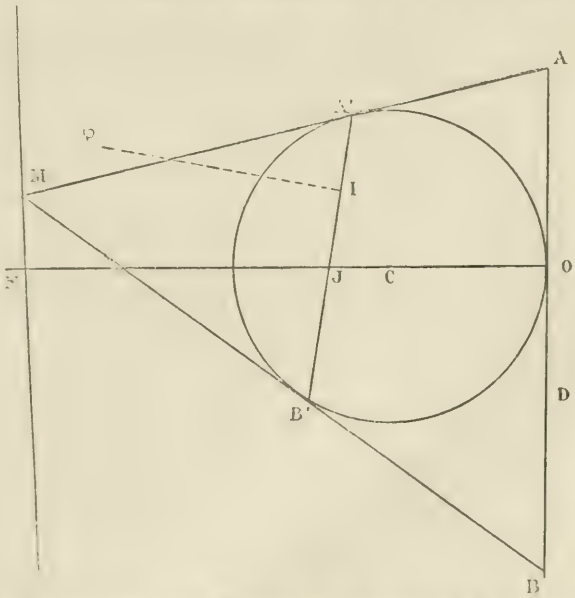
Le plan de φ pouvant occuper toutes les positions possibles autour de Ox, l'ensemble de toutes les positions de la courbe sera une surface de révolution d'axe Ox, et le lieu sera un cône à deux nappes d'axe Ox, de sommet O, et d'angle au sommet égal à 45°.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Deville, à Lorient; Julien Sauve à Moulins; Lenoir, Louvet et de Berthes, collège Stanislas; H., S. lycée de Toulouse.

QUESTION 57

Solution par M. JACOB, lieutenant d'artillerie de marine, à Lorient.

On considère un cercle C *et une droite* D *tangente à* C *au point* O; *sur* D *on prend deux points* A *et* B *tels que* OA.OB



$= K^2$; K *étant une ligne donnée par ces points* A *et* B, *on mène à* C *des tangentes; soient* A' *et* B' *les points de contact. D'un point fixe* P *pris dans l'espace on abaisse sur* A'B' *une perpendiculaire* PI. *Trouver le lieu décrit par le point* I.

Du point P de l'espace abaissons une perpendiculaire Pφ sur le plan du cercle, la droite φI sera perpendiculaire à A'B' et la question revient à trouver le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du point φ sur A'B'.

Soit M le point d'intersection de AA' et de BB', je dis que le lieu du point M est une parallèle à la tangente AB. Pour le prouver abaissons MB perpendiculaire à AO, évaluons de deux manières l'aire du triangle MAB. On a

$$MP\,(OA + OB) = 2r\,(OA + OB + MA'),$$

r désignant le rayon du cercle donné.

Or le rayon r est donné en fonction des côtés par la formule

$$pr^2 = (p - a)\,(p - b)\,(p - c),$$

ou ici

$$(OA + OB + MA')\,r^2 = OA.OB.MA':$$

tirons de là la valeur de MA' :

$$MA' = \frac{(OA + OB)\,r^2}{OA.OB - r^2} = \frac{(OA + OB)\,r^2}{K^2 - r^2}.$$

donc

$$MP = \frac{2r\left(OA + OB + \dfrac{(OA + OB)\,r^2}{K^2 - r^2}\right)}{OA + OB}.$$

$$MP = \frac{2K^2 r}{K^2 - r^2}.$$

MP est donc constant et par suite le lieu du point M est une parallèle à AB. Il suit de là que la corde des contacts A'B' passe par le pôle de cette droite Δ et la distance de ce point au point O s'obtient aisément.

Soit J ce point, on a

$$CJ.CN = r^2,$$

$$CN = \frac{2K^2 r}{K^2 - r^2} - r.$$

$$CN = \frac{(K^2 + r^2)\,r}{K^2 - r^2},$$

$$CJ = \frac{r\,(K^2 - r^2)}{K^2 + r^2}:$$

la droite A'B' passant par le point fixe J, le lieu I est le cercle décrit sur φJ comme diamètre.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Santol, à Toulouse; Julien Sauve, à Moulins.

BIBLIOGRAPHIE

TRAITÉ D'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE, par M. **J. Collin**, ancien élève de l'École polytechnique. Paris, librairie Gauthier-Villars.

L'algèbre de M. Collin est faite à un point de vue absolument pratique, et cette qualité la rend particulièrement recommandable pour les élèves qui, devant préparer des examens élémentaires, ont à se préoccuper du calcul algébrique.

Le calcul proprement dit prend place maintenant même dans les compositions du baccalauréat ès sciences; cette année encore, dans plusieurs facultés on a donné des expressions à simplifier ou des systèmes d'équations littérales à résoudre. Et cependant combien sont peu nombreux les élèves qui savent calculer! Cela tient à ce que tous les petits détails et artifices qui constituent réellement le calcul ne s'enseignent qu'oralement et ne sont indiqués explicitement dans aucune Algèbre imprimée jusqu'ici. M. Collin a voulu combler cette lacune, il a pris ces petits détails un à un, au fur et à mesure qu'ils se présentent dans l'exposition générale de la théorie, les explique, les développe et après chacun d'eux traite quelques exemples et propose des exercices; de cette manière il familiarise l'élève avec le calcul algébrique.

Pour les maxima et les minima, l'auteur commence par énoncer explicitement plusieurs axiomes; puis il résout dix types généraux des problèmes et fait suivre chacun d'eux de quelques exemples.

Les candidats au baccalauréat trouveront aussi dans ce livre tous les problèmes importants sur l'équation générale du second degré, tels que la somme des puissances semblables des racines, la condition pour que deux équations aient des racines communes, etc.

Quant aux élèves qui se préparent à Saint-Cyr, ou à l'École forestière, les chapitres sur les radicaux, les inégalités, les indéterminations apparentes leur seront fort utiles. Pour l'étude de la variation des fonctions, l'auteur emploie la méthode directe qui évite tout tâtonnement, et fait, en outre, sur la fraction du second degré plusieurs remarques importantes, et bien propres à guider les élèves; nous signalerons ce qu'il appelle les courbes élémentaires de la fraction.

Enfin, pour résumer ce que nous pensons de ce livre, nous dirons que, avec ses 150 exemples résolus, et ses 400 exercices proposés, il constitue un excellent guide pour les élèves sérieux, qui veulent arriver aux examens avec une préparation complète pour l'algèbre, cette partie importante dans les compositions écrites.

A. M.

QUESTIONS PROPOSÉES

72. — Résoudre le système

$$xy\,(x+y) = ab\,(a+b)$$

$$(x-y)\,(x+2y)\,(2x+y) = (a-b)\,(a+2b)\,(2a+b).$$

(*E. Lucas*)

73. — On considère une parabole P, de foyer F et de directrice Δ. Démontrer que les tangentes communes à P et au cercle décrit de F comme centre avec le paramètre pour rayon : 1° se coupent sur l'axe en un point symétrique de F par rapport à Δ; 2° que l'angle de ces tangentes est de 60°. *(G. L.)*

74. — On donne une droite Δ, et trois points A, B, C, en ligne droite; soit M un point quelconque de Δ: par le point B, on mène une droite qui rencontre MA au point I, et MC au point I'; on suppose d'ailleurs que BI = BI'. Trouver le lieu du point I et celui du point I'. *(G. L.)*

75. — On donne un quadrilatère inscriptible ABCD dont les diagonales se rencontrent en M. Du point M on abaisse des perpendiculaires sur les quatre côtés du quadrilatère. Les pieds de ces perpendiculaires forment un nouveau quadrilatère αβγδ; on propose de démontrer que ce quadrilatère est circonscriptible. *(I. H. S.)*

76. — On propose de résoudre les deux équations

$$\frac{x\,[x^2+y^2-d\,(x+y)]}{(y+x-d)\,(x^2+y^2)}=\frac{a}{d};$$

$$y\,\frac{x^2+y^2-d\,(x+y)}{(y+x-d)\,(x^2+y^2)}=\frac{b}{d};$$

on vérifiera que les formules demandées s'obtiennent par la simple permutation des lettres a et x d'une part; b et y de l'autre. *(G. L.)*

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 26410-3.

LA GÉOMÉTRIE RÉCURRENTE

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir pages 3 et 25.)

DEUXIÈME APPLICATION

Étude de géométrie récurrente sur la droite de Simson.

16. — On sait que *si d'un point* M *pris sur une circonférence* O *on abaisse des perpendiculaires sur les côtés d'un triangle, triangle dont les sommets* 1, 2, 3 *sont situés sur* O, *les pieds de ces perpendiculaires sont situés sur une droite* Δ_{123}.

Ce théorème est dû à Simson. Nous appellerons *droite de Simson* cette droite Δ_{123}, et pour rappeler qu'elle est obtenue au moyen de trois points pris sur la circonférence (abstraction faite du point M), nous dirons qu'elle est d'ordre trois et qu'elle correspond au point M. Enfin pour mieux distinguer ce point M, nous le nommerons *point fondamental*.

Prenons maintenant quatre points 1, 2, 3, 4 sur la circonférence O. Si nous faisons successivement abstraction de l'un de ces points, nous obtiendrons quatre triangles : à chacun d'eux, et au point M, correspond une droite de Simson d'ordre trois, ces quatre droites sont liées les unes aux autres par des propriétés que nous allons établir.

17. — Théorème. — *Le triangle formé par trois quelconques des droites de Simson d'ordre trois*

$$\Delta_{123} \quad \Delta_{234} \quad \Delta_{341} \quad \Delta_{412}\,;$$

droites qui correspondent aux quatre points 1,2,3,4 *de la circonférence* O, *est semblable au triangle que l'on obtient en supprimant aux trois indices considérés le numéro qui leur est commun.*

Considérons en effet la droite de Simson Δ_{123}, qui correspond au point M. Les angles marqués α et β sur la figure sont égaux, puisque le quadrilatère $3.M.H_{13}.H_{23}$ est inscriptible. D'autre part l'angle β est complémentaire de l'angle $M.3.H_{23}$,

angle qui est égal à M.1.2 *(fig. 1)*. Cette remarque conduit d'abord à la propriété suivante : *une droite de Simson d'ordre trois* Δ_{123} *est inclinée sur l'un des côtés du triangle, sur le côté* 1.3, *par exemple, d'un angle aigu qui est égal au complément de celui sous lequel la corde* 2.M *est vue d'un point quelconque de la circonférence* O.

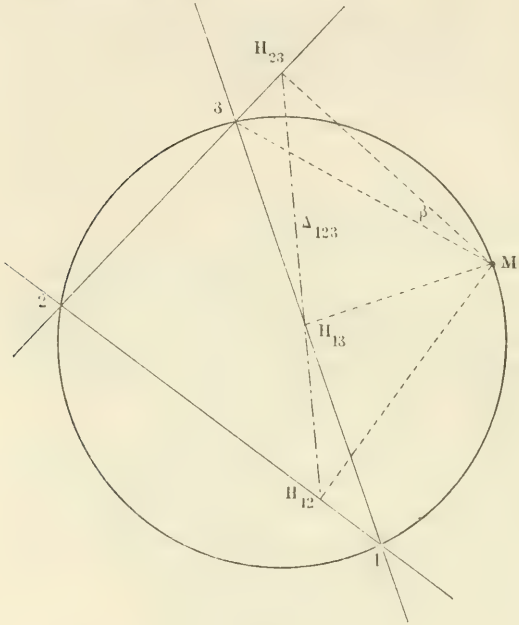


Fig. 1.

Considérons maintenant quatre points 1, 2, 3, 4; sur la circonférence O, et les deux droites Δ_{123}, Δ_{124} qui correspondent au point M et aux deux triangles 123, 124. Ces deux droites, conformément à leur définition même, ont pour point commun H_{12}, projection du point M sur le côté 1.2. Ces droites Δ_{123}, Δ_{124} sont, d'après la remarque que nous venons de faire, inclinées sur le côté 1.2 d'angles qui sont respectivement égaux à ceux sous lesquels on voit les cordes 3.M et 4.M d'un point quelconque de O. On conclut de là que le système des deux droites Δ_{123} Δ_{124} est superposable au faisceau des deux droites 3.M et 4.M *(fig. 2)*.

On peut, d'après cela, énoncer cette seconde propriété : *Si l'on considère quatre points* 1, 2, 3, 4 *sur une circonférence* O *et deux droites* Δ, *de Simson d'ordre trois, correspondant à ces points, ces deux droites forment un faisceau qui est superposable à celui des droites qui joignent le point fondamental* M

aux deux points dont les indices ne sont pas communs aux deux droites Δ considérées.

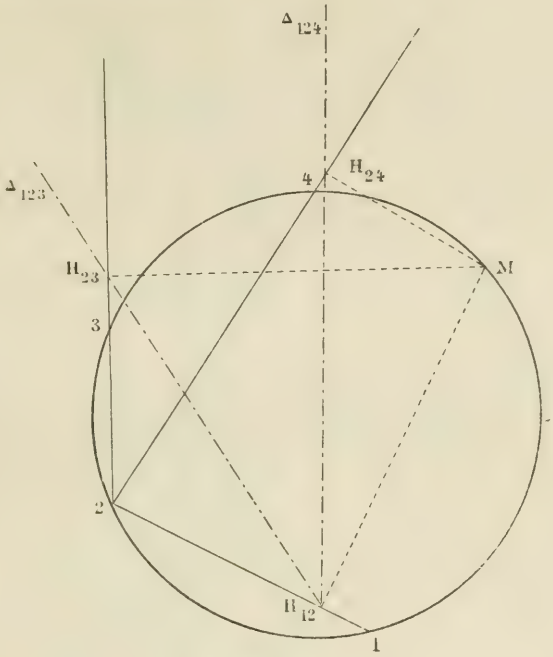
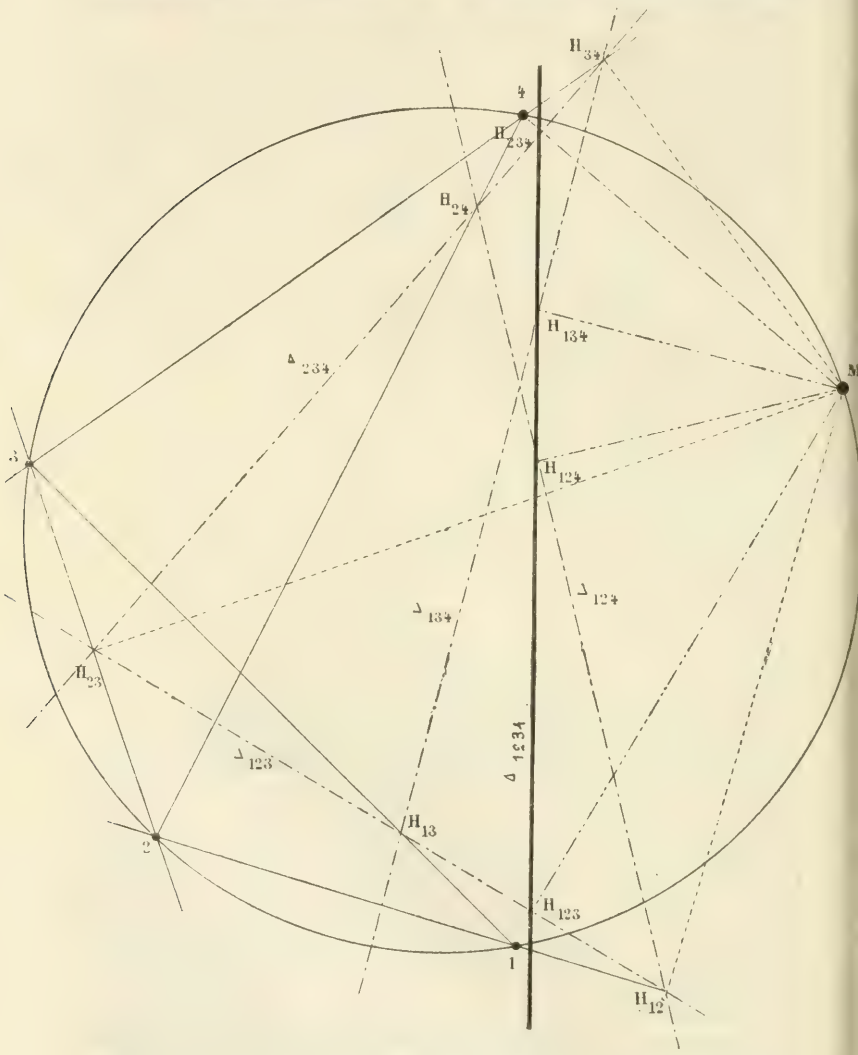


Fig. 2.

Considérons maintenant trois droites de Simson d'ordre trois : Δ_{123} Δ_{124} Δ_{134} ; elles forment un triangle dont les angles sont égaux à ceux qu'on obtient en joignant le point M aux points 2, 3 et 4 ou sont supplémentaires de ceux-ci. On peut donc dire que les angles du triangle Δ_{123} Δ_{124} Δ_{134} sont deux à deux égaux à ceux du triangle 234, ou sont supplémentaires de ces angles. Mais on sait que deux triangles dont les angles sont égaux ou supplémentaires ont nécessairement les angles égaux et, par suite, sont semblables. Nous pouvons donc conclure que les deux triangles Δ_{123} Δ_{124} Δ_{134} et 2. 3. 4 sont semblables. Le théorème énoncé se trouve donc démontré, et il conduit immédiatement à la droite de Simson d'ordre quatre, droite définie comme nous allons le dire.

18. — Théorème. — *Si du point fondamental* M *on abaisse des perpendiculaires sur les quatre droites de Simson*



d'ordre trois qui correspondent aux points 1, 2, 3, 4, *les quatre points ainsi obtenus sont situés sur une droite : nous nommerons*

cette droite droite de Simson d'ordre quatre, et nous la désignerons par Δ_{1234}.

Considérons en effet les trois points

$$H_{12},\quad H_{13},\quad H_{14},$$

projections respectives du point fondamental sur les cordes 1.2, 1.3, 1.4. Le triangle formé par ces trois points est, justement, celui des droites que nous désignerons par

$$\Delta_{124},\ \Delta_{134},\ \Delta_{134}.$$

D'après ce que nous venons de voir, ce triangle est semblable au triangle 2 3 4 : on a donc en particulier

$$\Delta_{124}\Delta_{134}\Delta_{124} = 3.1.4 \qquad (1)$$

D'ailleurs les droites MH_{13}, MH_{14} sont perpendiculaires respectivement sur les droites 1.3 et 1.4 : on a donc (*fig.* 5)

$$H_{13}MH_{14} = 3.1.4. \qquad (2)$$

En comparant (1) et (2), on voit que le quadrilatère M H_{12} H_{13} H_{14} est inscriptible ; propriété qui est d'ailleurs évidente, ces quatre points appartenant au cercle décrit sur la droite 1.M comme diamètre.

Cette remarque étant faite, si l'on applique le théorème de Simson au point M et au triangle H_{12} H_{13} H_{14}, on obtient, en projetant ce point M sur les côtés de ce triangle, trois points H_{123} H_{124} H_{134} qui sont situés en ligne droite. Du moment que parmi les quatre points H_{123} H_{124} H_{134} H_{234} trois sont en ligne droite, il est évident que ces quatre points sont situés sur une même droite. Nous convenons de dire que cette droite est une droite de Simson d'ordre quatre et nous la désignerons par Δ_{1234}.

19. — Pour poursuivre l'étude de ces droites de Simson, il faudrait, du moins en obéissant aux idées générales que nous avons précédemment exposées, chercher la loi géométrique qui lie la droite de Simson d'ordre quatre avec les droites de Simson d'ordre trois. On reconnaît ainsi, et sans difficulté, que *la droite* Δ_{1234} *fait avec* Δ_{123} *un angle égal au complément de l'angle inscrit à la circonférence* O *et dont l'un des côtés passe par le point* M, *tandis que l'autre passe par le point* 4.

Mais il se présente, dans cette question, une condition

particulière qui permet de reconnaître immédiatement le théorème général.

Prenons sur la circonférence O, cinq points 1, 2, 3, 4, 5; et considérons trois droites de Simson d'ordre 4,

$$\Delta_{1234},\quad \Delta_{1245},\quad \Delta_{1235}.$$

Ces droites peuvent être obtenues de la façon suivante. Imaginons le point H_{12} et les trois droites de Simson d'ordre trois qui partent de ce point

$$\Delta_{123},\quad \Delta_{124},\quad \Delta_{125}.$$

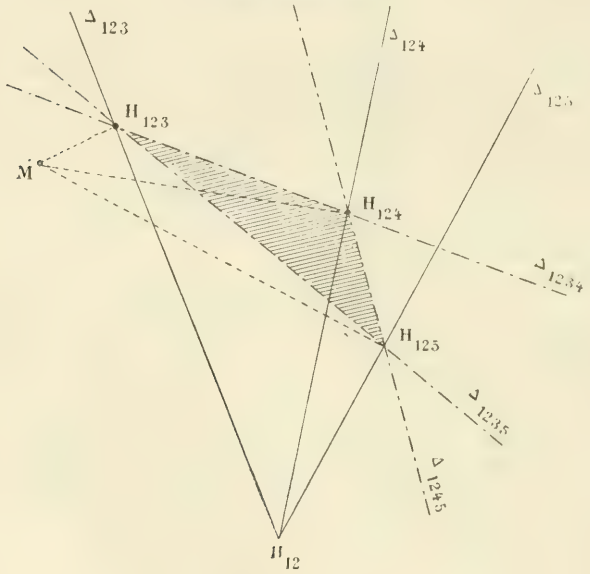


Fig. 3.

Si nous projetons le point M sur ces droites, on obtient les points H_{123} H_{124} H_{125}
et la droite H_{123} H_{124}, par exemple, n'est autre chose, d'après ce que nous avons dit au paragraphe précédent, que la droite de Simson d'ordre quatre Δ_{1234}. Ainsi le triangle H_{123} H_{124} H_{125} est justement le triangle des droites Δ_{1234} Δ_{1245} Δ_{1235}.

Ceci posé, le cercle décrit sur $H_{12}M$, comme diamètre, passe évidemment par les points H_{123} H_{124} H_{125}; le théorème de

Simson prouve donc que les pieds H_{1234} H_{1245} H_{1235} des perpendiculaires abaissées du point M sur les côtés de ce triangle sont trois points en ligne droite.

Aux cinq points considérés 1, 2, 3, 4, 5 correspondent cinq droites de Simson d'ordre quatre, et nous venons de reconnaître que si l'on projette le point M sur trois de ces droites, on obtenait trois points en ligne droite. De là il résulte nécessairement que les cinq points sont en ligne droite. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Étant donnés cinq points* 1,2,3,4,5 *sur une circonférence* O *on considère les cinq droites* Δ *de Simson d'ordre quatre, droites précédemment définies et qui correspondent à un certain point* M *de* O ; *les projections du point* M *sur les droites* Δ *sont cinq points situés en ligne droite. Cette droite désignée par la notation* Δ_{12345} *est dite droite de Simson d'ordre cinq.*

20. — On voit maintenant comment on peut établir par un procédé calqué, pour ainsi dire, sur la démonstration précédente, le théorème général relatif aux droites de Simson.

Nous admettons la conception et les propriétés des droites de Simson d'ordre inférieur à n et nous voulons démontrer l'existence de la droite de Simson d'ordre n. A cet effet, nous imaginerons le point $H_{1.2\ldots(n-3)}$ et les droites de Simson d'ordre $(n-2)$.

$$\Delta_{1.2\ldots(n-3)(n-2)} \quad \Delta_{12\ldots(n-3)(n-1)} \quad \Delta_{12\ldots(n-3)n}$$

droites qui, nécessairement, et d'après leur définition même, passent par ce point. Du point fondamental M on abaisse des perpendiculaires sur ces droites et en obtient trois points

$$H_{12\ldots n-3\ n-2}, \quad H_{12\ldots n-3\ n-1}, \quad H_{12\ldots n-3\ n}$$

qui, joints deux à deux, donnent trois droites de Simson d'ordre $(n-1)$

$$\Delta_{12\ldots(n-3)\ n-2\ n-1}, \quad \Delta_{12\ldots(n-2)\ n3-n}, \quad \Delta_{12\ldots(n-3)(n-1)n}.$$

Si maintenant on remarque que le cercle décrit sur la droite $MH_{12\ldots(n-3)}$ comme diamètre est circonscrit au triangle formé par ces trois droites, on voit que les projections du point fondamental sur *trois* droites de Simson d'ordre $(n-1)$ sont en ligne droite. Mais alors les n projections

sont en ligne droite et nous résumerons ces propriétés sur la droite de Simson dans l'énoncé suivant :

Théorème général. — *Étant donnés* n *points sur une circonférence, si l'on fait successivement abstraction de l'un d'entre eux, on obtient* (n — 1) *points auxquels correspond une droite de Simson d'ordre* (n — 1) ; *droite définie précédemment, correspondant à un point* M *de la circonférence* O. *Si du point* M *on abaisse des perpendiculaires sur ces* n *droites, les* n *points ainsi obtenus sont situés sur une droite. Cette droite désignée par la notation* $\Delta_{12\ldots n}$ *est dite droite de Simson d'ordre* n.

21. — C'est cette propriété que nous visions plus particulièrement dans cette étude et, dans le but d'abréger la démonstration, nous avons, à un certain moment, comme on a pu le remarquer, abandonné l'étude des positions respectives des droites de Simson des différents ordres. Mais si l'on avait voulu poursuivre, par la méthode normale, l'étude des droites de Simson, on aurait facilement démontré la propriété suivante :

Théorème. — *Le triangle formé par trois droites de Simson d'ordre* (n — 1) *est semblable au triangle dont les numéros s'obtiennent en supprimant, aux indices considérés, les numéros qui leur sont communs;*

Et aussi celle-ci :

Théorème. — *La droite de Simson d'ordre* n, Δ_α, *fait avec une droite de Simson d'ordre* (n — 1), Δ_β *un angle égal au complément de l'angle inscrit à la circonférence donnée, angle dont les côtés passent : l'un par le point fondamental* M, *l'autre par le point dont le numéro n'est pas commun aux indices* α *et* β.

(A suivre.)

QUELQUES THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

Par M. **E. Catalan.**

(*Suite*, voir page 37.)

10. — *Circonférence des neuf points* (fig. 4). — Supposons que A, B, C soient les milieux des côtés d'un triangle FGH. La circonférence O devient *la circonférence des neuf points* (milieux des côtés, pieds des hauteurs, milieux des segments compris entre les sommets et le point de concours des hauteurs), relative à ce triangle. D'après le théorème (6), *cette circonférence contient les centres* α, β, γ *des cercles inscrits aux annexes de* ABC; *et ces centres sont diamétralement opposés à* A, B, C. (*)

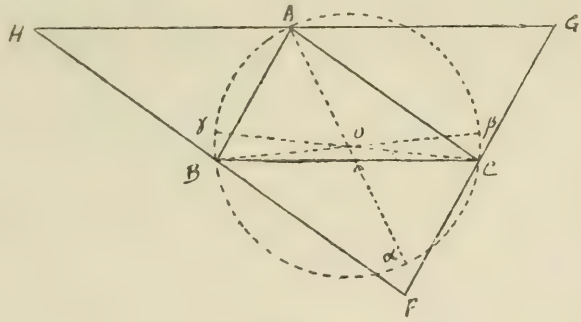


Fig. 4.

Voilà donc *trois* points ajoutés aux *neuf* (**) que l'on connaissait (***).

11. — *Cercles ex-inscrits aux annexes* (fig. 5). — A'A est la bissectrice de l'angle A' (6). Le côté BA, perpendiculaire à

(*) En outre, *les quadrilatères* AC'EO, EB'DO, DA'CO, CE'BO, BD'AO *sont inscriptibles.*

(**) Ou plutôt aux *quinze*. (*Théorèmes et problèmes de Géométrie élémentaire*, 6me édit., p. 177.)

(***) Je fais abstraction, bien entendu, des points remarquables, *en nombre indéfini*, où la circonférence O touche certains cercles. *Loc. Cit.*, p. 181.

la bissectrice $B\alpha$ de $A'BC$, est bissecteur de l'angle *extérieur* $A'Bx$. Pour la même raison, CA est la bissectrice de $A'Cy$.

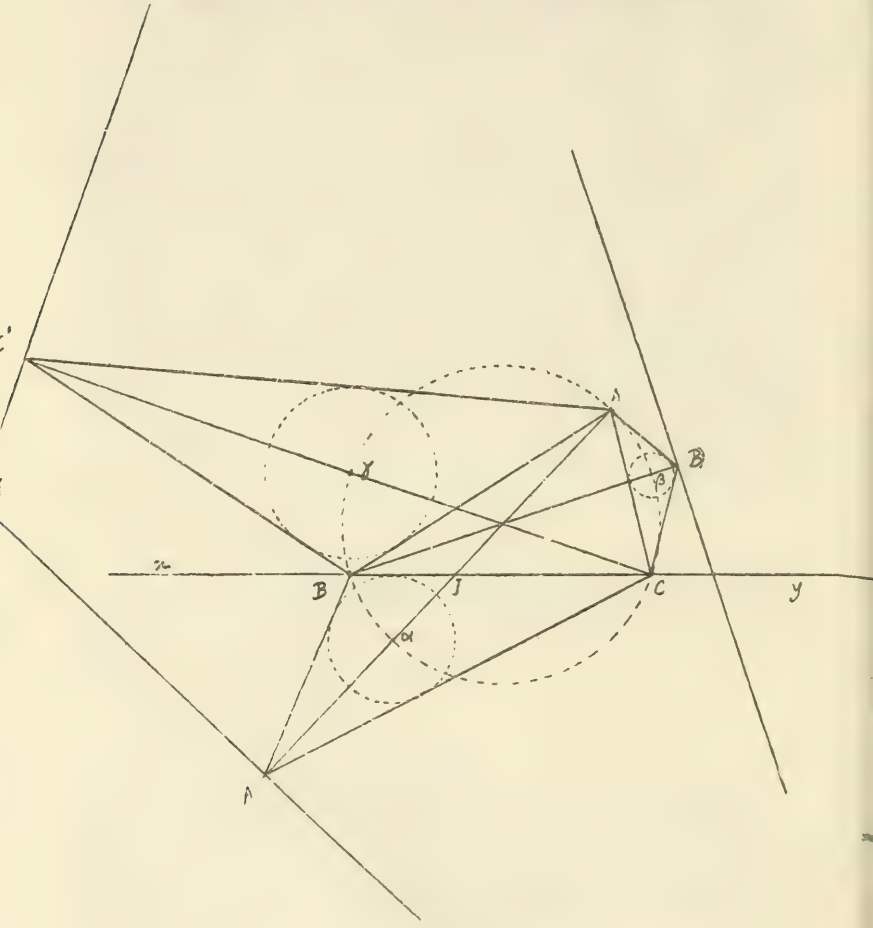


Fig. 5.

Donc A *est le centre du cercle ex-inscrit à l'annexe* BCA', *tangent au côté* BC. *Le rayon de ce cercle est la hauteur* AH.

Considérons les deux autres cercles ex-inscrits à BCA'. Le centre de l'un est l'intersection de AB avec la droite YZ, menée par A', perpendiculairement à A'A; le centre de

l'autre est l'intersection de cette même droite YZ avec AC. Par conséquent :

Les centres des cercles ex-inscrits aux trois annexes sont :

1° *Les sommets du triangle* ABC;

2° *Les intersections des côtés de ce triangle avec les droites* YZ, ZX, ZY, *menées par* A', B', C', *perpendiculairement à* A'A, B'B, C'C.

12. — Remarque. — Ces droites sont parallèles aux tangentes, en A, B, C, au cercle O.

13. — Lemme (fig. 6). — *Soit* ABC *un triangle isoscèle, inscrit à un cercle* O. *Si l'on trace la corde* AD, *coupant en* E *la base du triangle, on a*

$$AD.AE = \overline{AB}^2.$$

Menons le diamètre AOG et la corde GD. Le quadrilatère DEHG, qui a deux angles opposés droits, est inscriptible(*). Donc

$$AD.AE = AG.AH.$$

D'après un théorème connu, le second membre égale $AB.AC = \overline{AB}^2$; donc la proposition est démontrée.

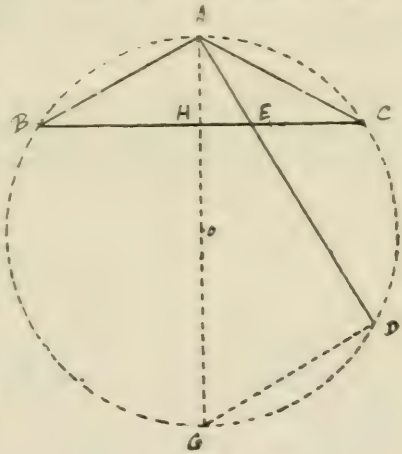


Fig. 6

14. — *Relation métrique.* — Le lemme précédent, appliqué à la figure 5, donne

$$OA' = \frac{OB.OC}{OI} = \frac{R^2}{OI},$$

puis

$$AA' = R\frac{AI}{OI},$$

ou

$$\frac{R}{AA'} = \frac{OI}{AI}.$$

(*) Autrement dit, les triangles ABG, AHE sont semblables.

De même $\frac{R}{BB'} = \frac{OK}{BK'}$, $\frac{R}{CC'} = \frac{OL}{CL}$.

Par conséquent

$$\frac{R}{AA'} + \frac{R}{BB'} + \frac{R}{CC'} = \frac{OI}{AI} + \frac{OK}{BK} + \frac{OL}{CC}.$$

Mais il est connu (et évident) que la somme des trois derniers rapports se réduit à l'unité (*). Donc enfin

$$\frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'} = \frac{1}{R}:$$

relation semblable à celle qui existe entre les rayons des cercles tangents aux trois côtés d'un triangle (**). Par suite, on peut *construire un triangle dans lequel ces quatre rayons soient égaux à* R, AA', BB', CC' (***).

15. — Théorème. — *Si un triangle inscrit* ABC (fig. 5) *a un sommet fixe* A, *et que le côté* BC *passe par un point fixe* I, *appartenant au diamètre* Ax, *le sommet* A' *de l'annexe est invariable.*

En effet, on vient de voir que

$$OA' = \frac{R^2}{OI}.$$

16. —Remarques. — I. La réciproque est vraie : *Si le sommet* A' *est fixe, toutes les cordes* BC *passent par un point fixe, situé sur* AA'.

II. La propriété qui vient d'être démontrée complète l'une de celles qui l'ont été ci-dessus (7, 11).

III. Les points I, A' sont réciproques (****). Donc *la polaire du point* I *est la droite* YZ (II). De même ZX et XY sont les polaires des points L, K.

17. — *Hexagone de Brianchon* (fig. 7). — Les diagonales

(*) De là résulte que, *dans tout triangle rectiligne,*

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C.$$

Cette proposition, également connue, est facile à vérifier directement.

(**) *Théorèmes et Problèmes...*, p. 198.

(***) *Id.*, p. 116.

(****) *Éléments de Géométrie*, p. 114.

de l'hexagone A'CB'AC'B se coupent au point O. Donc *cet hexagone est circonscrit à une conique.*

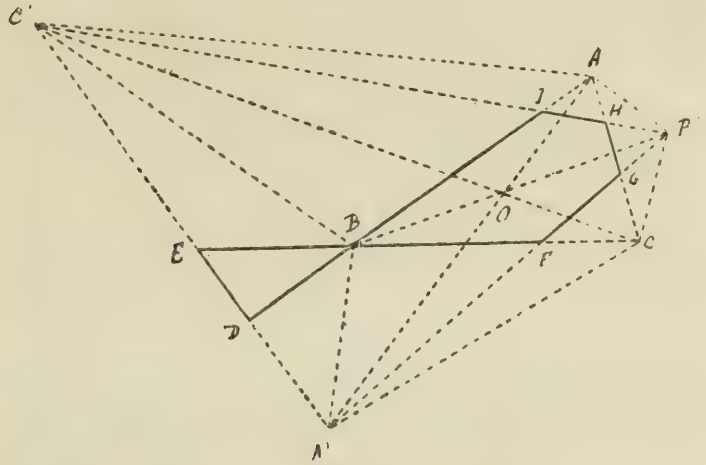


Fig. 7.

18. — *Hexagone de Pascal.* — En 1848, nous avons fait connaître un théorème que l'on peut énoncer ainsi :

Les jonctions successives des sommets alternants d'un hexagone de Brianchon, sont les côtés d'un hexagone de Pascal (*).

On vient de voir que C'BA'CB'A est un hexagone de Brianchon. Donc les droites C'A', BC, A'B', CA, B'C', AB sont les côtés successifs d'un hexagone de Pascal. *Cet hexagone est* DEFGHI. Autrement dit, *les points* D, E, F, G, H, I *sont situés sur une conique.*

19. — *Circonférence des neuf points.* — Supposons, comme précédemment (10), que A, B, C soient les milieux des côtés d'un triangle T (**). Soit O la circonférence des neuf points relative à T, et soient ABC', BCA', CAB' les annexes de ABC. Les dernières remarques donnent lieu à la proposition suivante :

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1852, p. 173 ; *Bulletins de l'Académie*, déc. 1878 ; etc.

(**) Non représenté sur la figure.

1° *L'hexagone* AC'BA'CB *est circonscrit à une conique :*

2° *L'hexagone* DEFGHI, *formé par les intersections successives des droites* AB, C'A', BC, A'B', CA, B'C', AB, *est inscrit à une conique.*

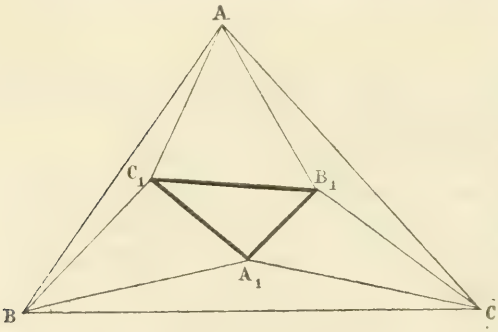
19. — Remarque. — Si, comme au n° 9, on remplaçait le triangle ABC par un polygone convenablement choisi, on pourrait généraliser les dernières propriétés. Mais en voilà assez sur ce sujet.

ÉTUDE SUR LE CERCLE DE BROCARD

Par M. **A. Morel.**

(*Suite*, voir pages 10 et 33.)

8. — Si, sur les côtés AB, BC, CA, d'un triangle ABC, on construit des triangles isoscèles semblables ABC_1, CBA_1, CAB_1, les trois points A_1, B_1, C_1, sont les sommets d'un nouveau triangle. Nous allons chercher quelle est la valeur qu'il faut donner à l'angle φ à la base des triangles isoscèles pour que le triangle $A_1B_1C_1$ soit semblable au triangle ABC.



Appelons φ la valeur commune des angles à la base des triangles isoscèles AB_1C, BC_1A, CA_1B ; nous avons évidemment dans le triangle AC_1B_1 :

$$C_1B_1^2 = AC_1^2 + AB_1^2 - 2AC_1AB_1 \cos(A - 2\varphi);$$

nous obtiendrons des valeurs analogues pour les deux autres côtés ; puis, en remplaçant AC_1, AB_1 par leurs valeurs en fonction des côtés du triangle primitif et de l'angle φ, nous aurons

$$C_1B_1^2 = \frac{b^2 + c^2 - 2bc \cos(A - 2\varphi)}{4\cos^2\varphi}.$$

Cela posé, nous allons chercher si nous pouvons déterminer l'angle φ de façon que le triangle $A_1B_1C_1$ soit semblable au triangle ABC, les sommets homologues étant A et A_1, B et B_1, C et C_1. On devra donc avoir, en remplaçant chacun des côtés du triangle donné par sa valeur en fonction des autres côtés :

$$\frac{b^2 + c^2 - 2bc \cos (A - 2\varphi)}{b^2 + c^2 - 2bc \cos A} = \frac{c^2 + a^2 - 2ca \cos (B - 2\varphi)}{c^2 + a^2 - 2ca \cos B}$$
$$= \frac{a^2 + b^2 - 2ab \cos (C - 2\varphi)}{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}.$$

Sous cette forme, on voit immédiatement une première solution évidente, qui est $\varphi = 0$: nous allons retrouver cette solution dans le calcul même.

En comparant les deux premiers rapports, on trouve facilement, après des transformations très simples, l'équation

$$b(c^2 + a^2) \sin (A - \varphi) \sin \varphi - a (b^2 + c^2) \sin (B - \varphi) \sin \varphi$$
$$- abc \sin (A - B) \sin 2\varphi = 0,$$

ou

$$\sin \varphi \, [b(c^2 + a^2) \sin (A - \varphi) - a (b^2 + c^2) \sin (B - \varphi)$$
$$- 2abc \sin (A - B) \cos \varphi] = 0,$$

ce qui donne d'abord la solution

$$\sin \varphi = 0.$$

L'autre facteur donne

$$\operatorname{cotg} \varphi = \frac{b(c^2 + a^2) \cos A - a (b^2 + c^2) \cos B}{b(c^2 + a^2) \sin A - a(b^2 + c^2) \sin B - 2abc \sin (A - B)}$$

Le dénominateur peut se mettre sous la forme

$$b^3 \sin A - a^3 \sin B,$$

et le numérateur sous la forme

$$b^3 \cos A - a^3 \cos B,$$

en remplaçant $c^2 + a^2$ par $b^2 + 2ac \cos B$, et $b^2 + c^2$ par $a^2 + 2bc \cos A$.

Donc on a

$$\operatorname{cotg} \varphi = \frac{b^3 \cos A - a^3 \cos B}{b^3 \sin A - a^3 \sin B}.$$

Si, maintenant, je remplace les côtés par les sinus, qui leur sont proportionnels, il vient

$$\operatorname{cotg} \varphi = \frac{\sin^3 B \cos A - \sin^3 \cos B}{\sin^3 B \sin A - \sin^3 A \sin B},$$

ce qui devient

$$\operatorname{cotg}\varphi = \frac{\sin(B-A)\,[1+\cos A\cos B\cos C]}{\sin A\sin B\sin C\sin(B-A)}.$$

En supprimant le facteur commun *sin* (B — A), nous trouvons $\operatorname{cotg}\varphi = \dfrac{1+\cos A\cos B\cos C}{\sin A\sin B\sin C}$.

De cette valeur nous tirons

$$\operatorname{cotg}\varphi = \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C.$$

Ainsi l'angle φ, que nous obtenons ainsi, n'est pas autre chose que l'angle que nous avons précédemment désigné par α ; de plus, la symétrie de la formule qui donne $\operatorname{cotg}\varphi$ nous montre que, si nous égalions le premier rapport au troisième, nous obtiendrions encore le même angle.

Donc les lignes qui joignent les points de Brocard aux sommets du triangle se coupent en trois points A_1, B_1, C_1, qui sont les sommets d'un triangle semblable au triangle ABC.

La solution $\varphi = 0$, que nous avons trouvée, donne une seconde position du triangle semblable au triangle ABC ; comme les sommets des triangles isoscèles tels que ABC_1 sont toujours sur les perpendiculaires élevées aux côtés du triangle ABC en leurs milieux, il en résulte que le triangle correspondant à la solution $\varphi = 0$ a pour sommets les milieux de ABC ; il est évident que ce triangle est semblable au triangle ABC.

9. — Le rapport de similitude des deux triangles ABC, $A_1B_1C_1$ est facile à déterminer ; en effet, ce rapport est égal à

$$\frac{\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos(A-2\alpha)}}{2a\cos\alpha}.$$

Or, nous avons vu précédemment que, δ désignant la distance des points ω et ω', on avait

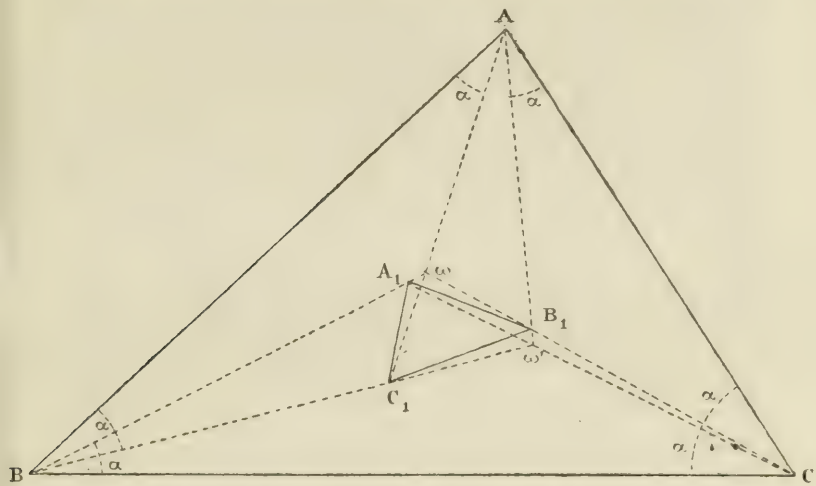
$$\frac{\delta\sin A}{\sin\alpha} = \sqrt{b^2+c^2-2bc\cos(A-2\alpha)} :$$

donc le rapport de similitude cherché est, en remplaçant $\dfrac{\delta\sin A}{a}$ par sa valeur précédemment indiquée,

$$\sin\alpha\sqrt{1-4\sin^2\alpha} :$$

$$\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{\sqrt{1-4\sin^2\alpha}}{2\cos\alpha}.$$

10. — Considérons le cercle circonscrit au triangle $A_1B_1C_1$; d'après ce que nous venons de dire, le triangle $A_1B_1C_1$ est semblable au triangle ABC, le sommet A_1 étant l'homologue du sommet A, et de même pour les autres sommets. Il en résulte que l'angle A_1 est égal à l'angle A. Mais, d'après la manière dont est déterminé le point ω,



l'angle $A\omega C$ est le supplément de l'angle A du triangle ABC; par conséquent l'angle $C_1\omega B_1$ est égal à l'angle A.

On verrait de même que l'angle $A_1\omega' C_1$ est égal à l'angle B, et par suite à l'angle B_1; donc les points ω et ω' sont sur le cercle circonscrit au triangle $A_1B_1C_1$.

De même, il est facile de voir que si l'on joint les points A_1 et B_1 au centre O (*) du cercle circonscrit au triangle ABC, les lignes ainsi menées, d'après la construction même des points A_1, B_1, C_1, sont les perpendiculaires respectivement aux côtés BC et AC; de plus, la ligne A_1O est bissectrice de l'angle BA_1C; par suite elle passe par le milieu de l'arc $\omega A_1C_1\omega'$. De même la ligne B_1O est bissectrice de l'angle $\omega B_1\omega'$; elle passe donc aussi par le milieu de l'arc $\omega A_1C_1\omega'$.

(*) Le point O n'est pas marqué sur la figure; le lecteur est donc prié de faire les constructions qui concernent ce point.

Donc le cercle circonscrit au triangle $A_1B_1C_1$ passe par le centre du cercle circonscrit à ABC.

On voit ainsi que

Les droites qui joignent les sommets du triangle ABC *aux points de Brocard relatifs à ce triangle se coupent en trois autres points* A_1, B_1, C_1, *qui sont les sommets d'un triangle semblable au triangle* ABC ; *et que la circonférence qui passe par les points* A_1, B_1, C_1, *passe aussi par les points de Brocard et par le centre du cercle circonscrit au triangle* ABC.

C'est ce cercle que nous appelons le CERCLE DE BROCARD.

11. — *L'angle* $\omega O\omega'$ *est égal à* 2α; car il est égal à l'angle $\omega C_1\omega'$, lequel, étant extérieur au triangle isoscèle AC_1B, est égal à la somme des angles à la base, c'est-à-dire à l'angle 2α.

12. — *Le triangle* $\omega O\omega'$ *est isoscèle.* En effet, l'angle $O\omega\omega'$ est égal à l'angle $OA_1\omega'$; mais celui-ci est égal au complément de α, dans le triangle isoscèle BA_1C; il en résulte que la bissectrice de l'angle en O du triangle $\omega O\omega'$ est perpendiculaire sur le côté opposé; donc le triangle est isoscèle.

13. — Le rayon du cercle de Brocard est facile à déterminer en fonction de l'angle α et du rayon du cercle circonscrit à ABC; on a en effet, en appelant R_1 le rayon de ce cercle, et R le rayon du cercle ABC :

$$\frac{R_1}{R} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{\sqrt{1 - 4\sin^2\alpha}}{2\cos\alpha}.$$

On retrouverait facilement cette formule, en s'appuyant sur le fait que le triangle $\omega O\omega'$ est isoscèle, et que l'angle en O est égal à 2α; on a alors

$$R_1 = \frac{\delta}{2\sin 2\alpha}.$$

Mais nous avons vu (**7**) que l'on a

$$\frac{\delta}{2\sin\alpha\sqrt{1 - 4\sin^2\alpha}} = 2R.$$

Donc $$R_1 = \frac{R\sqrt{1 - 4\sin^2\alpha}}{2\cos\alpha}.$$

(A suivre.)

NOTE DE GÉOMÉTRIE

SUR L'ENVELOPPE D'UNE DROITE MOBILE

Par M. **Deville**, à Lorient.

Déterminer l'enveloppe d'une droite qui intercepte sur deux axes rectangulaires des segments dont la somme est constante.

I. — *Détermination du point de contact.* — Soient deux axes rectangulaires et une droite AB se déplaçant entre ces deux axes de manière que $OA + OB =$ constante $= l$. Soit A_1B_1 une position voisine *(fig. 1)* ; j'ai, en considérant le triangle OAB coupé par la transversale A_1CB_1,

$$\frac{OB_1}{BB_1} \cdot \frac{AA_1}{OA_1} \cdot \frac{BC}{AC} = 1$$

or

$$OA + OB = OA_1 + OB_1$$

$$OA - OA_1 = OB_1 - OB$$

$$AA_1 = BB_1$$

donc on a

$$\frac{BC}{AC} = \frac{OA_1}{OB_1}.$$

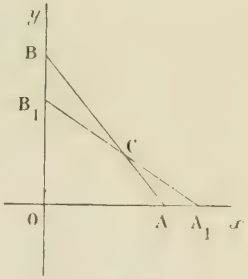


Fig. 1.

Cette relation subsiste à la limite quand A_1B_1 coïncide avec AB. Ainsi le point de contact C avec l'enveloppe est déterminé par la relation $\frac{BC}{AC} = \frac{OA}{OB}$.

II. — *Détermination du lieu.* — Si D est le point de concours des perpendiculaires menées en A et B aux axes, CD est la bissectrice de ADB d'après la relation obtenue. Le point D se meut sur la droite RS telle que $OR = OS = l$; je mène OF, OH, perpendiculaire et parallèle respectivement à RS; ce sont les bissectrices des axes OU, OY; je joins OD et je prolonge CD en H, j'ai $ID = IF$,

$$ID = IB;$$

donc le cercle ABD passe par les points F, A, O, H.

AFBH est un carré : car d'abord $FB = AH$ et ensuite comme $OH = HC$, $CB = BD = OA$, les deux triangles OAH, BCH sont égaux, et $AH = BH$. De ce que AFBH est un carré,

je conclus que AB est perpendiculaire sur FH, que par suite CH = CF.

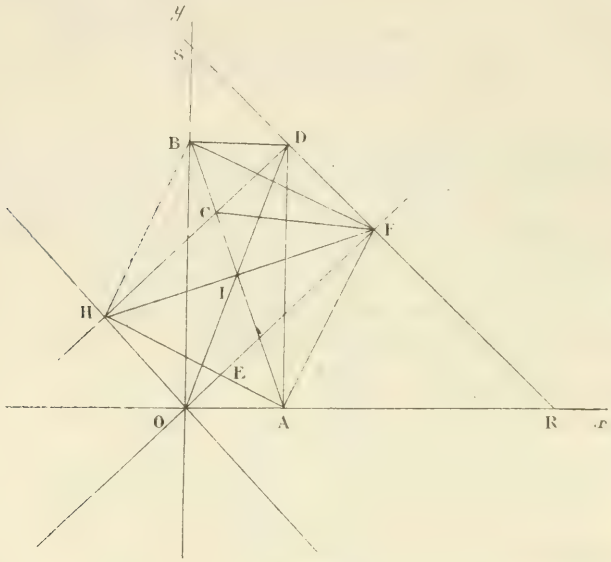


Fig. 2.

Le lieu cherché est donc une parabole ayant pour directrice la deuxième bissectrice et pour foyer le point de la première bissectrice qui est distant des axes de la longueur $\frac{l}{2}$.

QUESTION 6

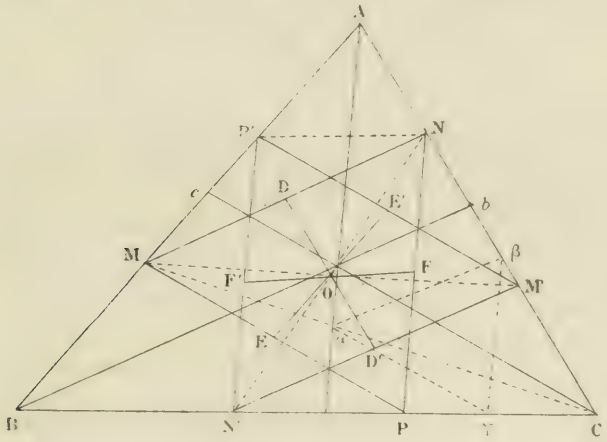
Solution par M. Paul Godefroy, à Lyon.

A tout triangle ABC *ont peut inscrire deux triangles ayant leurs côtés parallèles aux bissectrices de* ABC. *Ces triangles ont le même cercle des neuf points.*

Soient Aa, Bb, Cc. les bissectrices du triangle ABC. Pour obtenir l'un des triangles inscrits dont les côtés sont parallèles aux bissectrices, traçons dans l'angle c une parallèle $\beta\gamma$

à Aa, puis des points β et γ des parallèles $\beta\alpha$, $\gamma\alpha$ aux bissectrices Bb, Cc. On formera ainsi un triangle $\alpha\beta\gamma$ homothétique du triangle cherché et le point C sera pour ces deux triangles un centre de similitude directe : la droite Cα coupera AB en un point M qui sera l'un des sommets du triangle cherché, il ne restera plus qu'à mener de ce point des parallèles MN, MP à Bb, Cc et à joindre NP.

En répétant la même construction dans l'angle B et dans l'angle A, on obtient le second triangle dont les côtés sont parallèles aux bissectrices. Soit M'N'P' ce second triangle.



Les deux triangles MNP, M'N'P', ayant leurs côtés parallèles deux à deux, sont homologiques : il s'ensuit que les droites MM', NN', PP' qui joignent les sommets opposés aux côtés correspondants sont concourantes en un point O. De ce que ces droites sont concourantes on conclut que les triangles MNP', M'N'P sont aussi homologiques; les côtés respectivement opposés aux sommets P et P', M' et M, N' et N doivent donc se rencontrer deux à deux en trois points en ligne droite; or les côtés MN, M'N' sont parallèles, il en est donc de même des côtés P'N et PN', P'M et PM'; on verrait de même que MN' et NM' sont parallèles.

Les deux triangles MNP, M'N'P' auront le même cercle des

neuf points, si les milieux des trois côtés de chaque triangle sont six points sur une même circonférence. Soient D,E,F les milieux des côtés du premier triangle, D'E'F' les milieux des côtés du second. Joignons DD', EE', FF'. Les figures MNM'N', MPM'P', NPN'P' étant, comme on l'a vu, des parallélogrammes, les droites DD',EE',FF' qui joignent les milieux de côtés parallèles sont respectivement parallèles et égales à NM', MP', PN'; de plus elles passent toutes trois par O, point de concours commun des diagonales des trois parallélogrammes, et sont divisées en deux parties égales par ce point. Tout revient donc à prouver que DD' = EE' = FF'.

Le triangle PN'M' est isoscèle. On a en effet

angle M'N'P = angle bBN'

angle N'M'P = angle P'MN = angle P'Bb.

Mais Bb étant bissectrice de B, on a bBN' = P'Bb. Donc enfin le triangle PN'M' est isoscèle ; il s'ensuit que PN' = PM; mais PN' = FF' et PM' = EE' : donc EE' = FF' ; on prouverait de même que DD' = EE = FF'.

Ces droites, étant égales et étant divisées en deux parties égales par le point O, sont des diamètres du cercle des neuf points commun aux deux triangles considérés. Ce cercle a pour centre le point O.

Nota. — La même question a été résolue par M. Prémorant, élève au collège de Cherbourg.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

DE L'ÉCOLE NAVALE

a et b étant des angles moindres que 90°, on a

$$\frac{\cos a \,.\, \cos b}{\cos^2 \dfrac{a+b}{2}} \leqq 1.$$

— On a les relations

$$a' = \frac{r+a}{2}; \quad r' = \sqrt{ra};$$

trouver la limite du rapport $\dfrac{r'-a'}{r-a}$ quand a tend vers r.

— On donne deux sphères dont la distance des centres est d; trouver sur la ligne des centres un point tel que la somme des deux zones vues de ce point soit minima.

— Trouver la limite de l'expression $y = a - \sqrt{a^2 - b^2}$, lorsque a et b tendent vers l'infini; sachant que, dans ces conditions, $\frac{b^2}{a}$ tend vers une limite m.

— On donne l'équation $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$. Trouver la limite de

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y'' - y'}{x'' - x'},$$

sachant que x', y'; x'', y'' sont racines de l'équation donnée.

— De l'équation $(1 + e \cos \theta)(1 - e \cos u) = 1 - e^2$, déduire l'équation $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{u}{2}$.

— Démontrer géométriquement la formule

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

— On donne un cylindre circonscrit à une sphère. Par deux points A et A', pris sur l'axe du cylindre et symétriques par rapport au centre de la sphère, on circonscrit deux cônes à la sphère. Ces cônes coupent le cylindre suivant les cercles BC et B'C'. Trouver le minimum de la surface totale formée des surfaces latérales des deux cônes et de la surface cylindrique comprise entre les cônes.

— Quelles relations doivent exister entre a, a', b, b', pour que les équations

$$a^2 \sin \alpha \sin \alpha' + b^2 \cos \alpha \cos \alpha' = 0,$$

$$a'^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha},$$

$$b'^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 \sin^2 \alpha' + b^2 \cos^2 \alpha'}$$

soient satisfaites, quels que soient α et α'.

— On mène les tangentes aux extrémités du grand axe AB d'une ellipse et une tangente quelconque qui rencontre en C et D les tangentes AC et BD. Démontrer que la tangente DC est vue des foyers sous un angle droit et que AC $\times$ BD est constant.

— Si dans une parabole on mène par le foyer F une corde AFB quelconque et que l'on abaisse les perpendiculaires AA′, BB′ des points d'intersection sur l'axe, on a, bS étant le sommet de la courbe, $SF^2 = SA' \times SB'$.

— On donne un trapèze non isoscèle ABCD et la diagonale BD. Par un point I quelconque sur la hauteur BH, on mène une parallèle EON à la base, rencontrant les côtés en E et N, et la diagonale en O. Trouver le point I pour lequel $EO^2 + ON^2$ est maximum.

— Trouver la valeur que prend, pour x infini, l'expression

$$y = \sqrt{4x^2 - 3x + 2} - \sqrt{4x^2 + 3}.$$

QUESTIONS PROPOSÉES

77. — Construire un triangle connaissant les deux côtés AB, AC et la longueur de la partie de la bissectrice de l'angle BAC comprise entre les deux hauteurs partant de B et de C.

(E. Lemoine.)

78. — Trouver les côtés d'un triangle connaissant une hauteur, le rayon du cercle inscrit et le rayon du cercle circonscrit.

79. — Mener dans un triangle une transversale tangente au cercle inscrit au triangle et détachant un triangle de surface donnée. *(Reidt.)*

80. — Étant données les équations

$$\cos x + \cos y = 2\rho \cos \alpha$$
$$\sin x + \sin y = 2\rho \sin \alpha,$$

trouver l'équation qui admet pour racines $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x$ et $\operatorname{tg} \frac{1}{2} y$.

Le Rédacteur-Gérant,
E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 32254-2

LA GÉOMÉTRIE RÉCURRENTE

Par M. **G. de Longchamps**.

(*Suite*, voir pages 3, 25 et 49.

TROISIÈME APPLICATION

Étude de géométrie récurrente sur les centres de gravité.

22. — Le point de concours des médianes d'un triangle se prête particulièrement bien à une étude de géométrie récurrente, parce qu'il jouit d'une propriété particulière qui permet de faire cette étude par des considérations empruntées à la mécanique, et qui conduisent au point d'ordre n, d'une façon, pour ainsi dire, intuitive.

Considérons quatre points dans l'espace 1, 2, 3, 4, et l'un d'entre eux en particulier, le point 4. Si l'on joint ce point au point de concours des médianes du triangle 1,2,3, au point que nous désignerons par G_{123}, nous obtenons une droite Δ_4. Les quatre droites Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, ainsi obtenues, concourent en un même point G_{1234}, et s'y partagent mutuellement dans le rapport de 1 à 3.

23. — *Généralement*: imaginons n points 1, 2....n dans l'espace et considérons l'un d'eux en particulier, le point n. Si l'on joint ce point au point $G_{1,2,\ldots n-1}$, précédemment défini, on obtient une droite Δ_n. Les n droites ainsi obtenues concourent en un même point $G_{1,2\ldots n}$ et s'y partagent mutuellement dans le rapport de 1 à n.

Cette propriété peut s'établir par des considérations purement géométriques et en prenant pour base et pour point de départ la définition géométrique du point G_{123}. Mais on sait, et nous n'avons pas à rappeler ici comment on démontre immédiatement cette propriété en imaginant n masses égales appliquées aux points 1, 2...n, et en cherchant le centre de gravité de ces n masses.

24.— Nous dirons maintenant quelques mots très rapides

sur les points que nous avons imaginés autrefois (*) et que nous avons nommés *centres de gravité dans les polygones complets*. Ces points remarquables ont été trouvés par un procédé très différent de celui que nous allons exposer et beaucoup moins simple.

Imaginons d'abord la figure formée par quatre droites indéfinies 1, 2, 3, 4, situées dans un plan : faisons abstraction de l'une d'elles, de la droite 4, par exemple, il reste un triangle 1, 2, 3 auquel correspond un point G_{123}. D'autre part, les côtés de ce triangle rencontrent la droite 4 en trois points 4,1 ; 4,2 ; 4,3 ; que l'on peut considérer comme formant les sommets d'un triangle aplati. A un pareil triangle correspond un point γ_4. Ce point γ_4 est le centre de gravité de trois masses égales appliquées aux points 4,1 ; 4,2 ; 4,3 : si l'on veut rester dans le domaine purement géométrique, on peut dire alors que γ_4 est le point limite du point de concours des médianes d'un triangle qui s'aplatit, les trois sommets ayant des positions limites bien déterminées

On obtient ainsi une droite Δ_4, en joignant le point G_{123} à γ_4 : les quatre droites qu'on peut ainsi obtenir concourent au même point et s'y partagent mutuellement en deux parties égales.

On reconnaît immédiatement cette propriété en appliquant des masses égales aux six sommets du quadrilatère complet formé par les droites données. On peut imaginer que l'on cherche le centre de gravité de ces six masses en cherchant d'abord le point d'application de la résultante des masses

$$1,2 ; \quad 1,3 ; \quad 2,3 ;$$

point qui est précisément G_{123} ; puis le centre de gravité des masses

$$4,1 ; \quad 4,2 ; \quad 4,3 ;$$

ce second point est γ_4. Le point d'application de la résultante des six masses que nous avons imaginées est donc placé au milieu de $\gamma_4 G_{123}$. Ceci prouve, tout à la fois : 1° que les quatre droites analogues à $\gamma_4 G_{123}$ concourent au même point ; 2° qu'elles se partagent en ce point, que nous désignerons par G_{1234}, en deux parties égales.

(*) *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, t. III.

25. — Prenons maintenant le polygone complet défini par n droites, deux à deux concourantes. Ce polygone admet $\frac{n(n-1)}{2}$ sommets ; si nous plaçons des masses égales à chacun de ces points, le raisonnement que nous avons fait tout à l'heure, appliqué à cette figure générale, conduit au théorème suivant qui, comme l'a remarqué M. Catalan (*), rappelle un beau théorème de Coriolis (**).

Soit 1,2...n, n *droites deux à deux concourantes, faisons abstraction de l'une d'elles, de la droite* n *par exemple; il reste un polygone complet défini par les droites* 1.2... (n — 1); *et à ce polygone correspond un point* $G_{1,2\ldots(n-1)}$, *point défini par la loi même que nous énonçons en ce moment. Si l'on joint ce point au point* $\gamma_{1.2\ldots(n-1)}$, *centre de gravité des* (n — 1) *points communs à la droite* n *et aux droites* 1,2... (n — 1), *les* n *droites ainsi obtenues concourent en un même point et s'y partagent mutuellement dans le rapport de* 2 *à* (n — 2).

C'est le point de concours des n droites analogues à $G_{1.2,\ldots(n-1)}$, $\gamma_{1,2\ldots(n-1)}$ qui constitue le point $G_{12\ldots n}$.

26. — Nous abrégeons, le plus qu'il nous est possible, cette exposition de la géométrie récurrente ; mais nous ne pouvons pas quitter cette étude des centres de gravité sans montrer, par un nouvel exemple, comment on peut varier à l'infini la découverte de ces théorèmes successifs qui, prenant pour point de départ une propriété élémentaire, conduisent, de proche en proche, à un théorème général, qui est leur conclusion naturelle.

Imaginons encore quatre droites deux à deux concourantes et à chacun des sommets plaçons maintenant *deux* masses égales. Nous obtenons ainsi douze forces F égales et parallèles que l'on peut composer, comme nous allons l'expliquer.

Considérons les trois points

$$4,1\ ;\ 4,2\ ;\ 4,3\ ;$$

(*) *Nouvelle correspondance mathématique* t. III, p. 346.

(**) *Journal de l'École Polytechnique*, 24e cahier, p. 135.

et prenons, à chacun de ces points, une des forces F. Ces trois forces ont une résultante 3F, appliquée au point G_{123}. Chaque sommet du quadrilatère complet que nous considérons appartenant à deux des triangles formés par ce quadrilatère, on obtient, en combinant les forces F, comme nous venons de le dire, quatre forces 3F, ayant pour points d'application G_{123}, G_{234}, G_{341}, G_{412}.

On peut maintenant combiner les trois forces 3F appliquées aux points G_{234}, G_{341}, G_{412};
et l'on obtient une force 9F, appliquée au centre de gravité γ'_4 du triangle G_{234}, G_{341}, G_{412}. La droite $\gamma'_4\, G_{123}$ et les droites analogues passent par le point que nous avons défini tout à l'heure (§ 24) s'y partagent mutuellement dans le rapport de 1 à 3.

De cette remarque on peut conclure le théorème suivant:

Théorème. — *Étant données quatre droites* 1,2,3,4, *deux à deux concourantes; si l'on fait abstraction de l'une d'elles, de la droite* 4 *par exemple, on obtient un triangle auquel correspond un centre de gravité* G_{123} ; *si l'on joint ce point au centre de gravité du triangle formé par les trois autres points* G : *1° les quatre droites* Δ *ainsi obtenues concourent au même point* G_{1234}; *2° ce point est le centre de gravité du quadrilatère complet, c'est-à-dire le centre de gravité des six sommets de cette figure ; 3° les droites* Δ *se partagent mutuellement dans le rapport de* 1 *à* 3.

27. — Prenons maintenant un pentagone complet et à chacun des sommets appliquons *six* masses égales, produisant chacune une force égale à F. Faisons abstraction de l'une des droites, de la droite 5 par exemple, et considérons le quadrilatère complet 1, 2, 3, 4. Aux sommets de ce quadrilatère sont appliquées six forces; prenons deux d'entre elles et raisonnons comme nous l'avons fait au paragraphe précédent. Nous obtenons une force 12F appliquée au point G_{1234}. Chaque sommet du pentagone proposé appartient à *trois* quadrilatères complets. Par exemple le point 1, 2, est un sommet dans chacun des polygones

1, 2, 3, 4; 1, 2, 3, 5; 1, 2, 4, 5.

Comme il y a six forces F à chaque point, sommet du pentagone proposé, au point 1, 2 en particulier, on pourra diviser ces forces en trois couples égaux à 2F et nous obtiendrons finalement, par cette composition des forces F, 5 forces égales à 12F et appliquées aux centres de gravité des quadrilatères complets 1,2,3,4; 1,2,3,5, etc., points définis comme on l'a vu plus haut.

Si nous combinons maintenant les 4 forces 5F qui sont appliquées aux points G_{1233} etc., nous obtenons une force 4, 12 F appliquée en un point γ'_5, centre de gravité des quatre points G_{1233}, etc. Les cinq droites G_{1234} γ'_5 vont passer par le point d'application de la résultante des 60 forces F considérées, et, pour des raisons connues, se partagent mutuellement dans le rapport de 1 à 4.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Imaginons cinq droites* 1,2,3,4,5, *qui définissent cinq quadrilatères complets, à chacun desquels correspond un centre de gravité, point défini précédemment. Si l'on joint l'un de ces points au centre de gravité des quatre autres points analogues, les cinq droites ainsi obtenues concourent au même point, centre de gravité du pentagone proposé, et se partagent mutuellement, en ce point, dans le rapport de* 1 *à* 4.

28. — On voit facilement, par les explications qui précèdent, quel est le théorème général auquel aboutissent les deux théorèmes précédents et comment on peut faire sa démonstration.

On imagine n droites, deux à deux concourantes, et à chacun des sommets S de ce polygone complet on place $1 . 2 . 3 \ldots (n-2)$ masses égales. Chaque sommet S appartient à $(n-2)$ polygones complets d'ordre $(n-1)$, et l'on peut partager les $1 . 2 \ldots (n-2)$ forces appliquées en S en $(n-2)$ groupes de $1 . 2 \ldots (n-3)$ forces F. En combinant ces $1 . 2 \ldots (n-3)$ forces appliquées aux sommets du polygone $1, 2, \ldots (n-1)$, on obtient un point $G_{1 . 2 \ldots n-1}$ précédemment défini. Si l'on joint ce point au centre de gravité γ'_n des $(n-1)$ autres points analogues,

on sait que les n droites ainsi obtenues concourent et se partagent mutuellement dans le rapport de 1 à $(n - 1)$. Le théorème général qui résulte de ces considérations peut donc s'énoncer ainsi :

Théorème. — *Considérons* n *droites, deux à deux concourantes ; elles définissent* n *polygones complets d'ordre* (n — 1) *obtenus en faisant successivement abstraction de l'une d'elles, et, à chacun de ces polygones correspond un centre de gravité, point défini précédemment. Si l'on joint l'un de ces points au centre de gravité des* (n — 1) *autres points analogues, les* n *droites ainsi obtenues concourent au même point, centre de gravité du polygone complet proposé, et s'y partagent mutuellement dans le rapport de* 1 *à* n. *(A suivre.)*

SUR UN POINT DE LA DISCUSSION

DU SECOND DEGRÉ

Par M. **P. Barrieu,** professeur au Lycée de Mont-de-Marsan.

La plupart des traités d'algèbre élémentaire donnent la démonstration des deux théorèmes suivants :

Théorème I. — *Si deux nombres* α *et* β, *substitués à* x *dans l'équation du second degré, donnent au premier membre des valeurs de signes contraires,* α *et* β *comprennent entre eux une racine et n'en comprennent qu'une.*

Théorème II. — *Si les deux nombres* α *et* β, *substitués à* x *dans l'équation du second degré, donnent au premier membre des valeurs de même signe,* α *et* β *comprennent entre eux les deux racines, ou n'en comprennent aucune.*

Nous nous proposons, dans le cas particulier où α et β sont des nombres égaux et de signes contraires, de compléter l'énoncé de ces deux théorèmes et d'en modifier la forme de manière à pouvoir les introduire utilement dans les discussions du second degré. Nous ferons remarquer que

le cas particulier dont il s'agit est assez fréquent ; il se présente notamment dans un certain nombre de problèmes sur le cercle et la sphère, et dans les équations du second degré qui ont pour inconnue un sinus ou un cosinus.

Voici les deux théorèmes que nous proposons, et qui modifient légèrement ceux que nous avons rappelés :

Théorème I. — *Si deux nombres égaux et de signes contraires,* $-\alpha$ *et* $+\alpha$, *substitués à* x *dans l'équation du second degré, donnent au premier membre des valeurs dont le produit soit négatif,* $-\alpha$ *et* $+\alpha$ *comprennent entre eux une racine et n'en comprennent qu'une;* la racine comprise est celle qui a la plus petite valeur absolue.

Théorème II. — *Si deux nombres égaux et de signes contraires,* $-\alpha$ *et* $+\alpha$, *substitués à* x *dans l'équation du second degré, donnent au premier membre des valeurs dont le produit soit positif,* et si, de plus, le produit des carrés des racines est moindre que α^4, *les deux racines, si elles sont réelles sont comprises entre* $-\alpha$ *et* $+\alpha$.

Démonstration. — Soit P le produit des facteurs obtenus en remplaçant successivement x par $-\alpha$ et $+\alpha$ dans le premier membre de l'équation du second degré :

$$P = (a\alpha^2 - b\alpha + c)(a\alpha^2 + b\alpha + c),$$

nous aurons deux cas à distinguer :

1° $P < 0$. Les deux facteurs de P sont de signes contraires, donc $-\alpha$ et $+\alpha$ comprennent entre eux une racine.

La racine comprise entre $-\alpha$ et $+\alpha$ est en valeur absolue moindre que α, la racine extérieure est au contraire en valeur absolue plus grande que α ; donc la racine comprise est celle qui a la plus petite valeur absolue, et le théorème I est démontré.

2° $P > 0$. Les deux facteurs de P sont de même signe ; donc $-\alpha$ et $+\alpha$ comprennent entre eux les deux racines ou n'en comprennent aucune.

Si les deux racines sont comprises entre $-\alpha$ et $+\alpha$, chacune d'elles est en valeur absolue moindre que α, et le produit de leurs carrés est moindre que α^4.

Si, au contraire, les deux racines sont extérieures α et $+\alpha$, chacune d'elles est en valeur absolue plus grande que α, et le produit de leurs carrés est plus grand que α^4.

Donc, pour que les deux racines soient comprises entre $-\alpha$ et $+\alpha$, il faut et il suffit que l'on ait en même temps :

$$\begin{cases} P > 0 \\ x'^2 x''^2 < \alpha^4 \end{cases}$$

La deuxième condition peut s'écrire

$$\frac{c^2}{a^2} < \alpha^4$$

ou
$$(c - a\alpha^2)(c + a\alpha^2) < 0.$$

Pour le cas particulier où $\alpha = 1$ cette condition devient

$$(c - a)(c + a) < 0.$$

Nous allons maintenant appliquer ces théorèmes à la discussion des problèmes du second degré.

Problème I. — *Discuter l'équation du second degré en* sin x.

$$(m - 1)\sin^2 x - 2(m + 1)\sin x + 2m - 1 = 0.$$

(Rebière, *Trigonométrie*, p. 75.)

Pour simplifier l'écriture, nous poserons $\sin x = y$. L'équation devient alors

$$(m - 1)y^2 - 2(m + 1)y + 2m - 1 = 0; \qquad (1)$$

Discussion. — Les racines doivent être réelles et comprises entre -1 et $+1$.

La condition de réalité est

$$(m + 1)^2 - (m - 1)(2m - 1) \geq 0$$

d'où
$$-m^2 + 5m \geq$$
$$m(m - 5) \leq 0$$
$$0 < m < 5. \qquad (2)$$

Soit P le produit des facteurs obtenus en remplaçant successivement y par -1 et $+1$ dans le premier membre de l'équation (1), nous avons

$$P = \{m - 1 + 2(m + 1) + 2m - 1\}\{m - 1 - 2(m + 1) + 2m - 1\}$$
$$= 5m(m - 4).$$

Donc P est négatif pour toutes les valeurs de m comprises entre 0 et 4, positif pour toutes les autres.

La condition $y'^2 y''^2 < 1$ devient

$$(c - a)(c + a) < 0 \qquad \text{(Th. II.)}$$

ou, en remplaçant a et c par leurs valeurs,

$$m(3m - 2) < 0,$$

d'où

$$0 < m < \frac{2}{3}, \qquad (3)$$

Le produit des racines est de même signe que

$$(m - 1)(2m - 1) = 2\left(m - 1\right)\left(m - \frac{1}{2}\right).$$

Les racines seront donc de signes contraires pour toutes les valeurs de m comprises entre $\frac{1}{2}$ et 1, de même signe pour toutes les autres.

La somme des racines est de même signe que

$$(m + 1)(m - 1).$$

Elle est donc négative pour toutes les valeurs de m comprises entre -1 et $+1$, positive pour toutes les autres.

Nous pouvons résumer tous ces résultats dans les deux tableaux suivants :

$$\text{var. de } m \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}^{P<0}\ \overbrace{\qquad}^{P>0} \\ 0 \ldots \frac{1}{2} \ldots \frac{2}{3} \ldots 1 \ldots 4 \ldots 5 \\ \underbrace{\qquad\qquad}_{y'^2y''^2<1}\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{y'^2y''^2>1} \end{array} \right.$$

$$\text{var. de } m \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\qquad}^{y'y''>0}\ \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{y'y''<0}\ \overbrace{\qquad\qquad}^{y'y''>0} \\ 0 \ldots \frac{1}{2} \ldots \frac{2}{3} \ldots 1 \ldots 4 \ldots 5. \\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{y'+y''<0}\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{y'+y''>0} \end{array} \right.$$

Il est inutile de considérer les valeurs de m autres que celles comprises entre 0 et 5, puisque les racines correspondantes seraient imaginaires.

Cela posé, nous avons deux cas à considérer :

Premier cas. $0 < m < 4$.

On a $P < 0$. Une seule racine est comprise entre -1 et $+1$. (Th. I.) Il y a donc une seule solution. Pour distinguer la racine qui convient, il suffit de rechercher au deuxième tableau celle qui a la plus petite valeur absolue. (Th. I.)

1°. $0 < m < \frac{1}{2}$. Les deux racines sont négatives. Il faudra donc prendre celle qui a la plus petite valeur absolue, c'est-à-dire la plus grande racine en valeur relative. Donc : *une solution négative.*

2°. $\frac{1}{2} < m < 1$. Les deux racines sont de signes contraires et la racine positive est la plus petite en valeur absolue. Donc : *une solution positive.*

3°. $1 < m < 4$. Les deux racines sont positives; on prendra la plus petite. Donc : *une solution positive.*

Deuxième cas. $4 < m < 5$.

On a : $P > 0$ et $y'^2 y''^2 > 1$. Il n'y a donc aucune racine comprise entre -1 et $+1$. (Th. II.) Donc : *pas de solution.*

(A suivre.)

EXAMENS ORAUX POUR SAINT-CYR

Algèbre.

Étudier les variations du trinôme $3x^2 + 2x - 1$ lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

— On donne l'équation $x^2 + px + q = 0$, former l'équation admettant les racines $x' + \frac{1}{x'}$ et $x'' + \frac{1}{x''}$.

— $x^m - a^m$ est-il toujours divisible par $x^2 - a^2$.

— Résoudre $x^8 - 1 = 0$. Combien cette équation a-t-elle de solutions ?

— Étudier la fonction $y = x^4 - 5x^2 + 7$.

— Étudier la fonction $y = \frac{1}{x^2 - 2h}$ lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$. Courbe représentative.

— Étudier la fonction $y = x^2 - 2x + 7$; courbe.

— Discuter les racines de l'équation

$$mx^2 - (2m + 1)x + 3m - 1 = 0,$$

quand m prend toutes les valeurs possibles. Condition de réalité des racines. Que faut-il pour que les racines soient positives ?

— Variations de la fonction $y = 3x^2 - 5x + 4$ quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

— Que faut-il pour que les racines de $ax^2 + bx + c - 2a = 0$ étant réelles soient toutes deux plus grandes que 2.

— Résoudre $\dfrac{x^2 - 2x - 1}{x - 1} > 0.$

— Résoudre $x^2 - 12x + 35 > 0.$

— Maximum et minimum de $\dfrac{x^2 - 5x + 7}{x^2 - 5x + 6}.$

— Résoudre $3x + 2\sqrt{x} = a.$

— Résoudre
$$x + y = a;$$
$$x^3 + y^3 = b^3.$$

— Étudier les variations de la fonction $y = x^4 - 8x^2$ lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

— Résoudre $\dfrac{ax}{x - a} + x = b.$

Discuter. Que faut-il pour que les deux racines soient supérieures à $10\,a$?

— Variation du trinôme $8x^2 - 5x + 2$.

— Résoudre $\dfrac{a^2}{x^2 - b^2} - \dfrac{b^2}{x^2 - a^2} = A.$

— Résoudre
$$xy = \mu;$$
$$(x + a)^2 + (y + a)^2 = m^2.$$

Trigonométrie.

— Résoudre $\cos x = m \operatorname{tg} x$. Discuter.

— Résoudre $\sin 2x = \operatorname{tg} x.$

— Résoudre $3 \operatorname{tg} x + 5 \operatorname{cotg} x = 4.$

— Résoudre $a \operatorname{tg} x + b \operatorname{cotg} x = c$. Condition de réalité. Rendre calculable par log. la valeur de $\operatorname{tg} x$.

— Résoudre $\sin 2x - \cos^2 x = m$. Discuter.

— Trouver la valeur de $\dfrac{1 - \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{cotg} x}$ quand x tend vers 45.

— Résoudre $\operatorname{cotg} x + \sec 2x = m$. Discuter.

— Résoudre $\dfrac{\operatorname{tg}(45 + x)}{\operatorname{tg} x} = k$.

— Résoudre $\sin x + \sin(60 - x) = n$.

— Résoudre $\dfrac{\sin x}{\sin(\alpha - x)} = m$.

— Résoudre $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x = m^2$.

— Résoudre

$$\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x = 2(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x).$$

— Résoudre $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{1}{2}$.

— Résoudre $\cos 2x = \sin 3x$.

— Résoudre $\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x = 1$.

— Résoudre et discuter

$$(m - 1)\operatorname{tg}^2 x - 2(m - 2)\operatorname{tg} x + 3(m - 3) = 0.$$

— Voir ce que devient la fraction $\dfrac{\sin(x - 30)}{1 - 2\sin x}$ quand x tend vers 30°.

— Résoudre et discuter

$$\operatorname{tg}^2 x - (m - 1)\operatorname{tg} x + (m - 2) = 0,$$

x devant varier entre 0 et 90°.

— Résoudre et discuter

$$m \operatorname{tg}^4 x - 2(m - 1)\operatorname{tg}^2 x + m - 2 = 0.$$

— Résoudre et discuter

$$3\sin^2 x + b = \sin x \cos \alpha.$$

— Résoudre $2\sin x + \cos 2x = m$.

— Résoudre

$$m \sin^2 x - (m - 2)\sin x + 3 = 0.$$

Applications diverses.

On donne un cercle. On mène la corde AC et la corde symétrique AD; on joint CD; mener AC tel que $AC^2 + AD^2 + CD^2 = 4m^2$.

— On donne un demi-cercle AB. Mener une corde PQ perpendiculaire à AB telle qu'on ait $AP + PQ = m$; discuter.

— On donne une circonférence O et un point A sur le diamètre BC prolongé. Mener une sécante APQ telle que l'angle QOP soit quadruple de l'angle PAO.

— Calculer les diagonales d'un quadrilatère inscriptible en fonction des côtés. Expression de la surface.

— Étant donné un demi-cercle AB, trouver sur AB un point C tel que si de ce point on mène une perpendiculaire jusqu'à la rencontre d'une droite indéfinie menée par le point A et faisant avec AB un angle α, on ait $CF^2 + CD^2 = m^2$. Cas où $\alpha > 45^\circ$; $\alpha < 45^\circ$. Conditions de possibilité du problème.

— On donne un cercle et un diamètre AB. Mener une corde CD perpendiculaire à AB et telle qu'on ait $AC^2 + CD^2 = m^2$.

— Couper une sphère par un plan tel que le cône qui a pour base la section et pour sommet le centre de la sphère ait une surface égale à celle de la calotte qui a pour base la section.

— On donne une sphère. On la coupe par un plan de manière à en détacher un segment à une base. Mener ce plan de façon que $\dfrac{\text{vol. segment BAM}}{\text{v. secteur BOM}} = K$.

— On donne un demi-cercle AB et une corde AC. Déterminer sur le demi-cercle un point M tel que si de ce point on abaisse MP perpendiculaire sur AB et du pied P de cette perpendiculaire une perpendiculaire PQ sur AC, on ait

$$MP^2 + PQ^2 = m^2.$$

— Somme des carrés des diagonales dans un trapèze.

— On donne un demi-cercle AB et on même une tangente en B. Placer une corde PQ telle que le rapport des volumes engendrés par le demi-cercle et le triangle PBQ soit égal à m.

Mécanique.

Un nageur voudrait aller de A en C pour traverser une rivière dont les bords sont supposés rectilignes et parallèles et qui coule dans un sens déterminé. Dans quelle direction doit-il nager? On connaît la vitesse v de la rivière, celle du nageur h, et on suppose que les deux mouvements sont uniformes. — Discussion.

— La barre AB du poids de 200 kil., de longueur $1^m,20$, supporte en A et en B des poids de 60 et 80 kil. Où doit être placé-le point O d'appui pour qu'il y ait équilibre?

— Un pendule pesant 25 gr. est écarté de la position ver-

ticale d'un angle de 60°. Trouver la valeur de la force horizontale (une source d'électricité) qui maintient le pendule en B'.

— Quelles sont les valeurs de deux forces f et f' à appliquer en A et B extrémités d'une barre AB pour qu'elles soient composantes d'une force verticale de 60 k. appliquée en C tel que AC = 15 c. m. et BC = 25 c. m.

— Si d'un point M de la résultante R de deux forces concourantes P et Q on abaisse deux perpendiculaires MN, MI, démontrer qu'on a la relation $\frac{MI}{MN} = \frac{P}{Q}$.

— Aux points A et B d'une droite rigide AB sont appliquées deux forces F et P faisant avec AB des angles de 120° et 150° et telles que P = 2F. Démontrer qu'il y a une résultante ; en trouver la valeur et le point d'application sur AB.

— Une poutre AB pesant 400 k. repose en AB sur deux points fixes et supporte au tiers de sa longueur un poids de 500 k. Trouver la pression sur les points d'appui.

— On suppose matérielles et pesantes les lignes de la figure dite pont-aux-ânes et si la figure peut tourner autour de l'axe perpendiculaire à son plan par le point M, milieu de BC, il y a équilibre.

— Dans un triangle on donne un point quelconque O intérieur; on le joint aux trois sommets; on suppose que trois forces sont dirigées suivant OA, OB, OC; on demande leur résultante. Prouver qu'elle passe par le centre de gravité G du triangle. Valeur de la résultante par rapport à OG.

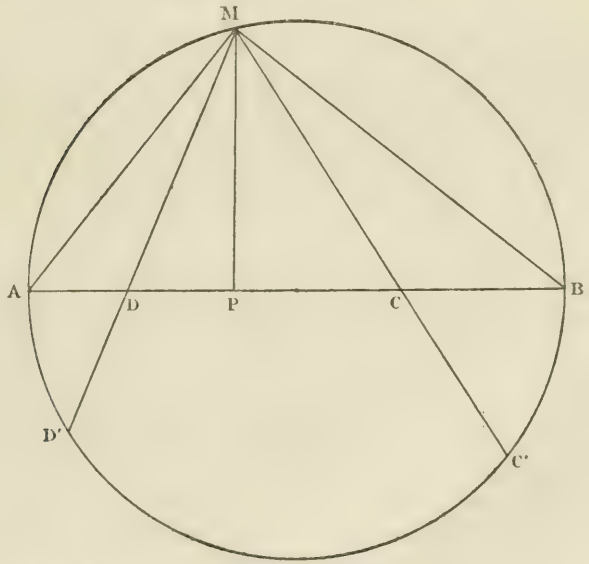
— Une barre AB de $1^m,50$ de long pèse 80 k. Quelle force faut-il appliquer en B pour que AB reste horizontale, la barre pouvant tourner librement autour du point C tel que AC = 0,80 ?

QUESTION 44

Solution par M. Georges Berthelot, ex-élève du Lycée de Châteauroux, Répétiteur au Lycée de Bourges.

On considère un cercle et un diamètre AB; *d'un point* M *pris sur la circonférence, on abaisse une perpendiculaire* MP *sur* AB. *Soit* C *le milieu de* PB. *Prenons enfin entre* A *et* B *un point* D *tel que* $AD = \frac{PB}{4}$. *Les droites* MC *et* MD *rencontrent le cercle en des points* C′ *et* D′. *Démontrer que l'on a*

$$\text{arc } MB = 2BC' + AD'.$$



Je vais d'abord démontrer que $MD = DC$.

En effet, dans le triangle DMC, on a

$$\overline{MD}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{DC}^2 - 2DC \times PC.$$

Or dans le triangle MPC on a

$$\overline{MC}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{PC}^2.$$

Et dans le triangle rectangle AMB on a

$$\overline{MP}^2 = AP \times PB = \left(\frac{PC}{2} + DP\right) 2PC = \overline{PC}^2 + 2PC \times DP.$$

Donc $\overline{MD}^2 = 2\overline{PC}^2 + \overline{DC}^2 + 2PC \times DP - 2DC \times PC.$

Et comme $DC = DP + PC$, on a

$$\overline{MD}^2 = \overline{DC}^2;$$

$$\text{d'où } MD = DC$$

et par suite angle DCM = angle DMC.

De plus on a

$$AM + MB = BC' + D'C' + AD'$$

$$MB = BC' + D'C' + AD' - AM$$

Or, $D'C' = AM + BC'$

donc $MB = BC' + AM + BC + AD' - AM$

$$MB = 2BC' + AD'.$$

NOTA. — La même question à été résolue par MM. Puig, à Montpellier; Deville, à Lorient.

QUESTION 46

Solution par M. E. MOSNAT, à Thiers.

On donne l'axe Ox, *le sommet* O, *et un point* M *d'une parabole; on propose de construire cette courbe point par point au moyen d'une équerre.* (G.L.)

Joignons OM; menons par le point O une perpendiculaire à OM et par le point M une parallèle à Ox; ces deux droites se coupent en un point I; de ce point, abaissons une perpendiculaire sur Ox; soit A le pied de cette perpendiculaire et B le pied de l'ordonnée du point M.

Les deux triangles rectangles OMB, IAO sont semblables et donnent

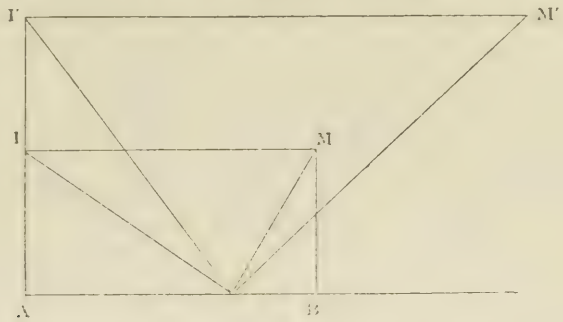
$$\frac{MB}{OB} = \frac{AO}{IA}$$

ou comme $IA = MB$; $MB^2 = OB \,.\, AO$;

mais quelle que soit la position du point M sur la parabole, on a

$$\frac{MB^2}{OB} = \text{const.}$$

Donc $$AO = \text{const.}$$
ce qui prouve que le lieu du point I, quand on fait varier la position du point M sur la parabole, est une perpendiculaire



à l'axe Ox de la parabole menée, à une distance du sommet égale au rapport $\frac{MB^2}{OB}$, c'est-à-dire au double du paramètre.

Il est alors facile de construire la parabole; puisqu'on connaît un point M, on peut déterminer la perpendiculaire IA.

On mènera alors, par le point O, une droite qui coupera la perpendiculaire IA en I', et une perpendiculaire OM' à cette droite. Par le point I' on mènera une parallèle à Ox qui coupera la perpendiculaire OM' en M', le point M' appartient à la parabole.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Vail, à Arcueil; La Chesnais, au lycée Saint-Louis, à Paris; Besson, à Nantes; Deville, à Lorient; H. Bourget, à Aix.

QUESTION 50

Solution par M. Deville, brigadier d'artillerie de Marine, à Lorient.

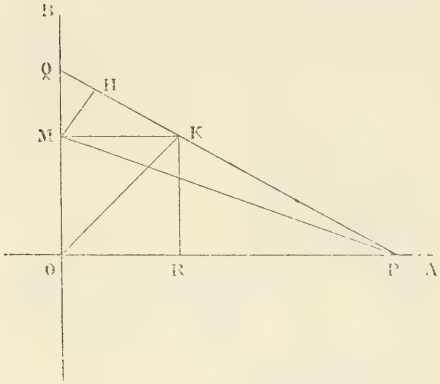
On considère un angle droit AOB, *et sur* OB *un point fixe* M. *On trace une droite rencontrant* OB *au point* Q, OA *au point* P *et telle que si du point* M *on abaisse une perpendiculaire* MH *sur*

PQ, *on ait toujours la relation*

$$\frac{PH^2}{OP^2} - \frac{MH^2}{OQ^2} = 1.$$

Démontrer que la droite PQ *passe par un point fixe.*

La relation considérée peut s'écrire



$$\frac{PH^2}{OP^2} - 1 = \frac{MH^2}{OQ^2}$$

ou

$$\frac{PH^2 - OP^2}{OP^2} = \frac{MH^2}{OQ^2}.$$

Or on a

$$PH^2 = PM^2 - MH^2$$

et

$$PM^2 = OP^2 + OM^2.$$

Donc

$$PH^2 - OP^2 = OM^2 - MH^2.$$

Par suite, la relation peut s'écrire

$$\frac{OM^2 - MH^2}{OP^2} = \frac{MH^2}{OQ^2} = \frac{OM^2}{OP^2 + OQ^2} = \frac{OM^2}{PQ^2}.$$

On tire de là

$$OM = \frac{MH.PQ}{OQ}.$$

Menons MK, parallèle à OP, et rencontrant PQ en K; nous aurons, par la similitude des triangles MHK, OPQ :

$$MK = \frac{MH.PQ}{OQ}.$$

Donc $$MK = OM.$$

Par suite, le point K est le sommet du carré construit sur les axes OA et OB, avec OM comme côté. Donc la droite PQ passe par un point fixe K.

Nota. — La même question a été résolue par M. Mosnat, à Thiers.

QUESTION 53

On considère l'expression

$$U = \sqrt{a + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}},$$

et on propose de la transformer en un produit de deux facteurs de la forme $\sqrt{x} + \sqrt{y}$. *Démontrer que la transformation n'est possible que si* $a^2d = bc$, *et qu'elle n'est avantageuse que si* $a^2 - b$ *et* $a^2 - c$ *sont des carrés parfaits.*

L'égalité

$$\sqrt{a + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}} = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{u} + \sqrt{v})$$

donne, en élevant au carré

$$a + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} = (x + y + 2\sqrt{xy})(u + v + 2\sqrt{uv}).$$

On satisfait à cette égalité en posant

$$a = (x + y)(u + v)$$
$$b = 4(x + y)^2 uv$$
$$c = 4(u + v)^2 xy$$
$$d = 16\, xyuv.$$

Ces équations sont incompatibles, si l'on n'a pas $a^2d = bc$. Lorsque cette condition est remplie, le système est indéterminé ; en effet, on a, quel que soit γ, l'identité

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{u} + \sqrt{v}) = (\sqrt{\lambda x} + \sqrt{\lambda y}) \times \left(\sqrt{\frac{u}{\lambda}} + \sqrt{\frac{v}{\lambda}}\right).$$

On peut profiter de cette indétermination pour prendre entre deux des quantités une relation quelconque. Posons par exemple $x + y = 1$,

On déterminera alors facilement u et v, puis x et y. On tire, en effet, des deux premières équations

$$u = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b};$$

$$v = \frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b}.$$

En portant ces valeurs dans la troisième, on a xy, et

d'après la relation qui donne $x + y$, on trouve

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2a}\sqrt{a^2 - c};$$

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2a}\sqrt{a^2 - c},$$

On voit que si $a^2 - b$ et $a^2 - c$ sont des carrés parfaits, x et y sont rationnels, et que, par conséquent, la formule est avantageuse, puisque l'on a un produit de facteurs qui sont des sommes de radicaux simples.

Soit par exemple

$$U = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3}\sqrt{6}}$$

On a ici :

$$a = 1; \quad b = \frac{3}{4}; \quad c = \frac{8}{9}; \quad d = \frac{6}{9};$$

la condition $a^2d = bc$ est remplie et l'on a

$$a^2 - b = \frac{1}{4}$$

$$a^2 - c = \frac{1}{9}.$$

Donc

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}; \quad y = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3};$$

puis

$$u = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4};$$

$$v = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Donc

$$U = \frac{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{3} + 3)}{6}.$$

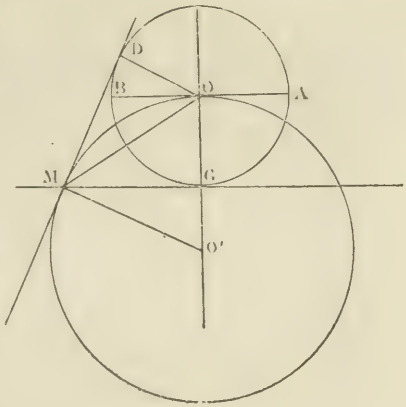
QUESTION 56

Solution par M. Sagols, élève au Lycée de Toulouse.

On considère un cercle C *de centre* O : *soit* AB *un diamètre fixe de ce cercle ; par le point* O *on mène une circonférence* C′ *tangente à* AB ; *puis on mène une tangente commune aux cercles*

C *et* C′ ; *on propose de trouver le lieu des points de contact de cette dernière droite avec* C′.

Soit MD la tangente commune, D étant le point de contact avec C, et M le point de contact avec la circonférence C′ de centre O′. Menons MO′, DO et joignons M au point G où OO′ rencontre C. Les angles O′MO et O′OM sont égaux, de même O′MO et MOD′ puisque OD, O′M sont parallèles, donc O′OM = MOD. Les triangles MOG, MOD sont donc égaux, et l'angle MGO étant droit, le point M est sur la tangente au point G au cercle C.



Réciproquement tout point M de la droite appartient au lieu ; en effet, menons par M la tangente à C autre que GM, joignons O à D et menons en M la parallèle à DO qui coupe OG en O′. Menons MO qui est la bissectrice de DOG. Les angles OMO′ et DOM sont égaux, donc OMO′ = MOO′ ; par suite O′O = O′M et le cercle de centre O et de rayon OO′ est tangent à AB en O, et à MD au point M.

Le lieu du point M se compose donc des deux tangentes à C parallèles à AB.

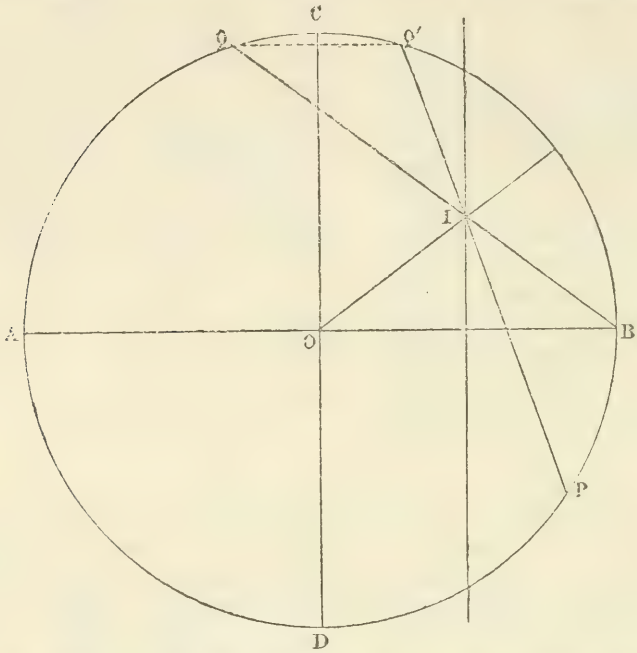
QUESTION 62

Solution par M. Mascart, élève au Lycée Henri IV.

On donne un cercle O *et deux diamètres rectangulaires* AB, CD. *A partir de* A, *on prend un arc* AQ *et dans l'autre sens un arc* AP *tel que* arc AP = 2 . arc AQ.

Soit Q′ *le symétrique de* Q *par rapport à* CD. *On demande*

le lieu géométrique décrit par le point I, *commun aux droites* PQ′ *et* BQ. (G. L.)



Les arcs QQ′ et BP, égaux à $180^\circ - 2AQ$, sont égaux, d'où il résulte arc QQ′B = arc Q′BP et QB = Q′P. Donc OI est bissectrice de l'angle de ces cordes et passe par le milieu de l'arc Q′B. Alors IOB = IBO comme ayant même mesure $\frac{AQ}{2}$. Le point I est sur la perpendiculaire au milieu de OB.

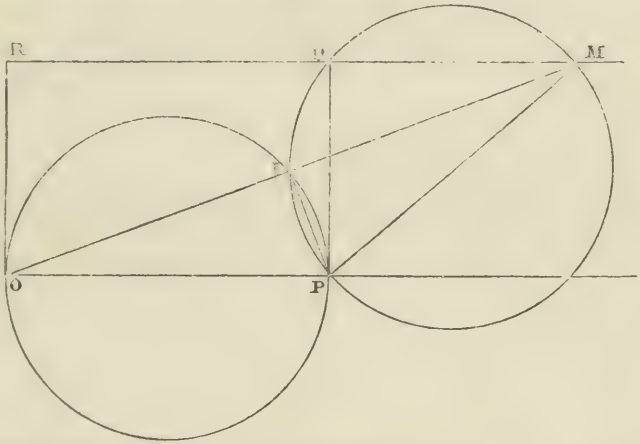
Le point Q décrivant la circonférence O, la droite BQ passera par tous les points de la perpendiculaire considérée : donc celle-ci est le lieu cherché.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Corne, à Nice ; Tresselle, à Angers ; Guignard, à Angoulême ; H. S., à Toulouse ; Savonnet, à Salins ; Zuloaga, à Paris ; Desplanques, à Condé ; Bablon, à Épinal.

QUESTION 67

Solution par M. Aubry, élève au Lycée de Charleville.

On considère un rectangle dont les sommets sont les points O,P,Q,R. *Par les points* PQ *on fait passer une infinité de cercles; soit* Δ *l'un d'entre eux. Ce cercle* Δ *coupe* QR *en un point* M *et la droite* OM *coupe à son tour le cercle* Δ *en un point* I; *démontrer que le lieu du point* I *est une circonférence.*



Tirons IP et PM, qui passe évidemment par le centre du cercle Δ. L'angle PIM étant droit, il en sera de même de l'angle OIP. Le lieu du point I est donc la circonférence décrite sur OP comme diamètre.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Vialard, à Cluny; Chapron à Vincennes; Bougarel, à Toulon; Taratte, à Evreux; Bordier, à Blanzac; de, Kerdrel, à Keruzoret.

QUESTIONS PROPOSÉES

81. — Dans un triangle on connaît la base et l'angle au sommet. Trouver le lieu du centre du cercle des neuf points.

82. — Dans un triangle on connaît la bissectrice de l'angle au sommet, le rectangle des deux côtés qui comprennent cet angle et la différence des angles à la base ; on demande de construire ce triangle.

83. — Trois nombres entiers sont en proportion géométrique ; si le second augmente de 8, la progression devient arithmétique ; mais si, alors, le dernier terme augmente de 64, elle redevient géométrique. Trouver les trois nombres.

84. — Démontrer géométriquement que l'on a

$$\frac{\pi}{4} = \text{arc tg}\,\frac{p}{q} + \text{arc tg}\,\frac{q-p}{p+q}.$$

85 — Par un point pris sur la bissectrice d'un angle mener une droite qui forme avec les côtés de l'angle un triangle de surface donnée.

86. — On considère deux droites rectangulaires Δ et Δ', et sur Δ on prend un point fixe P. Par ce point P on fait passer une transversale mobile δ, qui forme avec Δ et Δ' un triangle rectangle. Imaginons maintenant le cercle inscrit, et soit A le point de contact de ce cercle avec Δ, et B son point de contact avec δ. Démontrer que la droite AB passe par un point fixe. *(G. L.)*

87. — On considère une parabole P, et une droite Δ perpendiculaire à l'axe de cette parabole et située à une distance du sommet S égale au double du paramètre ; une parallèle à l'axe rencontre P au point A et Δ au point B. Trouver le lieu du centre des cercles circonscrits au triangle SAB quand cette parallèle se déplace. On suppose, pour bien fixer la position de la droite Δ, que cette droite rencontre réellement la parabole. *(G. L.)*

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 7254-3.

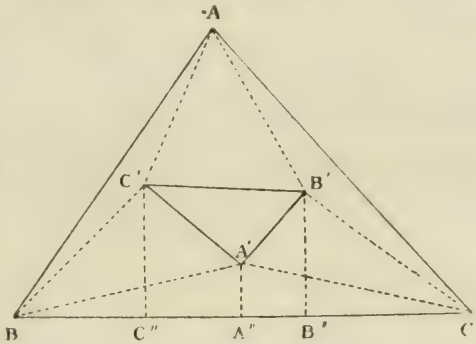
ÉTUDE SUR LE CERCLE DE BROCARD

Par M. **A. Morel.**

Suite, voir pages 10, 33 et 62.)

14. — *Les triangles semblables* ABC *et* $A_1B_1C_1$ *ont le même centre de gravité.*

Cette propriété n'est pas particulière à ces deux triangles; il est facile de voir que, si l'on construit intérieurement sur les côtés du triangle ABC comme bases, des triangles isoscèles semblables BCA′, CAB′, ABC′; les points A′, B′, C′ sont les sommets d'un triangle ayant même centre de gravité que le triangle ABC. Il suffit, pour le prouver, de faire voir que la distance du centre de gravité de ABC à l'un des côtés de ce triangle est la moyenne arithmétique des distances de A′, B′, C′ à ce même côté.



Soit φ l'angle à la base des triangles considérés; prenons les distances des sommets au côté BC, par exemple; nous avons, d'après les notations adoptées, en appelant A′A″, B′B″, C′C″ ces distances :

$$A'A'' = A'B \sin \varphi. = \frac{a \sin \varphi}{2 \cos \varphi}.$$

$$B'B'' = B'C \sin(C - \varphi) = \frac{b \sin (C - \varphi)}{2 \cos \varphi}.$$

$$C'C'' = C'B \sin(B - \varphi) = \frac{c \sin (B - \varphi)}{2 \cos \varphi}.$$

Ajoutons, nous aurons

$$A'A'' + B'B'' + C'C'' = \frac{a \sin \varphi + b \sin (C - \varphi) + c \sin (B - \varphi)}{2 \cos \varphi}$$

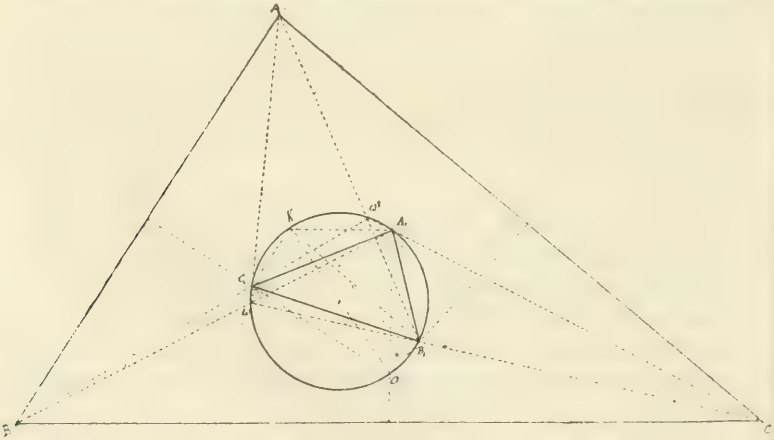
en réduisant, nous trouvons que le facteur de $\sin \varphi$ s'annule et il reste

$$A'A'' + B'B'' + C'C'' = \frac{b \sin C + c \sin B}{2} = h_a,$$

en appelant h_a la hauteur correspondant au côté a. Donc, la somme de ces distances est bien égale à trois fois la distance du centre de gravité de ABC au côté BC. On prouverait de même que la somme des distances de A', B', C', au côté CA est égale à trois fois la distance du centre de gravité de ABC au côté CA.

Il en résulte bien que le centre de gravité du triangle A'B'C' est confondu avec le centre de gravité du triangle ABC, *quel que soit l'angle* φ.

15. — Considérons sur le cercle de Brocard le point K.



diamétralement opposé au centre O du cercle circonscrit à ABC. L'angle OC_1K est droit; donc OC_1, étant perpendiculaire à AB, C_1K est parallèle à AB; on verrait de même que A_1K est parallèle à BC, et que B_1K est parallèle à AC. Par suite on a ce théorème :

Si par le sommet de chacun des triangles isoscèles ABC_1, BCA_1, CAB_1, *on mène une parallèle à la base, ces trois droites con-*

courent en un même point, qui est sur le cercle de Brocard et diamétralement opposé au point O, *centre du cercle circonscrit au triangle* ABC.

16. — De plus, les distances du point K à chacun des côtés AB, BC, CA, sont respectivement égales aux distances à ces mêmes côtés des sommets C_1, A_1, B_1; or, ces points étant les sommets de triangles isoscèles semblables, les distances sont proportionnelles aux côtés; donc *les distances du point* K *aux trois côtés du triangle sont proportionnelles à ces côtés.*

17. — Les triangles A_1BC et KBC sont équivalents, puisque la ligne A_1K est parallèle à BC; il en est de même des triangles B_1CA et KCA; des triangles C_1AB et KAB. Mais les triangles ayant pour sommet commun le point K, et pour bases les côtés du triangle ABC, ont évidemment pour somme la surface du triangle ABC; donc

La somme des surfaces des triangles isoscèles semblables ayant pour bases les côtés du triangle et pour sommets les points A_1, B_1, C_1, est égale à la surface du triangle ABC.

18. — Si l'on considère une médiane d'un triangle, et la symétrique de cette médiane par rapport à la bissectrice issue du même sommet, on a une nouvelle droite que M. Émile Lemoine a appelée la *médiane antiparallèle* du triangle; il est facile de voir que si d'un point de la médiane antiparallèle on abaisse des perpendiculaires sur les deux côtés aboutissant au même sommet que cette médiane, ces perpendiculaires sont proportionnelles aux côtés sur lesquelles elles tombent; par suite, ces droites se coupent en un point, dont les distances aux côtés sont proportionnelles à ces côtés, et qui, par suite, n'est autre chose que le point K. Ce point est celui que M. Lemoine appelé le *centre des médianes antiparallèles.*

19. — Nous avons vu précédemment que les deux points segmentaires ω et ω' sont tels que si on les joint à un même sommet, A par exemple, les deux lignes ainsi obtenues sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle A. Dans un mémoire publié dès 1865 par M. le colonel Mathieu, alors

capitaine, dans les *Nouvelles Annales*, l'auteur s'occupe d'un certain mode d'inversion déterminé ainsi : Par les sommets d'un triangle on mène trois droites concourant en un même point, et, par chaque sommet, la symétrique par rapport à la bissectrice de la droite correspondante; ou, comme l'appelle l'auteur, l'*inverse* de cette droite. Ces droites se coupent en un même point, que le colonel Mathieu appelle l'*inverse* du premier.

Ce théorème est très facile à démontrer d'une manière élémentaire. En effet, une droite passant par le sommet d'un triangle peut être définie par le rapport de ses distances aux deux côtés qui comprennent l'angle considéré; soit donc une droite définie par le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ des distances d'un point aux deux côtés AB et BC; il est évident que sa symétrique par rapport à la bissectrice est déterminée par le coefficient $\frac{\mu}{\lambda}$, en prenant les distances dans le même ordre.

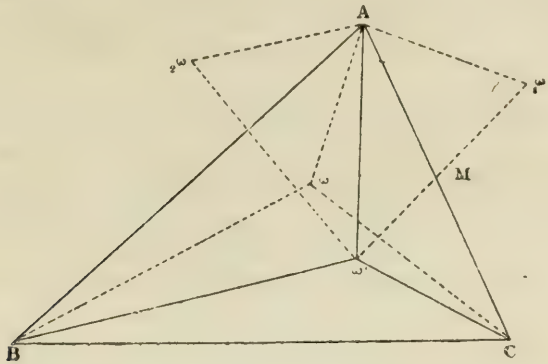
Cela posé, on peut déterminer deux droites par les coefficients $\frac{\lambda}{\mu}$, $\frac{\mu}{\nu}$; la droite passant par le troisième sommet et le point de rencontre des deux premières est alors déterminé par le rapport $\frac{\lambda}{\nu}$.

Les inverses des deux droites auront pour coefficient $\frac{\mu}{\lambda}$ et $\frac{\nu}{\mu}$; la droite qui passe par leur point de rencontre et le troisième sommet a pour coefficient $\frac{\nu}{\lambda}$; c'est donc l'inverse de la troisième droite.

20. — Une propriété intéressante de deux points inverses est que *ces deux points peuvent toujours être considérés comme les foyers d'une conique inscrite au triangle.*

Prenons par exemple les deux points segmentaires, qui sont deux points inverses. Soit ω_1 le symétrique de ω par rapport à AC ; il résulte de la définition des points ω_1 et ω'

que $\omega'A\omega_1 = BAC$; de même si ω_2 est le symétrique de ω par rapport à AB, on a $\omega'A\omega_2 = BAC$; les deux triangles $\omega'A\omega_1$



et $\omega'A\omega_2$ sont donc égaux, et $\omega'\omega_1 = \omega'\omega_2$. On verrait de même que, si l'on prenait le symétrique de ω par rapport à BC, le cercle décrit de ω' comme centre avec $\omega'\omega_1$ pour rayon passerait par ce troisième point. Donc l'ellipse ayant pour foyers ω et ω' et son grand axe égal à $\omega'\omega_1$ est tangente aux trois côtés du triangle ABC.

Il en résulte que, si l'on projette les points inverses ω e ω sur les côtés du triangle, *les six points ainsi obtenus sont sur une même circonférence*, qui a pour centre le milieu de $\omega\omega'$ et son diamètre égal à $\omega'\omega_1$.

21. — On obtient facilement les axes de l'ellipse inscrite au triangle ABC, et ayant pour foyers ω et ω'. En effet, le triangle $A\omega'\omega_1$ donne

$$\omega'\omega_1^2 = A\omega^2 + A\omega'^2 - 2A\omega_1.A\omega'\cos A.$$

Mais nous savons que l'on a

$$A\omega = \frac{b^2c}{K}, \quad A\omega' = \frac{c^2b}{K}$$

en posant $$K = \sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}.$$

On en tire, après réductions faciles, en exprimant cos A en fonction des trois côtés,

$$\omega'\omega_1^2 = \frac{a^2b^2c^2}{K^2}$$

ou $$\omega'\omega_1 = \frac{abc}{K} = \frac{4RS}{K}.$$

D'autre part, on a vu que l'on avait

$$\sin\alpha = \frac{2S}{K}.$$

Donc $$\omega'\omega_1 = 2R\sin\alpha.$$

Nous avons vu en outre que la distance des deux points segmentaires avait pour expression

$$\omega\omega' = 2R\sin\alpha\sqrt{1 - 4\sin^2\alpha}.$$

On en tire facilement pour le carré du petit axe

$$\omega'\omega_1{}^2 - \omega\omega'^2 = 16R^2\sin^4\alpha;$$

donc l'ellipse considérée a pour axes

$$2R\sin\alpha, \quad \text{et} \quad 4R\sin^2\alpha.$$

22. — Cherchons à déterminer la position du point M de contact de l'ellipse avec le côté AC. Pour cela, nous remarquerons que les valeurs trouvées plus haut pour $A\omega_1$, $A\omega'$ et $\omega'\omega_1$ nous donnent les relations

$$\frac{A\omega_1}{b} = \frac{A\omega'}{c} = \frac{\omega'\omega_1}{a}.$$

Donc le triangle $A\omega'\omega_1$ est semblable au triangle ABC, et l'angle ω' est égal à l'angle B. Du reste, on sait que l'angle $\omega'AM$ est égal à α; donc dans le triangle $A\omega'M$ on a

$$\frac{AM}{\sin B} = \frac{A\omega'}{\sin(B+\alpha)}.$$

On verrait de même que l'angle $M\omega'C$ est égal à A, et que l'on a

$$\frac{CM}{\sin A} = \frac{C\omega'}{\sin(B+\alpha)}.$$

Donc $$\frac{CM}{AM} = \frac{C\omega'\sin A}{A\omega'\sin B}.$$

Mais $$C\omega' = \frac{b^2a}{K}; \quad A\omega' = \frac{c^2b}{K}:$$

donc $$\frac{C\omega'}{A\omega'} = \frac{ab}{c^2}.$$

D'autre part on a $$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b}.$$

Donc $$\frac{CM}{AM} = \frac{a^2}{c^2}.$$

Il résulte de là que le point M est le pied de la médiane antiparallèle correspondant au sommet B. Donc

L'ellipse inscrite au triangle ABC, *et ayant ses foyers aux points segmentaires, a ses points de contact aux pieds des médianes antiparallèles du triangle* ABC.

(A suivre.)

SUR UN POINT DE LA DISCUSSION

DU SECOND DEGRÉ

Par M. **P. Barrieux**, professeur au lycée de Mont-de-Marsan.

(*Suite*, voir page 78.)

Problème II. — *Étant donnés une sphère et un de ses plans diamétraux, mener un second plan parallèle au premier, de telle sorte que le volume du segment sphérique compris entre les deux plans soit au volume du tronc de cône inscrit dans le segment dans un rapport donné* m. (B. S. Paris.)

Désignons par R le rayon de la sphère, par y la hauteur du segment, et par x le rayon de sa petite base. Les deux équations du problème seront

$$\begin{cases} \frac{1}{6}\pi y^3 + \frac{1}{2}\pi y\,(R^2 + x^2) = \frac{1}{3}m\pi y\,(R^2 + Rx + x^2) \\ x^2 + y^2 = R^2 \end{cases}$$

d'où, éliminant y et simplifiant,

$$(m - 1)x^2 + mRx + (m - 2)R^2 = 0. \qquad (1)$$

Discussion. — Les valeurs positives de x donneront des troncs de première espèce, les valeurs négatives des troncs de deuxième espèce.

Par conséquent, il faut et il suffit que les racines de l'équation (1) soient réelles et comprises entre — R et + R.

La condition de réalité est

$$m^2R^2 - 4(m - 1)(m - 2)R^2 \geqq 0$$

ou

$$-3m^2 + 12m - 8 \geqq 0,$$

d'où l'on tire aisément

$$\frac{b - 2\sqrt{3}}{3} \leq m \leq \frac{b + 2\sqrt{3}}{3}. \qquad (2)$$

Si l'on désigne par P le produit des facteurs obtenus en remplaçant successivement x par $+$ R et $-$ R dans le premier membre de l'équation (1), on a

$$\begin{aligned} P &= R^4 (m - 1 + m + m - 2)(m - 1 - m + m - 2) \\ &= 3R^4 (m - 1)(m - 3) \end{aligned}$$

et l'on voit que P est négatif pour toutes les valeurs de m comprises entre 1 et 3, positif pour toutes les autres.

La condition $x'^2 x''^2 < R^2$ donne

$$\frac{(m-2)^2 R^4}{(m-1)^2} < R^4$$

d'où

$$\begin{aligned} (m-2)^2 - (m-1)^2 &< 0, \\ -(2m - 3) &< 0, \\ m &> \frac{3}{2}. \qquad (3) \end{aligned}$$

Le produit des racines étant de même signe que $(m - 1)(m - 2)\,R^2$, on voit que les racines seront de signe contraire pour toutes les valeurs de m comprises entre 1 et 2, de même signe pour toutes les autres.

La somme des racines étant de même signe que

$$-m(m-1)\,R$$

cette somme sera positive pour les valeurs de m comprises entre 0 et 1, négative pour toutes les autres.

Nous pouvons résumer tous ces résultats dans les deux tableaux suivants :

$$\text{var. de } m \left\{ \begin{array}{ccccccccc} P > 0 & & & P < 0 & & & P > 0 & & \\ \frac{b - 2\sqrt{3}}{3} & \ldots & 1 & \ldots & \frac{3}{2} & \ldots & 2 & \ldots & 3 \ldots \frac{b + 4\sqrt{3}}{3} \\ x'^2 x''^2 > R^4 & & & & & & x'^2 x''^2 < R^4 & & \end{array} \right.$$

$$\text{var. de } m \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x'x'' > 0 & & & x'x'' < 0 & & & x'x'' > 0 & & \\ \frac{b - 2\sqrt{3}}{3} & \ldots & 1 & \ldots & \frac{3}{2} & \ldots & 2 & \ldots & 3 \ldots \frac{b + 2\sqrt{3}}{3} \\ x'x'' > 0 & & & & & & x' + x'' < 0 & & \end{array} \right.$$

Il n'y a pas lieu d'examiner les valeurs de m moindres que $\frac{b - 2\sqrt{3}}{3}$ ou plus grandes que $\frac{b + \sqrt{3}}{3}$, puisque pour ces valeurs les racines de l'équation (1) sont imaginaires.

Nous avons trois cas à examiner :

Premier cas. $\frac{b - 2\sqrt{3}}{3} < m < 1.$

On a en même temps $P > 0$ et $x'^2 x''^2 > R^4$. Aucune racine n'est donc comprise entre $-R$ et $+R$. Donc *pas de solution.*

Deuxième cas. $1 \leq m < 3.$

On a $P \leq 0$. Celle des deux racines qui a la plus petite valeur absolue est donc seule comprise entre $-R$ et $+R$. (Th. I.)

En nous servant du deuxième tableau, nous pouvons constater les résultats suivants :

1° $1 < m \leq 2$. Les deux racines sont de signe contraire et la racine positive est la plus petite en valeur absolue. Donc *une solution positive donnant un tronc de première espèce.*

2° $2 < m < 3$. Les deux racines sont négatives. On prendra la plus petite en valeur absolue. Donc *une solution négative donnant un tronc de deuxième espèce.*

Troisième cas. $3 \leq m \leq \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}.$

On a en même temps $P > 0$ et $x'^2 x''^2 < R^4$. Les deux racines sont donc comprises entre $-R$ et $+R$. (Th. II). Les deux racines conviennent.

Le deuxième tableau montre que ces deux racines sont négatives. Donc *deux solutions négatives donnant deux troncs de deuxième espèce.*

Pour la valeur limite $m = \frac{b + 2\sqrt{3}}{3}$ on a une racine double négative.

Tableau de la discussion :

	1re espèce	2e espèce
$\frac{b-2\sqrt{3}}{3} < m < 1$	.... 0	.... 0 ....
$1 < m < 2$	.... 1	.... 0 ....
$2 < m < 3$	.... 0	.... 1 ....
$3 < m \leq \frac{b+2\sqrt{3}}{3}$	.... 0	.... 2 ....
$m > \frac{b+2\sqrt{3}}{3}$	.... 0	.... 0 ....

On peut saisir par ces deux exemples les avantages de la méthode que nous proposons. Quand les deux tableaux des variations du paramètre ont été dressés, la discussion est virtuellement faite et les détails s'en dégagent très aisément.

Les deux théorèmes dont nous venons de faire usage ne sont que des cas particuliers d'un théorème général qu'on peut énoncer de la manière suivante :

Théorème. — *Étant donnés deux nombres quelconques* α, β, *et l'équation du second degré,*

$$ax^2 + bx + c = 0. \qquad (1)$$

1° Si l'on a

$$(a\alpha^2 + b\alpha + c)(a\beta^2 + b\beta + c) < 0,$$

les deux racines de l'équation (1) *sont réelles, et l'une d'elles est comprise entre* α *et* β ;

2° Si l'on a en même temps

$$\begin{cases} (a\alpha^2 + b\alpha + c)(a\beta^2 + b\beta + c) > 0, \\ (2a\alpha\beta + b\alpha + b\beta + 2c)(a\alpha^2 + b\alpha + c) < 0, \end{cases}$$

les deux racines de l'équation (1) *sont supposées réelles et sont comprises entre* α *et* β.

Voici comment on peut démontrer ce théorème (*) :

(*) Cette démonstration nous a été inspirée par la question suivante, proposée par Jacobi et résolue par M. Laisant dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* de Catalan, t. V, p. 23. — « Discuter le nombre de racines réelles comprises entre a et b au moyen de la substitution $y = \frac{b-x}{x-a}$. »

Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0.$ (1)

Faisons un changement d'inconnue et posons

$$y = \frac{\beta - x}{x - \alpha}. \tag{2}$$

A toute valeur réelle de x correspondra une valeur réelle de y, et réciproquement. De plus y sera positif pour toutes les valeurs de x comprises entre α et β, négatif pour toutes les autres.

En portant dans l'équation (1) la valeur de x tirée de l'équation (2), on a, tous calculs faits,

$$(a\alpha^2 + b\alpha + c)\, y^2 + (2a\alpha\beta + b\alpha + b\beta + 2c)\, y + a\beta^2 + b\beta + c = 0. \tag{3}$$

Donc : 1° si l'on a

$$(a\alpha^2 + b\alpha + c)\,(a\beta^2 + b\beta + c) < 0 \tag{4}$$

Les deux valeurs de y fournies par l'équation (3) sont réelles et de signes contraires ; donc les deux racines de l'équation (1) sont réelles et l'une d'elles est comprise entre α et β.

2° Si les racines de l'équation (1) sont réelles, et si l'on a en même temps

$$(1)\quad \begin{cases} (a\alpha^2 + b\alpha + c)\,(a\beta^2 + b\beta + c) > 0. & (5) \\ (2a\alpha\beta + b\alpha + b\beta + 2c)\,(a\alpha^2 + b\alpha + c) < 0. & (6) \end{cases}$$

les deux racines de l'équation (3) seront réelles et positives, et par suite les deux racines de l'équation (1) seront comprises entre α et β. — Le théorème est donc démontré.

Remarque I. — Pour le cas particulier où $\beta = -\alpha$, le système I devient

$$\begin{cases} (a\alpha^2 + b\alpha + c)\,(a\alpha^2 - b\alpha + c) > 0, & (7) \\ (c - a\alpha^2)\,(a\alpha^2 + b\alpha + c) < 0, & (8) \end{cases}$$

Ce système peut se simplifier en observant que les deux facteurs de l'inégalité (7) étant de même signe, leur somme $2(c + a\alpha^2)$ a le même signe que chacun d'eux. On peut donc, dans l'inégalité (8), remplacer le facteur $(a\alpha^2 + b\alpha + c)$ par le facteur de même signe $(c + a\alpha^2)$, et le système devient

$$\begin{cases} (a\alpha^2 + b\alpha + c)\,(a\alpha^2 - b\alpha + c) > 0, \\ (c - a\alpha^2)\,(c + a\alpha^2) < 0. \end{cases}$$

Remarque II. — Pour le cas particulier où $\alpha = 0$, le sys-

tème (I) devient

$$c\,(a\beta^2 + b\beta + c) > 0, \qquad (9)$$

$$c\,(b\beta + 2c) < 0. \qquad (10)$$

Toutes ces formules peuvent être introduites utilement dans la discussion des problèmes du second degré.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

Poitiers.

D'un point I, pris sur une droite DD′, et à une distance $IF = \alpha$ d'un point fixe F, on mène une droite quelconque HH′ faisant les angles α et β avec DD′ et IF. A quelle distance x du point I trouvera-t-on sur cette droite un point M, équidistant de E et de DD′ ? Discuter les conditions de possibilité. — Quelle relation doit-il exister entre les angles α et β dans le cas d'une solution unique ? Déduire de cette relation la propriété de la tangente à la parabole.

Lille.

Une cuvette ayant à peu près la forme d'un verre de montre est limitée par deux surfaces dont les coupes MSN, MS′N faites par un plan vertical mené suivant l'axe de révolution sont des paraboles telles que la distance FF′ de leurs foyers respectifs vaut le double de l'épaisseur $e = SS'$ de la cuvette à l'endroit le plus bas. On demande à quelle distance au-dessus ou au-dessous du plan horizontal MN se trouvent situés ces deux foyers F et F′, sachant que l'épaisseur SS′ ou e est de un centimètre.

— Le 10 juillet 1882, à midi moyen, la déclinaison du soleil est boréale, et égale à 22°14′. On demande pour ce même jour ; 1° quelle est la hauteur du soleil à midi au-dessus de l'horizon de Lille (latitude 50°38′44″); 2° quels sont les points de la terre qui le voient passer à leur zénith ; 3° quels sont les points de la terre pour lesquels il ne se couche pas.

— Effectuer la somme suivante, composée des sommes d'une infinité de progressions prolongées à l'infini :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots \\
&+ \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \ldots \\
&+ \frac{1}{17} + \frac{1}{17^2} + \frac{1}{17^3} + \ldots \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \frac{1}{4^n+1} + \frac{1}{(4^n+1)^2} + \frac{1}{(4^n+1)^3} + \ldots
\end{aligned}$$

à l'infini.

— Par le sommet d'un angle A d'un triangle ABC, on mène une droite AD faisant avec AB un angle x. Comment faut-il prendre cet angle de manière que, si l'on fait tourner la figure autour de AB, le volume engendré par ADB soit le quart du volume engendré par ABC. (Les éléments du triangle sont connus; mais les formules demandées ne devront contenir que les angles A,B,C).

— Connaissant deux côtés d'un triangle et la médiane qui part de leur point de concours, trouver l'angle de ces deux côtés,

— Une pierre homogène, dont la densité est 3, est taillée en forme de tétraèdre; elle repose sur le sol, et a pour base horizontale un triangle équilatéral ABC de un mètre de côté ; sa hauteur SA tombe sur le milieu H du côté AB. On demande quelle force horizontale SF parallèle à CH il faudra appliquer au sommet S pour ébranler la pierre en la faisant tourner autour de AB, support fixé sur le sol.

— Une ellipse et une parabole ont un foyer commun, et le sommet de la parabole coïncide avec le centre de l'ellipse. Connaissant le grand axe et la distance focale de l'ellipse, trouver la distance du foyer commun à l'un des points d'intersection, et la distance de ce même foyer aux points de rencontre de l'axe commun : 1° avec la tangente à la parabole au point de rencontre; 2° avec la normale à l'ellipse au même point.

— Connaissant dans un triangle b et c et la longueur x de la bissectrice de l'angle qu'ils comprennent, calculer cet angle, ainsi que les segments déterminés par la bissectrice sur le troisième côté.

— Les deux faces d'une lentille biconcave ont pour sections, faites par un plan mené suivant l'axe principal, deux paraboles égales. Le diamètre de la lentille est 2 décim.: l'épaisseur sur le bord 5 millim., l'épaisseur sur l'axe 1 millimètre. On demande à quelle distance l'un de l'autre sont les foyers des deux paraboles.

— Vitesse dans un mouvement varié. La calculer quand $e = \frac{1}{3}t^3$.

— Trouver la surface d'un triangle dont les hauteurs sont respectivement 200^m, 210^m et 220^m.

— Un trapèze a ses bases respectivement de 400^m et de 300^m, et sa hauteur est de 200^m. A quelle distance de la grande base faut-il mener une parallèle à cette base pour en détacher une bande de un hectare contiguë à la grande base.

— Étant donné un cercle O et un point A dans le plan de ce cercle, à une distance a du centre, on mène par ce point A une corde BC de longueur d. Calculer les segments AB, AC, et l'angle OAC.

Paris.

On lance de bas en haut, sur une même verticale, et à deux secondes d'intervalle, deux corps pesants avec une même vitesse de 25 mètres par seconde. On demande comment varie la distance qui sépare en deux corps, et en quel point ils se rencontreront.

— A quelle condition doivent satisfaire les deux nombres a et b pour qu'il existe des valeurs réelles de x vérifiant l'équation $$a \sin x + b \cos x = 1.$$

— Le rayon de la base d'un cône est R; son apothème est a. Un plan P, parallèle à la base du cône, divise le solide en deux parties qui ont la même surface totale. Ex-

primer à l'aide de r et de R la distance du plan au sommet du cône.

— On donne $\cos 2a = \frac{1}{2}$ trouver $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$.

— Étant donnée une circonférence de rayon R, on considère un parallélogramme circonscrit ABCD. Démontrer que ce parallélogramme est un losange, et que l'on a

$$\frac{1}{AC^2} + \frac{1}{BD^2} = \frac{1}{4R^2}.$$

Quel est, parmi tous ces losanges circonscrits, celui qui a la plus petite surface?

— Deux sphères égales, de rayon R, sont placées de telle manière que chacune d'elles passe par le centre de l'autre. Calculer le volume commun aux deux sphères.

— Si les extrémités A et B d'une corde AB de longueur constante glissent sur une circonférence de rayon R, un point quelconque de la corde mobile décrit également une circonférence. Calculer la surface de la couronne comprise entre les deux circonférences connaissant la longueur $AC = a$, $Bc = b$ des deux segments de la corde.

— a et b étant donnés, entre quelles limites m doit-il être compris pour que l'équation $\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} = \frac{1}{x+m}$ ait ses racines réelles?

— Sur les quatre côtés d'un carré ABCD on construit des triangles équilatéraux. Démontrer que le quadrilatère formé en joignant les sommets extérieurs de ces triangles est un carré, et calculer sa surface.

EXAMENS ORAUX POUR SAINT-CYR

— On donne un triangle rectangle ABC, mener DE parallèle à AC telle que la figure tournant autour de AB, la ligne brisée CDE engendre une surface égale à πm^2.

— Déterminer l'angle aigu x d'un triangle rectangle ABC, pour que, si du sommet B de l'angle droit B on abaisse BD

perpendiculaire sur l'hypoténuse AC, on ait $AC^2 - 2BD^2 = K^2$. Discuter.

— On donne un demi-cercle AB et une tangente en B. Mener une droite AD rencontrant le cercle en C et la tangente en D, et telle que $2AC^2 + AD^2 = 4K^2$. Prendre pour inconnue l'angle en A.

— On donne un demi-cercle AB et une corde PQ, parallèle à AB; on joint QB et AP. Déterminer PQ pour que l'on ait $AP^2 + PQ^2 + QB^2 = 4m^2$.

— On donne un triangle rectangle ABC. Du sommet A de l'angle droit on abaisse AD perpendiculaire sur BC, puis DE perpendiculaire sur AC et ainsi de suite. Trouver la limite de la somme de toutes ces perpendiculaires.

— On donne un cercle et deux diamètres rectangulaires. Trouver sur le quadrant CB un point M tel que, si on abaisse MP et MQ perpendiculaires sur les deux diamètres, la surface totale engendrée par le rectangle en tournant autour de CD soit égale à $2\pi m^2$.

— On donne un triangle équilatéral. Prendre sur le prolongement de la base CB un point M tel qu'en menant par M une sécante MPQ les deux surfaces PBM et PQA soient dans un rapport donné. On donne $BC = a$, $BM = d$. Prendre pour inconnue l'angle en M.

— Résoudre un triangle rectangle connaissant le périmètre $2p$ et la hauteur h.

— Dans un triangle rectangle on donne l'hypoténuse a et la bissectrice de l'angle B. Calculer B.

— On donne un demi-cercle AB. Comment faut-il mener la corde CD parallèle à AB pour que $\frac{CD}{AC} = K$?

— On donne un demi-cercle AB. Déterminer l'angle en A que doit faire une corde AP rencontrant la tangente BC en Q pour que, si on fait tourner la figure autour de AB, la somme des volumes engendrés par le secteur APNB et le triangle curviligne PNBQ soit égale à un volume donné.

— On donne une circonférence O tangente en A à une droite xy. Quelle doit être la position d'un diamètre CD pour que

si des extrémités C et D on abaisse des perpendiculaires sur xy, CE, DE, on ait

$$\text{surf. EC} + \text{sur CD} + \text{surf. DF} = \pi m^2.$$

— On donne un demi-cercle AB. Placer un rayon OC de telle sorte que surf. OC + surf. CMB $= \pi m^2$, on tourne autour de AB.

— On donne trois cercles tangents extérieurement, de rayons R, R′, R″. Calculer les angles sous lesquels les droites qui joignent les centres se coupent. Aire du triangle curviligne compris entre les trois cercles.

— On mène les deux tangentes communes à deux cercles tangents extérieurement. Connaissant les rayons R et R′ de ces cercles, calculer l'angle α de leurs tangentes.

— Calculer le volume d'un cône en fonction de l'angle au sommet 2α et du rayon R de la sphère qui lui est inscrite.

QUESTION 65

Solution par M. Amaury de Kerdrel, à Keruzoret.

Démontrer les propositions suivantes :

1° La somme de trois cubes consécutifs est toujours divisible par trois fois le terme du milieu et toujours par 9.

2° Le nombre $\dfrac{n^3 + (n+2)^3}{4}$ *est toujours un nombre entier : il est de plus toujours un nombre composé, excepté pour* $n = 1$.

3° Les nombres de la forme arithmétique $n^4 + n^2 + 1$ *sont toujours composés, excepté pour* $n = 1$. (G. L.)

Les trois nombres étant consécutifs sont de la forme

$$a - 1, \quad a, \quad a + 1.$$

La somme de leurs cubes est donc

$$3a^2 + 6a \quad \text{ou} \quad 3a(a^2 + 2).$$

Sous cette forme on voit qu'elle est divisible par $3a$. Pour prouver qu'elle est aussi divisible par 9, il suffit de faire voir que $a(a^2 + 2)$ est toujours un multiple de 3. Si a est un multiple de 3, la proposition est évidente. Autrement a est

de la forme $3k \pm 1$ et $a^2 + 2 = 9k^2 \pm 6k + 3$, ce qui est toujours divisible par 3.

Donc la somme de trois cubes consécutifs est toujours divisible par 9.

2° Le nombre $\frac{n^3 + (n+2)^3}{4}$ se réduit en divisant la somme des deux cubes par la somme de leurs racines à

$$\frac{(n+1)\,[n^2 - n(n+2) + (n+2)^2]}{2} = \frac{(n+1)(n^2+2n+4)}{4}$$

Sous cette forme on voit que le nombre proposé est toujours entier ; et de plus qu'il est toujours composé, excepté pour $n = 1$.

3° Les nombres arithmétiques de la forme $n^4 + n^2 + 1$ reviennent à $(n^2+1)^2 - n^2$

ou $(n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)$

Ils sont donc toujours composés excepté dans le cas où $n = 1$.

QUESTION 68

Solution par M. Perrin, élève du Lycée Charlemagne.

On considère un cercle fixe Δ, *et un diamètre fixe* PQ *de ce cercle. Soit* A *un point supposé mobile sur* Δ; *abaissons de ce point une perpendiculaire* AB *sur* PQ, *et du point* A *comme centre, avec* AB *comme rayon, décrivons une circonférence qui rencontre* Δ *aux points* C *et* D ; *la droite* CD *rencontre* AB *au point* I.

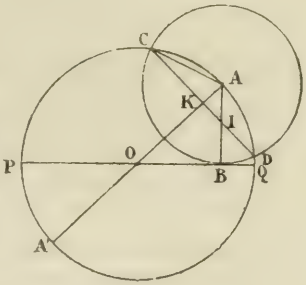
1° Trouver le lieu décrit par le point I ;

2° Démontrer que si l'on considère sur Δ *deux points* A *et* A' *tels que la corde* AA' *soit vue du centre* O *sous un angle droit, et si l'on répète au point* A' *la construction indiquée pour le point* A, *les distances du point* O *aux deux cordes* CD *et* C'D' *ainsi déterminées ont une somme constante;*

3° Étudier les variations de CD *quand le point* A *se déplace sur* Δ ;

4° Après avoir remarqué que le point I *est le milieu de* AB, *on propose de démontrer que les cercles décrits sur* BP *et* BQ *comme diamètres sont tangents l'un et l'autre à la droite* CD';

5° CD *rencontre* PQ *en un point* R; *démontrer que la polaire du point* R *par rapport aux droites* AP *et* AQ *passe par le pied de la perpendiculaire abaissée de* B *sur* CD. (G. L.)



1° Soit O le centre du cercle fixe, K le point d'intersection de AO avec CD et A' le point diamétralement opposé à A.

Les triangles semblables AKI, ABO donnent

$$AI \,.\, AB = AK \,.\, AO;$$

mais $$AK \,.\, AO = \frac{AK \,.\, AA'}{2} = \frac{\overline{AC}^2}{2} = \frac{AB^2}{2}$$

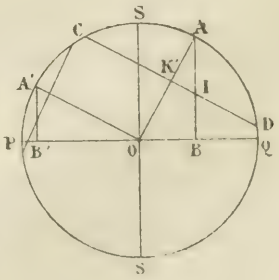
donc $$AI = \frac{AB}{2}$$

et I est le milieu de AB; le lieu de I est donc une ellipse ayant PQ pour grand axe et pour petit axe $\frac{PQ}{2}$.

2° De $$AK \,.\, AO = \frac{\overline{AB}^2}{2}$$

on tire $$AK = \frac{\overline{AB}^2}{2AO};$$

d'où $$OK = AO - \frac{\overline{AB}^2}{2AO}; \quad (1)$$



de même $$OK' = A'O - \frac{\overline{A'B'}^2}{2A'O}$$

mais $$AO = A'O$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{A'B'}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{AO}^2$$

puisque les triangles AOB, A'OB' sont égaux : donc

$$OK + OK' = 2AO - \frac{AO}{2} = \frac{3AO}{2}$$

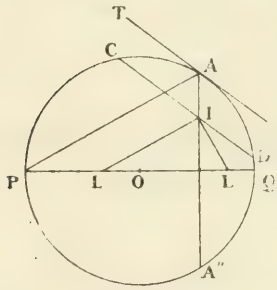
et par suite OK + OK' est constant.

3° $$\overline{CK}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{OK}^2;$$

mais d'après (1) OK varie de AO à $\frac{AO}{2}$ quand A se déplace de Q en S, QS étant le rayon perpendiculaire à PQ; donc $\overline{CK}^2$ part de O quand A est en Q, croît à mesure que A se rapproche de S et atteint son maximum $\frac{3}{4}\overline{AO}^2$ lorsque A est en S; par suite CD varie de O à AO $\sqrt{3}$ quand le point A se déplace de Q en S.

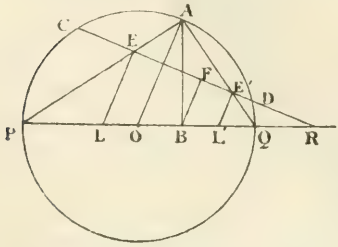
Quand le point A va de S en P, CD décroît de AO $\sqrt{3}$ à O, puis le point A allant de P en S' diamétralement opposé à S', CD croît de nouveau de O à AO $\sqrt{3}$ pour décroître ensuite de AO $\sqrt{3}$ à O quand le point A décrit l'axe S'Q.

4° Soit L le milieu de PB; joignons AP, LI; A étant milieu de l'arc CD, la tangente AT en A à la circonférence Δ est parallèle à la corde CD. P est le milieu de l'arc AA'', A'' étant le symétrique de A par rapport au diamètre PQ; donc PA est bissectrice de l'angle TAB, et LI qui lui est parallèle est bissectrice de l'angle CIB.



La circonférence de rayon LB sera donc tangente à la corde CD.

On verrait de même que la circonférence de rayon L'B sera tangente à la même corde.



5° Abaissons de L la perpendiculaire LE sur CD:

$$LE = LB = LP;$$

d'autre part AO = OP; les triangles PLE, PAO sont semblables et les trois points P, E, A sont en ligne droite.

De même E' étant le pied de la perpendiculaire abaissée de L' sur CD, les trois points Q, E', A sont en ligne droite.

Abaissons de B la perpendiculaire BF sur CD:

on a
$$\frac{RL}{RL'} = \frac{LE}{L'E'} = \frac{BL}{BL'};$$
la division (RBLL') est donc harmonique et par suite la division (RFEE'), projection de la précédente sur RDC, l'est aussi et AF est la polaire de R par rapport aux droites AP, AQ.

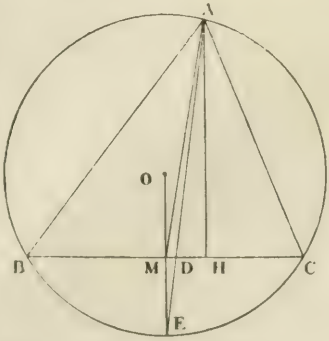
NOTA. — La même question a été résolue par MM. Vialard, à Cluny; Chapron, institution Peschard, à Vincennes; Gindre, à Pontarlier; Bordier, à Blanzac; de Kerdrell, à Keruzoret; Jean Slabochevitsch, à Saint-Pétersbourg; Giat, Rougelin, Sauve, à Moulin; G. La Cheinais, lycée Henri IV, à Paris; Aubry, à Charleville; Lafay, Bourgarel, à Toulon; Naura, à Vitry-le-François.

QUESTION 69

Solution par M. AUBRY, élève au Lycée de Charleville.

Dans un triangle ABC, *on a*
$$2R = \frac{l^2}{h}\sqrt{\frac{m^2 - h^2}{l^2 - h^2}}$$
R, l, m, h, *étant respectivement le rayon du cercle circonscrit, la bissectrice, la médiane et la hauteur partant d'un même sommet.* (E. Lemoine.)

Soit en effet O le centre du cercle circonscrit; de ce point abaissons la perpendiculaire OM sur BC; elle rencontre BC en M et le cercle en E. On sait que AM est médiane et que AE est bissectrice de l'angle A. Soit de plus AH la hauteur correspondante au côté BC.



Les triangles semblables MDE et ADH donnent la proportion
$$\frac{DE}{AD} = \frac{MD}{DH};$$
d'où
$$\frac{AD.DE}{AD^2} = \frac{MD}{DH}.$$

En remarquant que AD.DE = BD.DC, l'égalité précédente devient $\frac{AD.DC}{AD^2} = \frac{MD}{DH} \cdot \frac{AD^2 + BD.CD}{AD^2} = \frac{MD + DH}{DH}$.

Or, l'on sait que

$$AB.AC = AD^2 + BD.DC.$$

Donc

$$\frac{AB.AC}{AD^2} = \frac{MH}{DH}$$

et

$$AB.AC = AD^2 . \frac{MH}{DH}.$$

D'après un théorème connu

$$AB.AC = 2Rh$$

et de plus

$$MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \sqrt{m^2 - h^2} \quad DH = \sqrt{AD^2 - AH^2}$$
$$= \sqrt{l^2 - h^2}.$$

Il vient donc finalement

$$2Rh = l^2 \sqrt{\frac{m^2 - h^2}{l^2 - h^2}}$$

ou

$$2R = \frac{l^2}{h} \sqrt{\frac{m^2 - h^2}{l^2 - h^2}}.$$

NOTA. — La même question a été résolue par MM. A. de Kerdrel, à Keruzoret; Bourgarel, à Toulon; Rougelin, à Moulins.

QUESTION 71

Solution par M. BOUGAREL, élève au Lycée de Toulon.

Dans un triangle ABC, *on mène les bissectrices* BD, CF *des angles en* B *et* C, *et la droite* DF. *Démontrer que si d'un point quelconque* M *de* DF, *on abaisse les perpendiculaires* MP, MQ, MN, *respectivement sur* AB, AC, BC, *on a*

$$MN = MP + MQ.$$

Des points D et F abaissons des perpendiculaires DG, DH, FI, FJ, sur les côtés opposés à ces points.

Les triangles semblables FMP, FDG, nous donnent

$$MP = \frac{FM}{FD} \times GD.$$

De même, les triangles semblables FDI, MQD nous donnent

$$MQ = \frac{MD}{FD} \times FI.$$

Mais on a $FI = FJ$, et $DG = DH$, puisque CF et BD sont les bissectrices des angles à la base.

D'autre part, on sait que l'on a

$$MD \times FI + MF \times GD = MN \times FD.$$

En comparant cette relation, mise sous la forme

$$\frac{MD}{FD} \times FI + \frac{MF}{FD} \times GD = MN,$$

à la somme des deux premières, on trouve bien

$$MN = MP + MQ.$$

Nota. — Ont résolu la même question MM. Taratte, à Évreux; Vialard, Berdon, à Cluny; Millot, à la Flèche; Giat, Julien Sauve, Rouzelin, à Moulins; Abadie, à Mont-de-Marsan; Aubry, à Charleville; Slabochevitsch, à Saint-Pétersbourg; Thiélou, école Lavoisier, à Paris.

QUESTIONS PROPOSÉES

88. — Étant donnée la série illimitée

$$7, 13, 25, 43, 67, 97, 133, 175, \ldots$$

dont le terme général, celui qui en a n avant lui, est

$$xn = 3(n^2 + n) + 7,$$

démontrer les propositions suivantes :

1. Sur cinq termes consécutifs, pris à volonté dans la série, un terme est divisible par 5 ;

2. Sur sept termes consécutifs, deux sont divisibles par 7 ;

3. Sur treize termes consécutifs, deux sont divisibles par 13 ;

4. Aucun terme de la série n'est égal à un cube ;

5. Une infinité de termes, tels que $x_2 = 25$; $x_{39} = 4225$, etc., sont des carrés divisibles par 25.

Nota. — La deuxième et la troisième proportion sont comprises, comme cas particuliers, dans la suivante. Si N est un nombre premier, de la forme $6n + 1$, sur n termes consécutifs de la série, deux sont divisibles par N. — On peut affirmer aussi que, à l'exception de 5, aucun nombre premier

de la forme $6m - 1$ ne peut diviser la série; mais ces propositions, que nous énonçons ici incidemment, et parce que l'occasion s'en présente, tiennent à des principes moins élémentaires que ceux qui servent à justifier les principes ci-dessus. *(S. Réalis.)*

89. — On donne trois points en ligne droite, A, B, C; par A et B on fait passer une circonférence quelconque O; soit P le pôle de AB par rapport à O; la droite PC rencontre O en des points I et I'; trouver le lieu de ces points, lieu qui est une circonférence. *(G. L.)*

90. — On considère une parabole P, et sur l'axe de cette courbe un point Q, situé à une distance $2p$ du sommet O. Soit A un point quelconque de P; on projette A en B sur la tangente au sommet; les droites QB et OA se coupent en un point I, dont on demande le lieu géométrique. *(G. L.)*

91. — On considère des paraboles P, ayant pour sommet un point fixe O et passant aussi par un autre point fixe A. 1° Les tangentes à P aux points O et A se coupent en un point I, trouver le lieu de ce point; 2° la tangente au point A et l'axe de la parabole se coupent en un point I', trouver le lieu de ce point. On déterminera ces deux lieux par des considérations purement géométriques. *(École centrale, 1879.)*

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 9164-3.

LA GÉOMÉTRIE RÉCURRENTE

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite et fin*, voir pages 3, 25, 49 et 73.)

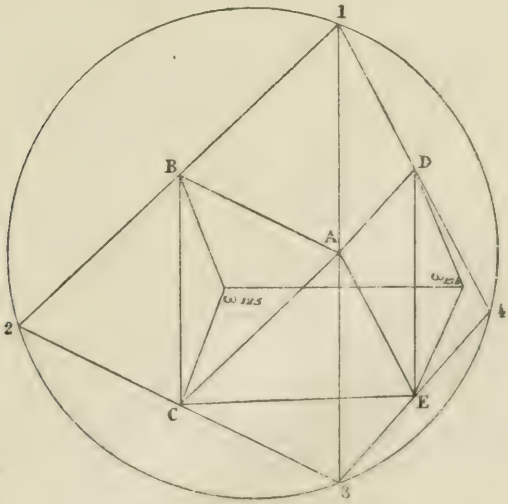
QUATRIÈME APPLICATION

Étude de géométrie récurrente sur le cercle des neuf points.

29. — Considérons maintenant quatre points 1, 2, 3, 4, sur une circonférence Δ, et désignons par ω_{123} le centre du cercle des neuf points du triangle 1, 2, 3.

Nous établirons d'abord la propriété suivante :

Théorème. — *La droite $\omega_\alpha\,\omega_\beta$, est parallèle à la droite qui joint les deux points, dont les numéros ne sont pas communs aux indices α et β, de plus elle est égale à la moitié de cette droite.*



Prenons, par exemple, les deux triangles 1, 2, 3 : 1, 3, 4 soit A le milieu de la corde 1, 3, point commun aux deux

circonférences ω_{123}, ω_{134} ; soient enfin B, C, D, E les milieux de cordes 1, 2 ; 2, 3 ; 1, 4 ; 3, 4. Les circonférences que nous voulons considérer sont celles qui sont circonscrites aux triangles ABC, ADE. Il est remarquable que ces circonférences sont égales.

En effet, les rayons de ces cercles sont donnés par les formules

$$R_{123} = \frac{BC}{2 \sin BAC}, \quad R_{134} = \frac{DE}{2 \sin DAE};$$

on a d'ailleurs BC = DE, chacune de ces droites étant égale à la moitié de la corde 1, 3 ; de plus, les angles BAC et DAE sont supplémentaires ; on a donc bien $R_{123} = R_{134}$.

Il résulte de cette remarque que les deux triangles $BC\omega_{123}$, $DE\omega_{124}$ sont égaux ; on voit aussi que leurs côtés sont, deux à deux, parallèles.

En particulier les côtés $C\omega_{123}$, $E\omega_{125}$ sont égaux et parallèles ; par suite, la figure $CE\omega_{123}\,\omega_{124}$ est un parallélogramme. Les deux lignes CE et $\omega_{123}\,\omega_{124}$ étant égales et parallèles, si l'on ajoute que CE est parallèle à la corde 2, 4, et égale à sa moitié, la proposition énoncée se trouve ainsi établie.

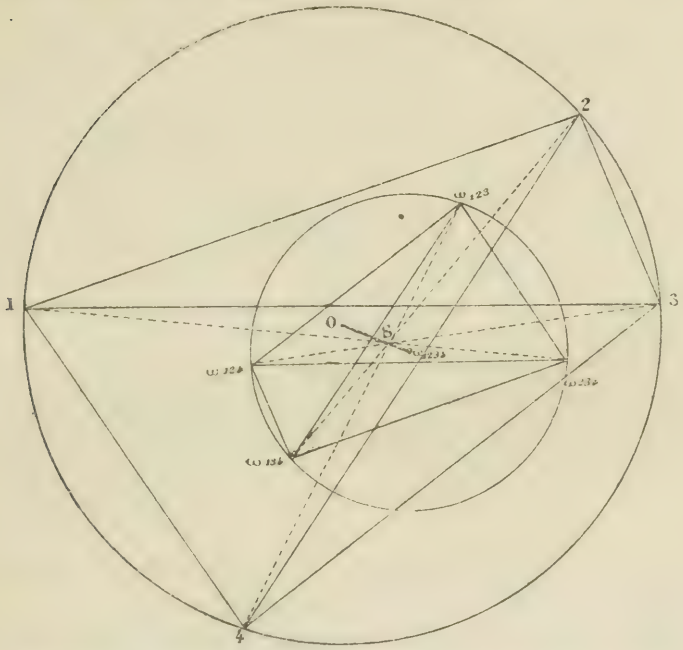
30. Théorème. — *Étant donnés quatre points sur une circonférence, si l'on considère les quatre triangles déterminés par ces points, pris trois à trois, et les centres des cercles des neuf points qui correspondent à ces triangles, les quatre points ainsi obtenus sont situés sur une circonférence.*

En effet, le quadrilatère ω_{123}, ω_{234}, ω_{341}, ω_{412}, est homothétique au quadrilatère proposé 1, 2, 3, 4. Les quatre points ω sont donc situés sur une même circonférence, dont nous désignerons le centre par ω_{1234}.

L'homothétie de ces deux quadrilatères prouve encore que la droite qui joint le point 1 à ω_{234}, et les trois droites analogues, concourent au même point S_{1234}. Ce point S_{1234} est situé sur la droite qui joint le centre O de la circonférence donnée au point ω_{1234}, et partage intérieurement cette droite, dans le rapport de 2 à 1. En d'autres termes on a $S_{1234}O = 2S_{1234}\omega_{1234}$.

31. — Prenons maintenant cinq points 1, 2, 3, 4, 5, sur

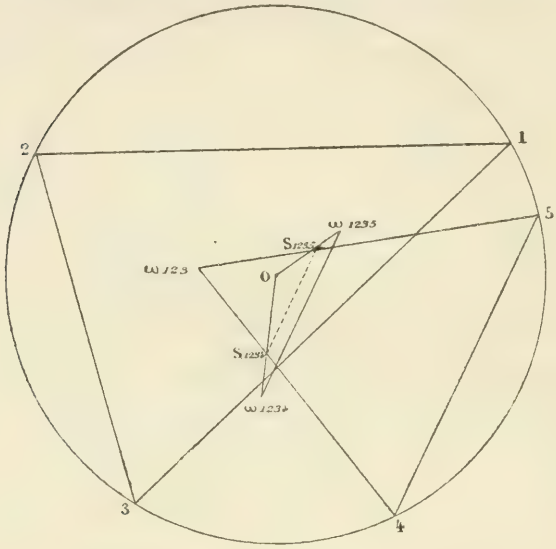
une circonférence de centre O; ces points étant combinés quatre à quatre, on obtient, par la propriété précédente, cinq points ω d'ordre 4, que nous allons considérer.



Les deux cercles ω_{1234}, ω_{1235} ont un point commun, le point ω_{123}. D'après ce que nous avons dit tout à l'heure, si l'on joint ω_{123} au point 4, et si l'on partage cette droite dans le rapport de 1 à 2, on obtient un point S_{1234}, qui est tel que la droite OS_{1234}, prolongée d'une longueur moitié moindre donne justement le point ω_{1234}. En appliquant cette remarque au quadrilatère 1, 2, 3, 5, on obtient la point ω_{1235}, et la similitude des triangles fait reconnaître facilement que la droite ω_{1234} ω_{1235} est parallèle à la corde 4, 5, et égale à sa moitié.

De cette remarque on conclut que les cinq points ω, d'ordre 4, sont situés sur une circonférence dont le centre est désigné par ω_{12345}. Il est facile de généraliser ces propriétés

et laissant au lecteur le soin de compléter, conformément à la méthode déjà exposée dans les exemples précédents,



les explications nécessaires, nous énoncons le théorème général suivant :

Théorème. — *1° Si l'on désigne par* ω_α, ω_β *deux points* ω *d'ordre* $(n - 1)$, *la droite* $\omega_\alpha\ \omega_\beta$ *est parallèle à la droite qui joint les deux points dont les numéros ne sont pas communs aux indices* α *et* β ; *de plus, elle est égale à la moitié de cette droite.*

2° Les n *points* ω *d'ordre* $(n - 1)$ *sont situés sur une circonférence ; le centre de cette circonférence* $\omega_{123\ldots n}$ *est le point* ω *d'ordre* n.

3° La droite qui joint le point n *au point* $\omega_{12\ldots(n-1)}$ *et les* n *droites analogues concourent en un même point* $S_{12\ldots n}$.

4° Si l'on joint le centre O, *de la circonférence donnée, au point* $S_{12\ldots n}$ *et si l'on prolonge cette droite d'une longueur moitié moindre, on a le point* $\omega_{12\ldots n}$ *lui-même.*

32. — Une étude de géométrie récurrente peut encore

se faire par un procédé différent de celui que nous avons indiqué jusqu'ici. Nous ne voulons que signaler cette voie nouvelle et un exemple nous suffira pour en montrer l'esprit.

Imaginons quatre points jetés sur un plan. Désignons ces points par A_1, B_1, C_1, D_1 ; et supposons que l'on considère en particulier le triangle $B_1 C_1 D_1$. Avec ce triangle et au moyen d'une certaine construction géométrique, on détermine un point A_2. Cette même construction, appliquée successivement aux triangles $A_1D_1C_1$, $A_1D_1B_1$, $A_1B_1C_1$, donne trois autres autres points B_2, C_2, D_2, points analogues de A_2. On obtient ainsi une figure $A_2B_2C_2D_2$, qui est déduite de la figure $A_1B_1C_1D_1$ d'après la loi proposée. On comprend alors que, de la figure $A_2B_2C_2D_2$, on peut, par la même construction, faire naître une troisième figure $A_3B_3C_3D_3$; de celle-ci une quatrième, et, en continuant indéfiniment cette suite de constructions, on obtient des figures qui se succèdent, d'après une loi géométrique, dérivent les unes des autres comme les termes d'une série, et qui jouissent, les unes par rapport aux autres, de propriétés géométriques que l'on peut rechercher.

33. — C'est encore la circonférence des neuf points qui va nous servir pour montrer un exemple de cette récurrence des figures; mais, pour plus de commodité, nous empruntons, pour la démonstration qui suit, quelques propriétés à la géométrie des coniques.

Prenons quatre points A_1, B_1, C_1, D_1 dans un plan. On sait : 1° que ces quatre points déterminent une hyperbole équilatère H ; 2° que la circonférence des neuf points du triangle $A_1B_1C_1$, par exemple, passe par le centre O de cette hyperbole; 3° que les points de concours des hauteurs des triangles $A_1B_1C_1$, $B_1C_1D_1$, etc., appartiennent à H.

On peut donc énoncer le théorème suivant, par l'énoncé duquel nous terminerons ce travail :

Théorème.— *Considérons un quadrilatère formé par quatre points* A_1, B_1, C_1, D_1 ; *désignons par* A_2 *le centre des hauteurs du triangle* $B_1C_1D_1$ *et considérons le quadrilatère* $A_2B_2C_2D_2$. *En*

opérant sur celui-ci, comme sur le proposé, on obtient un nouveau quadrilatère $A_3B_3C_3D_3$ *et ainsi de suite : on arrive ainsi, après* $(n-1)$ *constructions de ce genre, à un quadrilatère que nous désignerons par* $A_nB_nC_nD_n$ *; les circonférences des neuf points, en nombre égal à* $4n$, *qui correspondent aux triangles* $A_1B_1C_1$, $B_1C_1D_1$, *etc....* $B_nC_nD_n$, *concourent au même point.*

EXAMENS ORAUX POUR SAINT-CYR

Algèbre.

— Résoudre $1 + bx + \dfrac{x^2}{a-x} = \dfrac{a^2}{a-x}$.

— Résoudre
$$x + y = xy,$$
$$x + y = x^2 - y^2.$$

— Résoudre
$$xy + a(x+y) = p,$$
$$x^2 + y^2 + b(x+y) = q.$$

— Résoudre
$$xy = a^2,$$
$$x^2 - y^2 = b^2.$$

— Résoudre
$$x + 2(y+z) = c,$$
$$y + 2(z+x) = b,$$
$$z + 2(x+y) = a.$$

— Faire la somme
$$\frac{a}{b} + \frac{a+r}{bq} + \frac{a+2r}{bq^2} + \frac{a+3r}{bq^3} + \ldots + \frac{a+nr}{bq^n}.$$

— Maximum et minimum de $\dfrac{3x^2 - 5x + 3}{2x - 1}$.

— Trouver le maximum et le minimun de $\dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$.

— Résoudre $\sqrt{mx + a} + \sqrt{x + b} = c$.

— Réduire à sa plus simple expression $\dfrac{x^4 - 16}{x^3 + 2x^2 + 4x + 8}$

— Réduire à sa plus simple expression $\dfrac{8x^3 - 12x^2 + 6x - 1}{4x^2 - 1}$

— Résoudre $(x+1) + \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} = \dfrac{a}{x-1}$.

— Résoudre
$$x^3 + y^3 = a$$
$$x + y = b.$$

— Étudier les variations de $\dfrac{x^2 + 1}{x^2 + 4x + 3}$.

— Résoudre l'inégalité $\dfrac{ax - b}{a'x - b'} > 0$.

— Résoudre
$$x - y = a.$$
$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = b.$$

— Résoudre $\dfrac{x^2}{x^2 - 1} + \dfrac{x^2}{x^2 - 9} = 1$.

— Construire $x = \dfrac{2a}{\sqrt{5} + 1}$; $x = \dfrac{a}{\sqrt{2} - 1}$;

$x = a\sqrt{\dfrac{m}{n}}$; $x = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{b\sqrt{2}}$; $x = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$;

$x = \dfrac{a\sqrt{5} \cdot \sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; $x = r\sqrt{2 + \sqrt{3}}$; $x = a\sqrt{7}$.

— Sachant que x' et x'' sont racines de l'équation $x^2 + px + q = 0$, former une équation du second degré dont les racines soient $x' + 2x''$ et $x'' + 2x'$.

— Variations de la fonction $y = \dfrac{1}{5x^2 - 2x - 3}$.

— Variations de $y = \dfrac{1}{2x - 3}$.

— Condition de réalité des racines de l'équation
$$(3\lambda + 1)x^2 - (4\lambda + 1)x + 12\lambda = 0.$$
Limites de λ pour que les racines soient plus grandes que 2.

— Résoudre et discuter
$$(m - 2)x^2 + (m - 3)x + (m - 4) = 0.$$

— Résoudre et discuter
$$(m - 1)x^2 + 2(m + 1)x + 2ac = 0.$$

— On donne la fonction $y = \sqrt{x^4 - 13x^2 + 36}$; entre quelles limites doit varier x pour que y soit réel ?

— Étudier les variations de la fonction $y = x^4 - 3x^2 + 7$, x variant de $-\infty$ à $+\infty$.

— Résoudre $\dfrac{m}{1 - 2m} > 0$.

— Résoudre
$$x + ay = b$$
$$y - ax = c.$$

— Étudier les variations de la fonction $y = \frac{3x}{x^2 - 7}$, x variant de $-\infty$ à $+\infty$.

— Résoudre $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 12} > 0.$

— Étant donné $mx^4 + 2x^2 + (m - 1) = 0$, quelles valeurs faut-il donner à m pour que les quatre racines soient réelles?

— Variations de la fonction $y = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$.

— On donne $y = \sqrt{x^4 - 16x^2 + 63}$. Dans quels intervalles x doit-il être compris pour que y soit réel ?

— Soit $(m - 2)x^4 - (m - 1)\ x^2 + m = 0$. Discuter, x devant être réel et positif.

— Résoudre $x^8 - 1 = 0.$

Trigonométrie.

— Résoudre $\sin x + \cos^2 x = m.$

— Résoudre $\operatorname{tg}^2 x + \cos^2 x = m^2.$

— Résoudre $\frac{\sin^2 x}{2 - \sin^2 x} = m.$ Discuter.

$\frac{2\sin^2 x}{3 - \sin^2 x} = m.$ Discuter.

— Résoudre $m^2 \sin^2 x - 2 \sin x - 3 = 0.$ Discuter.

— Rendre calculable par logarithmes
$$\sin a + \sin 2a + \sin 3a.$$

— Résoudre $m^2 \sin^2 x - 3 \sin x + 2 = 0.$ Discuter.

— Rendre calculable par logarithmes
$$\cos a + \cos b + \cos c + \cos (a + b + c).$$

— Résoudre $m^2 \cos x + \sin 2x = m.$

— Résoudre $\cos x + 3\cos 2x = m.$

— Résoudre $m \cos x = \operatorname{tg} x.$ Discuter.

— Résoudre $\sin x = \cos 5x$

— Résoudre $\frac{\sin^2 x}{2 - m \cos x} = k.$ Discuter.

— Résoudre $x + y = a;$
$\sin x \sin y = b.$

— Résoudre $(\sin x - \cos x) \sin x = a.$

— Résoudre $x - y = a.$
$\sin^2 x - \sin^2 y = b.$

— Vérifier $\operatorname{Tg} a + \operatorname{cotg} a = \dfrac{2}{\sin 2a}.$

— Rendre calculable par log.

$$\sin a + \sin (a + h) + \sin (a + 2h) + \sin (a + 3h).$$

— Vérifier $\cos 2a = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} 2a}.$

— Vérifier $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{1 - \sin a}{\cos a}.$

— Que devient $\dfrac{\operatorname{tg} x}{1 - \cos x}$ si x tend vers o ?

— Simplifier le produit $\dfrac{\sin 2a}{1 + \cos 2a} \times \dfrac{\cos a}{1 + \cos a}.$

— Que devient l'expression $\dfrac{\sin a - \sin b}{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}$ quand a tend vers b?

— Résoudre $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x = \sin x.$

— Simplifier et calculer l'expression

$$\cos a \cos (b - c) + \cos b \cos (c - a) + \cos c \cos (a - b).$$

Mécanique.

— Dans un plan incliné quel doit être l'angle α pour que le corps de poids P soit en équilibre, sachant qu'il est sollicité par trois forces $\dfrac{P}{3}$ tirant l'une de bas en haut, l'autre horizontalement et l'autre parallèlement au plan ?

— On donne une circonférence et un diamètre vertical AB. Trouver l'angle α que doit faire un rayon OC avec AB pour qu'un mobile partant de O arrive en C dans le même temps qu'un mobile parti de A met pour arriver en B.

— On donne une barre homogène de poids P et de lon-

gueur l, s'appuyant sur un plan horizontal AO sans frottement et contre un mur poli OK, incliné d'un angle α sur OA. On connaît l'angle β que fait la droite AB avec OK. Calculer la force Q qu'il faut faire agir horizontalement pour maintenir la barre en équilibre.

— Quatre forces sont appliquées en A et sont situées dans un même plan. AP est horizontale et vaut 8^k; AQ fait avec AP un angle de 30° et vaut 12^k; AF un angle de 60° avec AQ et vaut 10^k; AD un angle de 30° avec AF et vaut 15^k. Trouver la résultante en grandeur et en direction.

— Un mobile pesant 30^k descend le long d'un plan incliné de 45°. En un point B sa vitesse est de 4^m. La longueur AB est de 6^m. On demande au bout de combien de temps il sera en A.

— En un point O situé à l'intérieur d'un triangle ABC on applique trois forces dont les grandeurs et les directions sont OA, OB, OC. On demande de trouver leur résultante et son expression en fonction de la distance du point O au point de rencontre G des médianes. Démontrer que la résultante passe en G.

— On fait monter un corps pesant 500^k le long d'un plan incliné de 30°, à l'aide d'une corde qui s'enroule sur une poulie dont le rayon est de 20^{cm} et qui est mise en mouvement par une manivelle dont la longueur est $1^m,50$. Quelle est la force qu'il faut appliquer au bras de la manivelle pour maintenir le corps en équilibre?

QUESTION 70

Solution, par M. Aubry, élève au Lycée de Charleville.

Dans un triangle ABC, *si* h_1, h_2, h_3 *sont les trois hauteurs partant des points* A, B, C, : x, y, z *les distances du point de concours des hauteurs aux côtés* BC, AC, AB, *on a*

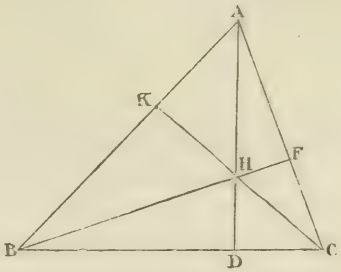
$$\frac{1}{h_3 z} + \frac{1}{h_2 y} = \frac{h_1 + x}{h_1 x (h_1 - x)}.$$

(E. Lemoine.)

Soient AD, BF, CK les hauteurs h_1, h_2, h_3, et H leur point de concours; on a donc

$HD = x$; $HF = y$: $HK = z$.

On a donc à démontrer l'égalité suivante



$$\frac{1}{CK \,.\, HK} + \frac{1}{BF \,.\, HF} + \frac{AD + DH}{AD \,.\, DH \,.\, AH};$$

cette égalité peut s'écrire

$$\frac{AH \,.\, HD}{CK \,.\, HK} + \frac{AH \,.\, HD}{BF \,.\, HF} = \frac{2AD - AH}{AD} = 2 - \frac{AH}{AD}.$$

Mais les quadrilatères AKDC, AFDB sont inscriptibles ; on a donc $AH \,.\, HD = BH \,.\, HF = CH \,.\, HK$.

On en tire $\dfrac{CH}{CK} + \dfrac{BH}{BF} + \dfrac{AH}{AD} = 2$.

On sait que si l'on abaisse les perpendiculaires, OP, OQ, OR sur les trois côtés, on a

$$AH = 2OP\,; \quad BH = 2OQ\,; \quad CH = 2OR\,;$$

donc l'égalité à démontrer devient

$$\frac{OP}{AD} + \frac{OQ}{BF} + \frac{OR}{CK} = 1\,:$$

cette égalité se démontre facilement, car on peut l'écrire

$$\frac{a \,.\, OP}{a \,.\, AD} + \frac{b \,.\, OQ}{b \,.\, BF} + \frac{c \,.\, OR}{c \,.\, CK} = 1$$

ce qui est évident, car chacun des dénominateurs est égal à 2S, et il en est de même de la somme des numérateurs.

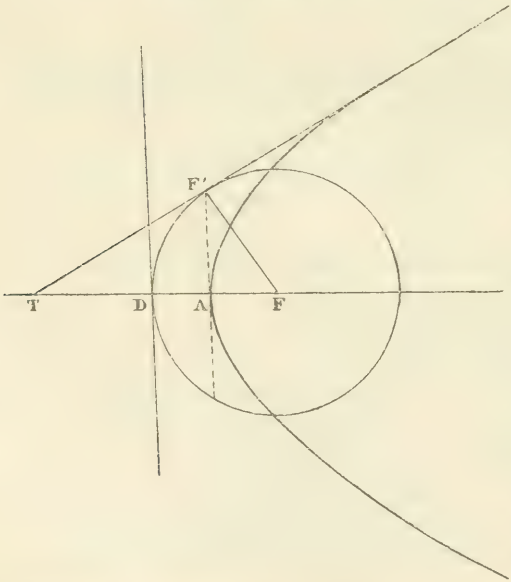
NOTA. — La même question a été résolue par M. de Kerdrel, à Kéruzoret.

QUESTION 73

Solution par M. Amaury de Kerdrel, à Kéruzoret.

On considère une parabole P, *de foyer* F, *et de directrice* Δ. *Démontrer que les tangentes communes à* P *et au cercle décrit de* F *comme centre avec le paramètre pour rayon : 1° se coupent sur l'axe en un point symétrique de* F *par rapport à* Δ ; *2° se coupent sous un angle de 60°.* (G. L.)

1° Soit T le point où la tangente rencontre l'axe, et F′ la projection du foyer sur cette tangente. On sait que cette projection tombe sur la tangente au sommet. Le triangle rectangle TFF′ donne $FF'^2 = AF \times FT$.



Donc $FT = 2p$; et par suite $TD = p = DF$. Le point T est donc le symétrique de F par rapport à Δ.

2° Dans le triangle rectangle TFF′, le côté TF est double de FF′. Donc l'angle TFF′ vaut 60°, et par suite l'angle des tangentes vaut 60°.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Desplanques, à Condé-sur-Escaut ; Bablon, à Épinal ; Plandé, Wateau, à Soissons ; Malcor, à Paris ; Gindre, à Pontarlier ; Martelly, à la Flèche ; Voignier, à Commercy ; Vialard,

à Cluny; Bouillon, Faure, de Guiseuil, institution Sainte-Marie, à Besançon; Julien Sauve, Rougelin, Giat. à Moulin; Bordier, à Blanzac; Naura, à Vitry-le-François; J. Slabochevitsch, à Saint-Pétersbourg; Bourgarel, Lfaay, à Toulon; Aubry, à Charleville; Besson, à Nantes; Jung, Maiallrd, à Beauvais.

QUESTION 75

Solution par M. Jean Slabochevitsch, élève du second corps des Cadets, à Saint-Pétersbourg.

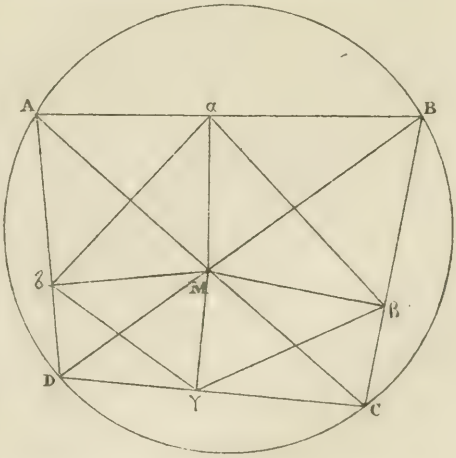
On donne un quadrilatère inscriptible ABCD, *dont les diagonales se rencontrent en* M. *Du point* M, *on abaisse des perpendiculaires sur les quatre côtés du quadrilatère. Les pieds de ces perpendiculaires forment un nouveau quadrilatère* $\alpha\beta\gamma\delta$. *On propose de démontrer que ce quadrilatère est circonscriptible.*

Le quadrilatère $A\alpha M\delta$ étant inscriptible, on a

$$M\alpha\delta = MA\delta;$$

de même le quadrilatère inscriptible $M\alpha B\beta$ donne

$$M\alpha\beta = MB\beta;$$



Mais les angles $MB\beta$, $MA\delta$ sont égaux, puisqu'ils sont inscrits et interceptent le même arc DC; donc $M\alpha$ est la bissectrice de l'angle $\beta\alpha\delta$; on prouverait de même que les autres bissectrices passent au point M. Donc le quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$, dont les bissectrices sont concourantes est circonscriptible à un cercle, ayant le point M pour centre.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Babbon, à Épinal; Grand, Simon, à Lons-le-Saulnier; Julien Sauve, Rougelin, Giat, à Moulins; Vialard, Berdon, à Cluny; Perrin, au lycée Charlemagne; Fauconnet, institution

Sainte-Marie, à Bezançon; Bourgarel, à Toulon; Guérin, à Grandpré; de Kerdrel, à Kéruzoret; Teratte, à Évreux; Thiélon, École Lavoisier, à Paris; Naura, à Vitry-le-François: Bordier, à Blanzac; Aubry, à Charleville; Villademoros à Paris.

QUESTION 76

Solution par M. Vialard à Cluny.

Résoudre le système

$$x\frac{x^2+y^2-d(x+y)}{(y+x-d)(x^2+y^2)}=\frac{a}{d} \qquad (1)$$

$$y\frac{x^2+y^2-d(x+y)}{(x+y-d)(x^2+y^2)}=\frac{b}{d} \qquad (2).$$

(G. L.)

Divisons l'équation (1) par l'équation (2), nous avons

$$\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$$

d'où

$$x=\frac{ay}{b}.$$

Remplaçons x par cette valeur dans l'équation (1). Nous aurons

$$\frac{\frac{ay}{b}\left[\frac{a^2y^2}{b^2}+y^2-d\left(\frac{ay}{b}+y\right)\right]}{\left(\frac{ay}{b}+y-d\right)\left(\frac{a^2y^2}{b^2}+y^2\right)}=\frac{a}{d}.$$

En divisant par y^2 haut et bas, faisant disparaître les dénominateurs, faisant passer tous les termes contenant l'inconnue dans le premier nombre, on a

$$y\left[d\left(\frac{a^2}{b^2}=1\right)-b\left(\frac{a}{b}+1\right)\right]=d\left[d\left(\frac{a}{b}+1\right)\right.$$
$$\left.-b\left(\frac{a^2}{b^2}+1\right)\right],$$

ou

$$y=\frac{d\left[d\left(\frac{a}{b}+1\right)-b\left(\frac{a^2}{b^2}+1\right)\right]}{d\left(\frac{a^2}{b^2}+1\right)-b\left(\frac{a^2}{b^2}+1\right)\left(\frac{a}{b}+1\right)}.$$

Transformons cette valeur. Le numérateur peut s'écrire,

après l'avoir développé

$$d\left[\frac{da}{b}+d-\frac{a^2}{b}-b\right]=d\left[\frac{da+db-a^2-b^2}{b}\right]$$
$$=-\frac{d}{b}\left[a^2+b^2-d(a+b)\right].$$

Le dénominateur devient

$$\left(\frac{a^2}{b^2}+1\right)\left(d-b\right)\left(\frac{a}{b}+1\right)=\left(\frac{a^2}{b^2}+1\right)\left(d-a-b\right)$$
$$=-\frac{(ad^2+b^2)}{b^2}\left(a+b+d\right)$$

et par suite

$$\frac{y}{d}=\frac{b[a^2+b^2-d(a+b)]}{(a+b-d)(a^2+b^2)}$$

nous en déduisons pour x

$$\frac{x}{d}=\frac{a[a^2+b^2-d(a+b)]}{(a+b-d)(a^k+b^2)}$$

et nous voyons que l'on passe de l'une de ces valeurs à l'autre par la simple permutation des lettres a et x d'une part, b et y de l'autre.

Nota. — Ont résolu, MM. Simon, à Salins ; Sauve, Giat, Rougelin, à Moulins ; Bablon, à Épinal ; Desplanques, à Condé-sur-Escaut ; Bourgarel, à Toulon ; Perrin, lycée Charlemagne, à Paris ; Grand à Lons-le-Saulnier ; Berdon à Cluny ; Gindre, à Pontarlier ; Taratte, à Évreux ; de Kerdrel, à Kéruzoret ; Naura, à Vitry-le-François ; Aubry, à Charleville ; Villademoros, à Paris ; Jung, Maillard, à Beauvais ; Fauconnet, Bouillon, École Sainte-Marie, à Besançon ; Lucbeilh, à Pau ; Ménand, à Cherbourg.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NAVALE

Version latine (1 h. 1/2).

Haud multo post Nearchus et Onesicritus, post longius in Oceanum procedere jusserat, superveniunt. Nuntiabant autem quædam audita alia comperta : insulam ostio amnis subjectam auro abundare inopem equorum esse : singulos equos ab iis qui ex continenti trajicere auderent singulis talentis emi. Plenum esse belluarum mare ; æstu secundo eas fieri, magnarum navium corpora æquantes : truci cantu deter-

ritas sequi classem, cum magno æquoris strepitu, velut demersa navigia, rubisse aquas.

Thème anglais (1 h. 1/2).

Et toujours la barque s'enfuit comme l'écume emportée par la cataracte, elle fend le dos de la vague qui s'écroule en poussière sous sa quille. Elle traverse l'Océan convulsé comme si son pilote était un dieu élementaire. La lune se lève ; à sa lueur se dessinent dans la brume les rochers éthérés du Caucase. En un clin d'œil il s'en approche. La mer fait rage à sa base caverneuse et les vagues monstres s'y brisent avec fureur. Qui sauvera la barque ? Elle est sauvée, comme une flèche elle est entrée dans la caverne avec le flot bouillonnant.

Narration (3 heures).

La princesse Rosamonde, non moins capricieuse qu'agile à la course, avait obtenu du roi son père qu'il la laissât disposer de sa main et de la couronne en faveur de l'homme qui réussirait à atteindre avant elle un but déterminé, sous peine de mort pour les prétendants malheureux. Un seul se risqua à tenter l'aventure. Il s'appelait Abibas, et il avait plus d'une raison pour ne tenir que médiocrement à la vie. Il fut agréé malgré sa mauvaise mine : la princesse se croyait assurée d'avance de la victoire. Mais Abibas avait compté sur la ruse bien plus que sur la vitesse de ses jambes. Il s'était muni d'une guirlande de roses, d'une ceinture de soie et d'un petit sac de la même étoffe dans lequel il avait enfermé une balle d'or portant cette inscription : « On ne se lasse jamais de jouer avec moi. » Après quelques alternatives de succès et de revers, il finit par remporter la victoire sur sa rivale. On dira de quels secours lui furent dans ces diverses péripéties les objets dont il s'était muni.

Dessin (1 h. 1/2).

Tête de femme.

Épure (3 heures avec le dessin linéaire).

On a un point A situé dans le second dièdre, distant de 4 centimètres du plan horizontal, et de 3 centimètres du plan

vertical. Mener par ce point une droite faisant avec le plan horizontal un angle de 35° et avec le plan vertical un angle de 41°. Parmi les droites qui satisfont au problème, considérer seulement celle qui a la trace verticale la plus éloignée du plan horizontal et située sur la gauche du plan de profil contenant A. Déterminer la plus courte distance de cette droite et de la ligne de terre.

Trigonométrie (trigonométrie, physique et chimie 4 heures).

Dans le triangle rectiligne ABC on donne :

$$\left.\begin{array}{l} B = 4864,25 \\ C = 2147,73 \\ A = 27^\circ 47' 56'' \end{array}\right\} \text{Calculer A, B, C, et le rayon du cercle circonscrit R.}$$

Physique.

1° Définition de la chaleur spécifique ; méthode des mélanges ;

2° Un vase cylindrique circulaire est fermé par un piston AB dont le rayon R = 0,55. Il contient un gaz à la pression de 760 m/m et à 10°.

On porte la température du gaz à 200°. Quel poids faut-il placer sur le piston pour que le volume reste invariable. On néglige le poids du piston, la dilatation de l'enveloppe et on suppose que la pression extérieure est constamment égale à 760 mm. Le coefficient de dilatation du gaz est 0,0037. La densité du mercure 13,6.

Chimie.

Acide carbonique.

Arithmétique (arithmétique et algèbre 3 heures).

Faire voir que la fraction décimale périodique mixte

$$0.5786486486 4 \ldots\ldots$$

est équivalente à la fraction ordinaire

$$\frac{5786486486 - 5786}{}.$$

Algèbre.

Étant donné un tétraèdre régulier SABC, de côté a, on le coupe par un plan parallèle à la base. On prend la section

abc pour base d'une pyramide dont le sommet *o* est au centre de gravité du triangle de base du tétraèdre. — Comment doit-on mener le plan sécant pour que la pyramide ait un volume maximum ? Déterminer en fonction de *a* l'expression de la surface totale de cette pyramide de volume maximum.

Géométrie (géométrie et statique 3 heures).

1° Deux polyèdres symétriques sont équivalents. Ordre et démonstration succincte des propositions qui servent à établir ce théorème.

2° On donne un cercle de rayon $OC = R$ et 2 points A et B sur le rayon OC tels que

$$OA.OB = R^2$$

Démontrer que le rapport des distances d'un point quelconque M aux 2 points A et B est égal à $\frac{OA}{R}$ lorsque le point M est sur la circonférence, est plus petit que $\frac{OA}{R}$ lorsque M est à l'intérieur du cercle et plus grand que $\frac{OA}{R}$ lorsque M est à l'extérieur.

Statique.

Un cercle matériel de rayon R peut tourner librement autour de son centre O et 3 points ABC sont donnés sur sa circonférence. En A et B sont appliquées 2 forces F_1, F_2 données en grandeurs et en directions. On demande d'appliquer en C une force F_3 telle que le cercle reste en équilibre sous l'action des 3 forces F_1, F_2, F_3, le point O étant fixé invariablement.

Montrer que le problème admet une infinité de solutions. Trouver en grandeur et direction la plus petite force F_3 qui réponde à la question.

SUR LA FORMATION DE CERTAINS TABLEAUX

Par M. **Désiré André.**

I. — Problème direct.

1. — *Étant donnés des objets différents en nombre quelconque, est-il possible d'en former un tableau d'un certain nombre de colonnes, où chaque objet n'entre jamais plus d'une fois dans une même colonne, mais puisse entrer dans plusieurs, et où chaque objet soit complètement déterminé dès qu'on connait les colonnes où il entre?*

Quel que soit le nombre des objets donnés, si le nombre des colonnes est assez grand, ce problème est possible. C'est ce que nous allons démontrer par des raisonnements très simples, fondés sur la considération de la *numération binaire.*

2. — Supposons que, par un procédé quelconque, on ait construit un tableau satisfaisant aux conditions énoncées. Considérons-y l'un des objets donnés, et, parcourant le tableau de gauche à droite, examinons chaque colonne, pour voir si cet objet y figure ou n'y figure pas.

Si nous convenons, en marchant ainsi de gauche à droite, d'écrire un chiffre 1 pour chaque colonne où notre objet figure, et un chiffre 0 pour chaque colonne où il ne figure pas, nous voyons que nous faisons correspondre à notre objet une suite de chiffres 1 et de chiffres 0, dont le nombre total est égal au nombre des colonnes du tableau. Il y a autant de ces suites qu'il y a d'objets. Pour que les objets soient déterminés comme on le demande, il faut et il suffit que ces suites soient toutes différentes.

3. — Il est facile de les rendre telles. Considérons, en effet, l'une quelconque de ces suites. Formée uniquement de chiffres 0 et de chiffres 1, elle représente, quelle qu'elle soit, un certain nombre, écrit dans le système de numération

dont la base est 2. Il suffit donc que les nombres ainsi représentés soient tous différents; et, par conséquent, que les objets considérés correspondent à des nombres tous différents.

Or, dans le système de numération dont la base est 2, on peut écrire tous les nombres qu'on veut, pourvu qu'on y emploie un nombre suffisant de chiffres. Donc, si grand que soit le nombre des objets donnés, on en pourra former un tableau satisfaisant aux conditions énoncées, pourvu qu'on mette, dans ce tableau, un nombre de colonnes suffisant.

Dans la numération binaire, le plus grand nombre de c chiffres est égal à $2^c - 1$. Donc, en donnant c chiffres, au plus, à chaque nombre, on peut, dans ce système de numération, écrire tous les nombres, depuis 1 jusqu'à 2^c exclusivement. Donc, pour qu'on puisse distribuer n objets différents en un tableau de c colonnes, il faudra et il suffira que l'on ait

$$n < 2^c,$$

ou bien, ce qui revient au même,

$$c > \frac{\log n}{\log 2}.$$

4. — Supposons que le nombre n des objets donnés et le nombre c des colonnes du tableau satisfassent à ces inégalités. On pourra former le tableau demandé par un procédé très simple, qui découle tout naturellement de ce qui précède, et qui peut être formulé de la manière suivante :

On placera d'abord les n *objets donnés dans un ordre arbitraire, où on leur assignera les numéros* 1, 2, 3, ... n;

On écrira ensuite ces n *numéros ou nombres dans le système de numération dont la base est* 2 :

On placera enfin chacun des objets donnés dans toutes les colonnes auxquelles, sur son numéro ainsi écrit, correspondent des chiffres 1.

II. — Exemples.

5. — Pour donner un premier exemple, supposons que nous veuillons former un tableau remplissant les conditions énoncées, en prenant pour objets distincts les trente et un

premiers nombres entiers. Puisque 31 n'est autre chose que $2^5 - 1$, il suffira d'y employer cinq colonnes. Nous n'avons, pour former ce tableau de cinq colonnes, qu'à appliquer successivement les trois parties de la règle formulée ci-dessus (4).

Évidemment les trente et un premiers nombres entiers peuvent être regardés comme se servant de numéros à eux-mêmes. La première partie de la règle est donc tout de suite appliquée.

Pour appliquer la seconde, nous n'avons qu'à écrire les trente et un premiers nombres entiers dans le système de numération dont la base est 2, opération qui ne présente aucune difficulté,

Enfin, il nous faut écrire chacun des nombres donnés dans toutes les colonnes où il doit figurer. Soit, par exemple, le nombre 14. Dans la numération binaire, 14 s'écrit 1110, ou bien, pour lui donner autant de chiffres qu'il y a de colonnes, 01110. Appliquant littéralement la troisième partie de notre règle, nous n'écrirons pas 14 dans la première colonne; nous l'écrirons dans la deuxième, dans la troisième et dans la quatrième; nous ne l'écrirons pas dans la cinquième. Opérant de la même façon pour chacun des trente autres nombres donnés, nous formerons le tableau ci-dessous, qui satisfait à toutes les conditions que nous avons énoncées en commençant.

16	8	4	2	1
17	9	5	3	3
18	10	6	6	5
19	11	7	7	7
20	12	12	10	9
21	13	13	11	11
22	14	14	14	13
23	15	15	15	15
24	24	20	18	17
25	25	21	19	19
26	26	22	22	21
27	27	23	23	23
28	28	28	26	25

29	29	29	27	27
30	30	30	30	29
31	31	31	31	31

6. — Pour donner un second exemple, supposons que nous veuillons former un tableau en prenant pour objets distincts les lettres de l'alphabet français, lesquelles, si l'on y compte le W, sont au nombre de 26. Comme 26 est compris entre 16 et 32, c'est-à-dire entre 2^4 et 2^5, il nous faudra donner encore cinq colonnes à notre tableau.

Cela étant, nous donnerons aux différentes lettres les numéros que leur assignent leurs places dans l'alphabet; nous écrirons ces 26 numéros ou nombres dans le système de la numération binaire; enfin, nous placerons chaque lettre dans toutes les colonnes indiquées par son numéro. Nous obtiendrons finalement le tableau que voici :

P	H	D	B	A
Q	I	E	C	C
R	J	F	F	E
S	K	G	G	G
T	L	L	J	I
U	M	M	K	K
V	N	N	N	M
W	O	O	O	O
X	X	T	R	Q
Y	Y	U	S	S
Z	Z	V	V	U
		W	W	W
			Z	Y

7. — Le premier des tableaux précédents, celui qui est relatif aux 31 premiers nombres, est un tableau bien connu: il figure, sous le nom d'*éventail magique*, dans les *Récréations mathématiques* de M. Édouard Lucas. Quant au second, c'est-à-dire à celui des 26 lettres de notre alphabet, il est tout à fait analogue au tableau que présente une machine ingénieuse, nommée *occultographe*, que l'on montrait, il y a quelque temps, au théâtre Robert-Houdin.

Il serait facile de former beaucoup d'autres tableaux. On

pourrait prendre pour objets les noms de nos 32 anciennes provinces, ou ceux de nos 86 départements, ou ceux des villes de France qui ont plus de 10000 habitants, ou les noms de baptême les plus répandus, etc., etc.

Dans chaque cas, on déterminerait d'abord le nombre des colonnes du tableau d'après celui des objets donnés. On formerait ensuite le tableau lui-même, en appliquant successivement, d'une façon littérale, les trois parties de la règle que nous avons formulée plus haut (4). *(A suivre.)*

QUESTIONS PROPOSÉES

92. — Déterminer les côtés d'un triangle connaissant a, et sachant que a, b, c et h_a, sont en progression géométrique (h_a est la hauteur abaissée sur a). *(A. M.)*

93. — Construire un angle ABC, connaissant la différence des angles B et C, et les portions de la bissectrice intérieure de l'angle A, et de la bissectrice extérieure du même angle, comprises entre les hauteurs partant de B et de C.

(Lemoine.)

94. — Soit un triangle ABC; désignons par A′, B′, C′, les points de contact du cercle inscrit Δ avec les côtés de ce triangle. On sait que les droites AA′, BB′, CC′ sont concourantes. Soit ω le point de concours; prenons ce que nous nommons le point ω' réciproque de ω *(Ce point est défini de la manière suivante : On prend* A″ *symétrique de* A′ *par rapport au milieu de* BC ; *de même pour* B″ *et* C″ ; ω' *est le point de concours de* AA″, BB″, CC″.*)* On propose de démontrer que le point ω', le centre de gravité G du triangle ABC, et le centre O de Δ sont trois points en ligne droite. On demande la valeur du rapport $\dfrac{G\omega'}{GO}$ *(G. L.)*

95. — De chaque sommet A, B, C d'un triangle comme centre, on décrit des cercles de rayon ρ_1, ρ_2, ρ_3, tels que l'on

ait $$\frac{\rho_2 + \rho_3}{a} = \frac{\rho_1 + \rho_3}{b} = \frac{\rho_1 + \rho_3}{c}.$$

a, b, c étant les côtés du triangle. Lieu des centres radicaux de ces circonférences. *(Lemoine.)*

ERRATUM

Dans l'énoncé de la question 88, il s'est glissé un certain nombre d'erreurs, que nous signalons ici :

Au lieu de $xn =$, il faut $x_n =$.

Dans le cinquième alinéa, au lieu de $x_{39} = 4225$, il faut $x_{39} = 4225$.

La remarque contient les erreurs suivantes : Au lieu de : la deuxième et la troisième *proportions*, il faut :

La deuxième et la troisième *propositions*.

Au lieu de $6n + 1$, il faut $6m + 1$.

Au lieu de : Aucun nombre premier de la forme $6m - 1$ ne peut diviser *la série*, il faut : ne peut diviser *un terme de la série*.

A la fin, au lieu de : servent à justifier les *principes* ci-dessus, il faut : les *énoncés* ci-dessus.

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 12016-3.

THÉORÈME D'ARITHMÉTIQUE

Par M. **G. de Longchamps.**

Le théorème dont nous voulons parler peut être énoncé dans la forme suivante :

THÉORÈME (1). — *Le double d'un carré, augmenté de l'unité, peut, d'une infinité de façons, être un carré; mais il n'est jamais égal à un bicarré.*

1. — Considérons d'abord l'équation indéterminée

$$2x^2 + 1 = y^2;$$

nous voulons montrer qu'elle admet une infinité de solutions entières.

On voit immédiatement qu'elle est vérifiée en supposant

$$x = 2, \qquad y = 3.$$

Dans une note que nous avons publiée dans ce journal, nous avons montré que l'équation

$$qx^2 + py^2 = 1$$

ne pouvait admettre une solution entière, sans être, par cela même, vérifiée par une infinité de valeurs entières d'x et d'y. En désignant par $x_0 = \theta'$, $y_0 = \theta$ une solution entière et particulière de cette équation, nous avons démontré et l'on vérifie sans difficulté que les nombres x_1, y_1,

$$\pm x_1 = \theta'(q\theta'^2 - 3p\theta^2)$$
$$\pm y_1 = \theta(3q\theta'^2 - p\theta^2)$$

représentent une nouvelle solution de l'équation proposée.

Par exemple, pour le cas particulier qui nous occupe, on passe d'une solution x_p, y_p à une autre solution x_{p+1}, y_{p+1},

(1) Cette propriété des nombres n'est pas nouvelle, du moins selon toute vraisemblance. La première partie est certainement connue, puisque Euler et Lagrange, après Fermat, ont donné la résolution complète de l'équation indéterminée du second degré; quant à la seconde partie, elle ressort des équations $Ax^4 + By^4 + Cz^2 = 0$ qui ne sont pas, croyons-nous, complètement résolues. Dans tous les cas, la démonstration que nous proposons est élémentaire et sa lecture pourra intéresser nos jeunes lecteurs.

au moyen des formules suivantes :

$$\pm x_{p+1} = x_p\,(2x_p^2 + 3y_p^2)$$
$$\pm y_{p+1} = y_p\,(6x_p^2 + y_p^2).$$

En appliquant ces formules aux valeurs suivantes

$$x_0 = 2, \qquad y_0 = 3,$$

on a $\quad x_1 = 70, \qquad y_1 = 99;$

puis $\quad x_2 = 2744210 \quad y_2 = 3880899$, etc...

2. — Proposons-nous maintenant de démontrer que l'équation indéterminée

$$2x^2 + 1 = y^4 \qquad (1)$$

ne peut être vérifiée par des solutions entières.

Le nombre inconnu y est nécessairement impair; posons donc

$$y = 2t + 1,$$

t désignant un nombre entier. L'équation qui va nous occuper est alors $\quad 2x^2 + 1 = (2t + 1)^4$

ou, après simplifications,

$$x^2 = 4t(2t^3 + 4t^2 + 3t + 1).$$

Le polynôme placé dans la parenthèse est divisible par $t + 1$, et l'on trouve, en effectuant cette division,

$$x^2 = 4t(t + 1)(2t^2 + 2t + 1).$$

Cette égalité peut encore être écrite sous la forme suivante : $\quad x^2 = 4t(t + 1)[t^2 + (t + 1)^2]. \qquad (2)$

Nous distinguerons maintenant deux cas, suivant que t est, ou n'est pas, un carré parfait.

1° Supposons d'abord que t ne soit pas un carré parfait, et soit λ un facteur premier de t, facteur ayant un exposant impair. Ce nombre λ doit diviser le produit

$$(t + 1)[t^2 + (t + 1)^2].$$

Mais, pour des raisons connues, il ne peut appartenir à $t + 1$; par conséquent λ devrait diviser

$$t^2 + (t + 1)^2.$$

Or il divise t; il devrait donc diviser $(t + 1)^2$, et par suite $t + 1$; ce qui est impossible.

2° Supposons maintenant que t soit un carré parfait. Dans ce cas, $t + 1$ n'est pas un carré parfait, et en répétant sur $t + 1$ le raisonnement que nous avons fait tout à l'heure sur t, on reconnaît l'impossibilité de résoudre, en nombres

entiers, l'équation (2) et, par conséquent, l'équation proposée (1).

CONCOURS DE L'ÉCOLE SAINT-CYR (1883)

Mathématiques.

1. — *Une sphère de rayon* r *est placée sur un plan ; un cône dont le rayon de base est* R *et la hauteur* 2r *repose sur ce même plan. A quelle distance* x *du plan donné faut-il lui mener un plan parallèle, pour que les volumes compris entre les deux plans dans ces deux solides soient équivalents ? — Discuter. — Examiner la position du plan sécant par rapport au centre de la sphère.*

Le volume du segment sphérique à une base, qui a pour hauteur x, a pour expression

$$\frac{1}{3}\pi x^2(3r - x).$$

Le volume du tronc de cône, dont les rayons de base sont R et y, et la hauteur x, a pour expression

$$\frac{1}{3}\pi x(R^2 + y^2 + Ry);$$

on a en outre, entre x et y, la relation

$$\frac{y}{R} = \frac{2r - x}{2r};$$

on en tire pour l'expression du volume en fonction des seules données et de x

$$\frac{1}{3}\pi R^2 x\,\frac{12r^2 - 6rx + x^2}{4r^2}.$$

L'équation du problème est donc, en supprimant le facteur constant $\frac{1}{3}\pi$

$$4r^2x^2(3r - x) = R^2x(x^2 - 6rx + 12r^2).$$

On a d'abord la solution $x = 0$, qui ne convient pas à la question, puisque alors les deux volumes sont simultané-

ment nuls; puis il reste l'équation du second degré

$$x^2(R^2 + 4r^2) - 6rx(R^2 + 2r^2) + 12R^2r^2 = 0. \quad (1)$$

Pour que le problème soit possible il faut que x soit réel, positif et moindre que $2r$. La condition de réalité des racines est $9r^2(R^2 + 2r^2)^2 - 12R^2r^2(R^2 + 4r^2) \geq 0$ ou, en supprimant le facteur positif $3r^2$ et effectuant les calculs,

$$-R^4 - 4R^2r^2 + 12r^4 \geq 0. \quad (2)$$

En posant $\frac{R}{r} = m$, on trouve que m^2 doit être compris entre les racines de l'équation

$$m^4 + 4m^2 - 12 = 0;$$

comme de plus m^2 doit être positif, de même que m, on trouve entre les rayons R et r la relation

$$R < r\sqrt{2}. \quad (3)$$

Lorsque les racines sont réelles, elles sont positives, car leur somme et leur produit sont positifs.

La demi-somme des racines est

$$3r.\frac{2r^2 + R^2}{4r^2 + R^2};$$

l'expression fractionnaire est plus petite que l'unité, elle augmente donc avec R^2, et comme la plus grande valeur de R^2 est $2r^2$, la demi-somme des racines est moindre que $2r$; donc la plus petite racine au moins est acceptable.

Pour savoir si les deux racines sont acceptables, nous allons substituer $2r$ à x dans le premier membre de l'équation. Nous trouvons pour le premier membre

$$4r^2(R^2 + 4r^2) - 12r^2(R^2 + 2r^2) + 12R^2r^2;$$

nous avons, après réduction,

$$(R^2 - 2r^2)4r^2.$$

Or, le premier facteur est négatif si les racines sont inégales; il est nul si les racines sont égales. Donc, en exceptant ce cas limite, nous voyons que la plus grande racine est supérieure à $2r$; elle n'est donc pas acceptable.

Enfin, pour savoir comment est placé le plan par rapport au centre, nous cherchons le signe que prend le premier membre quand on y remplace x par r. Nous trouvons

$$r^2(7R^2 - 8r^2).$$

Ce résultat est de même signe $7R^2 - 8r^2$.

Donc, tant que l'on a $7R^2 < 8r^2$, la solution trouvée pour x est inférieure à r, et par suite les deux plans sont du même côté du centre. Si l'on a $7R^2 - 8r^2 = 0$, le plan passe par le centre ; enfin, dans le cas où $7R^2$ est plus grand que $8r^2$, le plan sécant est au-dessus du centre.

2. — *On donne un demi-cercle* AOB, *et la tangente* AC *à l'extrémité* A *du diamètre* AB. *Trouver sur la demi-circonférence un point* M *tel que, en abaissant une perpendiculaire* MC *sur la tangente* AC, *et joignant* MB, *on ait*

$$MB + 2MC = l.$$

Discuter.

Du point M, j'abaisse la perpendiculaire MP sur le diamètre AB, puis je prends pour inconnue l'angle ABM, que j'appelle φ. J'ai évidemment

$$MB = 2R \cos \varphi$$
$$AP = MC = 2R(1 - \cos^2 \varphi).$$

L'équation du problème est donc

$$2R \cos \varphi + 4R(1 - \cos^2 \varphi) = l,$$

ou $$4R \cos^2 \varphi - 2R \cos \varphi + l - 4R = 0.$$

Pour que le problème soit possible, il faut que le cosinus soit positif et plus petit que 1, parce que l'angle φ est nécessairement aigu. Or, il est facile de voir que le nombre 1 est en dehors de l'intervalle compris entre les deux racines; en effet, si je remplace $\cos \varphi$ par 1, il vient, après réduction, $$l - 2R.$$

Or, il est certain que cette quantité est positive; car on a

$$MB + MC > BP + PA$$

et à plus forte raison

$$MB + 2MC > 2R.$$

Si l'on a $$l - 4R < 0,$$

on a deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative, et d'après ce que nous venons de dire, la racine positive, seule acceptable, est moindre que 1; le problème a donc dans ce cas une solution, et une seule.

Si l'on a $$l - 4R > 0,$$

les deux racines, si elles sont réelles, sont positives, puisque leur somme est positive ainsi que leur produit. Pour qu'elles

soient réelles, il faut que l'on ait

$$17R^2 - 4Rl > 0,$$

ce qui donne $$l < \frac{17R}{4}.$$

Alors, comme la demi-somme des racines est $\frac{1}{4}$, les deux racines sont inférieures à l'unité. Le problème a donc deux solutions.

Cherchons comment sont placés les deux points M_1 et M_2 par rapport au rayon OD perpendiculaire à AB. Si le point M était au point D, sur le rayon OD, on aurait

$$\cos DBA = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

or, si l'on substitue cette valeur on trouve

$$l = R(2 + \sqrt{2}).$$

Par suite, comme dans notre hypothèse on a

$$l > 4R,$$

ce résultat est positif; il est facile d'en conclure que les deux points M_1 et M_2 sont sur le quadrant BD.

Résumons la discussion :

Si l'on a $$l < R(2 + \sqrt{2}),$$
il y a une solution sur le quadrant DA;

Quand on a $$l = R(2 + \sqrt{2}),$$
le point M est en D.

Pour $$R(2 + \sqrt{2}) < l < 4R,$$
une seule solution sur le quadrant DB, entre D et le point H, sommet du demi-hexagone inscrit.

Quand $l = 4R$, on a deux points, l'un en H, l'autre en B.

Enfin, quand $4R < l < \frac{17R}{4}$, on a deux solutions, toutes les deux entre B et H. Ces deux solutions se réduisent à une seule quand $l = \frac{17R}{4}$.

3. — *Trouver toutes les valeurs de* x *qui satisfont à l'équation*

$$a \operatorname{tg} x + b \operatorname{cotg} x = c.$$

On fera

$$a = 1,576824; \quad b = 2,765483; \quad c = 4,897431.$$

On sait que, en chassant les dénominateurs, on a l'équation $c \sin 2x - (b - a) \cos 2x = b + a$.

On pose $$\frac{b-a}{c} = \operatorname{tg} \varphi ;$$

il vient $$\sin (2x - \varphi) = \frac{b+a}{c} \cos \varphi.$$

Cette expression étant calculable par logarithmes, soit α le plus petit angle répondant à la question ; on en tire

$$2x - \varphi = 2K\pi + \alpha$$

ou $$2x - \varphi = 2K\pi + \pi - \alpha.$$

Donc

$$x = K\pi + \frac{\alpha + \varphi}{2}, \text{ ou } x = K\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha - \varphi}{2}.$$

Appliquons à l'exemple considéré :

$$b + a = 4{,}342307 \qquad \log (b + a) = 0{,}6378205$$
$$b - a = 1{,}188659 \qquad \log (b - a) = 0{,}0750576$$
$$c = 4{,}897431 \qquad \log c = 0{,}6899594$$

d'où $$\varphi = 13^\circ\, 38'\, 34''$$

puis $$\alpha = 59^\circ\, 31'\, 29''\, 5.$$

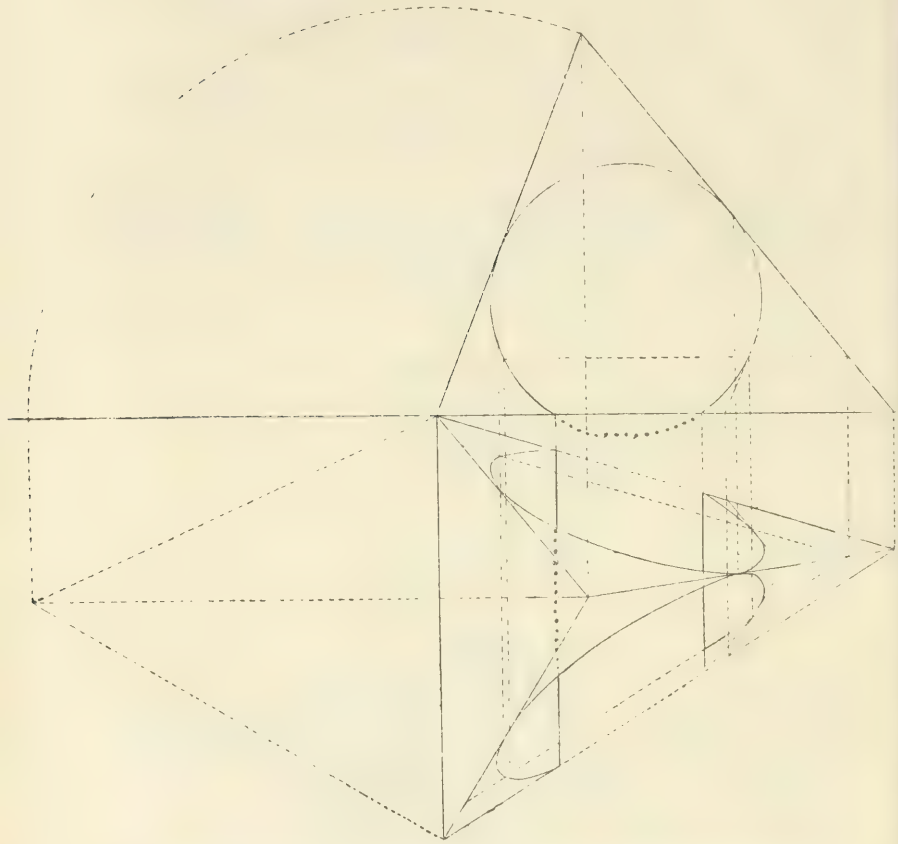
Épure.

Construire la pyramide triangulaire SABC dont la base ABC est appliquée sur la partie antérieure du plan horizontal. Le dièdre AB vaut 69° ; le sommet B est sur la ligne de terre xy, et l'arête AB est perpendiculaire à xy. On donne en millimètres

AB = 111 ; BC = 125 ; AC = 141 ; SB = 118 ; SA = 126.

Un cercle situé sur le plan vertical dans l'angle $Bs'c'$ est tangent aux deux côtés de cet angle, et a pour rayon 36 millimètres. Ce cercle est la base d'un cylindre dont les génératrices sont perpendiculaires au plan vertical. Construire l'intersection de ce cylindre avec la pyramide. On indiquera les tracés effectués pour obtenir un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point.

Dans la mise à l'encre, on représentera la pyramide supposée pleine et existant seule, en supprimant la portion de ce corps comprise dans le cylindre.



NOTA. — *Cette épure ne présentant aucune difficulté, nous nous contentons de reproduire l'épure faite, sans autre explication.*

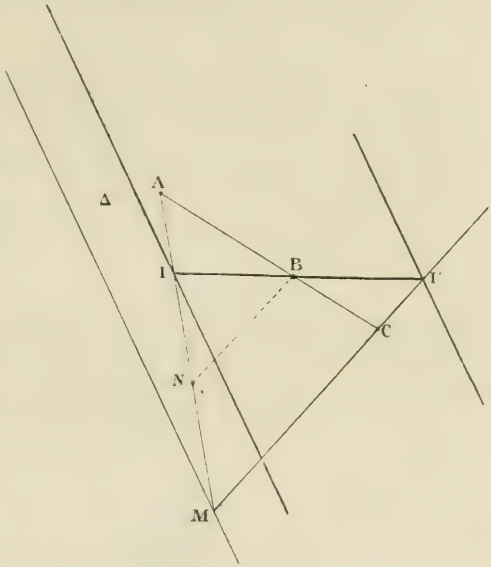
QUESTION 74

Solution par M. VILLADÉMOROS, élève du pensionnat des Frères Maristes, à Paris-Plaisance.

On donne une droite Δ, *et trois points* A, B, C *en ligne droite; soit* M *un point quelconque de* Δ ; *par le point* B, *on mène une droite qui rencontre* MA *au point* I, *et* MC *au point*

I′ ; *on suppose d'ailleurs que* BI = BI′. *Trouver le lieu du point* I′ *et celui du point* I.

Supposons que nous ayons les droites AM et CM. Pour déterminer le point I, il faut mener par B une parallèle à CM, qui rencontre AM au point N, puis prendre IN = NM. On a ainsi IBI′ de telle manière que BI = BI′.



D'après la construction faite, on voit que

$$\frac{IM}{AI} = \frac{2BC}{AI} = \frac{AB - BC}{2BC} = \text{constante}.$$

Le lieu du point I est donc une droite parallèle à Δ. Il en est de même du lieu du point I′.

Au lieu d'avoir BI = BI′ on pouvait avoir $\frac{BI}{BI'} = n$. Le lieu se compose encore de deux droites.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Rougelin, Julien Sauve, à Moulin ; Rat, à Marseille ; Gindre, à Pontarlier ; Taratte, au lycée Saint-Louis, à Paris ; Lucbieilh, à Pau ; Bablon, à Épinal ; Vialard, Berdon, à Cluny ; P. La Chesnais, lycée Henri IV, à Paris ; Aubry, à Charleville ; de Kerdrel, à Kéruzoret ; J. Slabochevitsch, à Saint-Petersbourg.

QUESTION 78

Solution par M. Giboudot, élève à Sainte-Barbe.

Trouver les côtés d'un triangle, connaissant une hauteur, le rayon du cercle inscrit et le rayon du cercle circonscrit.

Soient h la hauteur, r le rayon du cercle inscrit, R celui du cercle circonscrit.

On a immédiatement, en vertu de théorèmes connus,

$$xy = 2Rh. \qquad (1)$$

$$r(x + y + z) = zh. \qquad (2)$$

D'ailleurs on a

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2z.HC$$

et comme

$$HC = \sqrt{y^2 - h^2}$$

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2z\sqrt{y^2 - h^2},$$

ce qui peut s'écrire

$$x^2 - y^2 - z^2 = -2z\sqrt{y^2 - h^2}$$

et en élevant les deux membres au carré

$$x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 + 2y^2z^2 = 4z^2y^2 - 4z^2h^2.$$

Ordonnant cette équation par rapport à z, il vient

$$z^4 - 2z^2(x^2 + y^2 - 2h^2) + (x^2 - y^2)^2 = 0. \qquad (3)$$

Or l'équation (2) donne :

$$r(x + y) = z(h - r)$$

d'où

$$z = \frac{r(x + y)}{h - r}.$$

En portant cette valeur dans l'équation (3) celle-ci devient :

$$\frac{r^4(x + y)^4}{(h - r)^4} - \frac{2r^2(x + y)^2}{(h - r)^2}\left[x^2 + y^2 - 2h^2\right] + \left(x^2 - y^2\right)^2 = 0.$$

On réduit au même dénominateur et on a

$$r^4(x + y)^4 - 2r^2(x + y)^2(h - r)^2[x^2 + y^2 - 2h^2] - (x^2 - y^2)^2(h - r)^4 = 0$$

et, en divisant tout par $(x + y)^2$,

$$r^4(x + y)^2 - 2r^2(h - r)^2(x^2 - y^2 - 2h^2) + (x - y)^2(h - r) = 0.$$

Si l'on remarque que $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$,

que $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$,

et que l'on a dans l'hypothèse $2xy = 4\mathrm{R}h$, l'expression précédente peut s'écrire

$$(x^2+y^2)r^4 + 4\mathrm{R}hr^4 - 2r^2(h-r)^2(x^2+y^2) + 4r^2h^2(h-r)^2 + (h-r)^4(x^2+y^2) - 4\mathrm{R}h(h-r)^4 = 0,$$

et, en ordonnant par rapport à (x^2+y^2),

$$(x^2+y^2)[r^4 - 2r^2(h-r)^2 + (h-r)^4] = 4\mathrm{R}h(h-r)^4 - 4\mathrm{R}hr^4 - 4h^2r^2(h-r)^2;$$

or le coefficient de (x^2+y^2) est le carré de $[r^2-(h-r)^2]$, c'est-à-dire de $h(h-2r)$.

Par suite on a

$$x^2+y^2 = \frac{4\mathrm{R}h[(h-r)^4 - r^4] - 4h^2r^2(h-r)^2}{h^2(h-2r)^2}.$$

Mais le premier terme du numérateur devient visiblement

$$4\mathrm{R}h^2(h-2r)[(h-r)^2 + r^2].$$

Par suite, comme $2xy = 4\mathrm{R}h$, on a

$$(x+y)^2 = \frac{4\mathrm{R}h(h-2r)[h^2+r^2-2hr+r^2+h^2-2rh] - 4hr^2(h-r)^2}{h(h-2r)^2}$$

$$(x+y)^2 = \frac{8\mathrm{R}(h-2r)(h-r)^2 - 4r^2(h-r)^2}{(h-2r)^2}.$$

$$= \frac{4(h-r)^2[2\mathrm{R}(h-2r) - r^2]}{(h-2r)^2}$$

On en tire $(x+y)$, et comme on connaît $xy = 2\mathrm{R}h$, on détermine facilement x et y.

z est donné par la relation

$$z = \frac{r(x+y)}{h-r} = \frac{2r}{h-2r}\sqrt{2\mathrm{R}(h-2r) - r^2}.$$

Pour que le problème soit possible, il faut que l'on ait évidemment $h > 2r$

et aussi $2\mathrm{R}(h-2r) > r^2$

ou $\mathrm{R} > \dfrac{r^2}{2(h-2r)}$.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Giat, à Moulins; de Kerdrel, à Kéruzoret; Voignier, à Commercy.

QUESTION 80

Solution par M. Naura, au collège de Vitry-le-François.

Étant données les équations

$$\cos x + \cos y = 2\rho \cos \alpha, \qquad (1)$$

$$\sin x + \sin y = 2\rho \sin \alpha \qquad (2)$$

trouver l'équation qui admet pour racines

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} x \quad \textit{et} \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} y.$$

Divisons (2) par (1) on a

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \frac{x+y}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{y}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{y}{2}}.$$

Représentons $\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{y}{2}$ par s et $\operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{y}{2}$ par p,

on a
$$\frac{s}{1-p} = \operatorname{tg} \alpha. \qquad (3)$$

Dans l'équation (1) remplaçons $\cos x$ et $\cos y$ par leurs valeurs par rapport à $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ et à $\operatorname{tg} \frac{y}{2}$:

$$2\rho \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{y}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{y}{2}}$$

$$= \frac{2\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{y}{2}\right)}{\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right)\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{y}{2}\right)}.$$

On a donc
$$\frac{1 - p^2}{(1-p)^2 + s^2} = \rho \cos \alpha. \qquad (4)$$

De (3) on déduit $\quad s^2 = (1-p)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha.$

Remplaçons s^2 par sa valeur dans (4):

$$\frac{1+p}{1-p} = \frac{\rho}{\cos\alpha};$$

d'où
$$p = \frac{\rho - \cos\alpha}{\rho + \cos\alpha}.$$

Remplaçons p par sa valeur dans l'équation (3); on a

$$s = \frac{2\sin\alpha}{\rho + \cos\alpha}.$$

On connaît la somme s et le produit p des deux quantités $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ et $\operatorname{tg}\frac{y}{2}$. Ces quantités sont donc les racines de l'équation du deuxième degré,

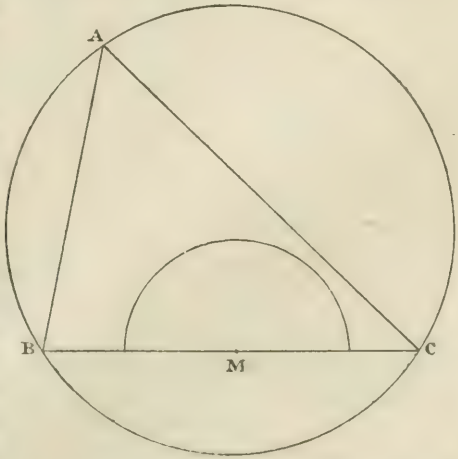
$$(\rho + \cos\alpha)u^2 - 2\sin\alpha \,.\, u + \rho - \cos\alpha = 0.$$

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Maillard, au collège de Beauvais; Aubry, à Charleville; de Kerdrel, à Kéruzoret; Lafay, Bourgarel, à Toulon.

QUESTION 81

Solution par M. Amaury DE KERDREL, à Kéruzoret.

Dans un triangle on connaît la base et l'angle au sommet; trouver le lieu du centre du cercle des neuf points.



Soit BC la base donnée et A l'angle au sommet; on peut construire le cercle circonscrit au triangle ABC en décrivant sur BC un segment capable de l'angle A.

D'ailleurs le cercle des neuf points passe par le milieu M du côté BC et a un rayon moitié moindre que celui du cercle circonscrit. Or, le

cercle circonscrit étant connu, le rayon du cercle des neuf points est déterminé. Donc le lieu est un cercle décrit de M comme centre avec un rayon égal à la moitié du rayon du cercle circonscrit au triangle.

Les points du lieu situés au-dessus de BC conviennent seuls à la question.

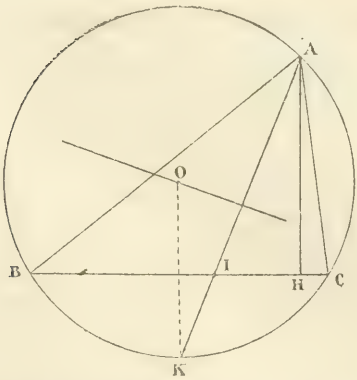
NOTA. — La même question a été résolue par MM. Naura, à Vitry-le-François; Bablon, à Épinal; Giat, à Moulins; Desplanques, à Condé-sur-Escaut; Cybardet, à Blanzac.

QUESTION 82

Solution par M. GINDRE, à Pontarlier.

Dans un triangle, on connaît la bissectrice de l'angle au sommet, le rectangle des deux côtés qui comprennent cet angle et la différence des angles à la base : on demande de construire ce triangle.

Je suppose le triangle BAC construit et je considère le cercle circonscrit au triangle, en menant la hauteur AH, je détermine un triangle rectangle AIH que je puis construire: car je connais AI et l'angle AIH $= \frac{\pi}{2} - \frac{C - B}{2}$; je connaîtrai donc exactement le rayon du cercle circonscrit, car



$$2R \,.\, AH = AB \,.\, AC$$

Je pourrai aussi déterminer le point K de rencontre de la bissectrice AI avec le cercle circonscrit, car

$$AI \,.\, AK = AB \,.\, AC.$$

Donc, pour déterminer ABC, je construirai AIH, puis je déterminerai le point K, et aussi le centre O du cercle cir-

conscrit qui se trouve à une distance déterminée de K et sur la perpendiculaire élevée au milieu de AK ; connaissant le cercle circonscrit, nous aurons les points B et C par la rencontre de IH avec ce cercle.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Gaillardon, Yvon, à Chartres ; de Kerdrel, à Kéruzoret ; Villadémoros, à Plaisance ; Bourgarel, à Toulon ; Giat, à Moulins.

QUESTION 83

Solution par M. YOUSSOUFFIAN, au collège de Galata-Seraï (Constantinople).

Trois nombres entiers sont en progression géométrique ; si le second augmente de 8, la progression devient arithmétique ; mais si, alors, le dernier terme augmente de 64, elle redevient géométrique. Trouver les trois nombres.

Soient x, y, z les trois nombres cherchés.

On a, d'après l'énoncé du problème

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z},$$

$$(y + 8) - x = z - (y + 8)$$

et

$$\frac{x}{y+8} = \frac{y+8}{z+64}.$$

Équation que l'on peut mettre sous la formes

$$y^2 = xz$$

$$x - 2y + z = 16$$

$$4x = y + 4.$$

La troisième équation donne $x = \frac{y+4}{4}$. Remplaçant x par cette valeur dans les deux premières équations, on a

$$y^2 = \frac{(y+4)z}{4}, \quad \frac{y+4}{4} - 2y + z = 16.$$

Éliminant z entre ces deux équations et réduisant, on a

$$9y^2 - 88y - 240 = 0,$$

dont les racines sont

$$y = 12, \quad y = -\frac{20}{9};$$

y devant être un nombre entier, on doit prendre seulement la valeur 12, ce qui donne $x = 4$ et $z = 36$.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Giat, à Moulins; Villadémoros, à Plaisance; de Kerdrel, à Kéruzoret; Besson, à Nantes; Caitucoli, à Draguignan; Doret, à Brest; Bablon, à Épinal; Maillard, à Beauvais; Desplanques, à Condé-sur-Escaut; Marsy, à Lille; Payard, à Vitry-le-François.

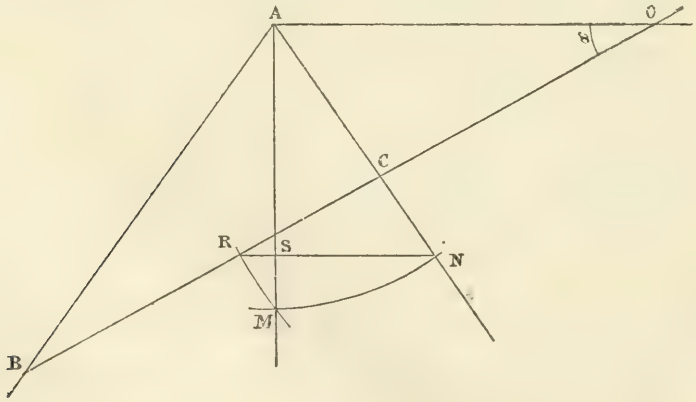
QUESTION 85

Solution par M. GIBOUDOT, élève à Sainte-Barbe.

Par un point pris sur la bissectrice d'un angle mener une droite qui forme avec les côtés de l'angle un triangle de surface donnée.

Je vais considérer deux cas, suivant que le point est sur la bissectrice extérieure ou sur la bissectrice intérieure.

PREMIER CAS. — Soient ABC $= \alpha$, l'angle donné; a, la dis-



tance du point A au point donné O, comptée sur la bissectrice extérieure, et x l'angle inconnu que fait la droite variable OB avec AO.

La surface du triangle ABC a pour expression

$$S = \frac{AB.AD.\sin\alpha}{2}.$$

L'angle α étant constant, le problème revient donc à mener la droite OB de façon que le produit des segments qu'elle détermine sur les côtés de l'angle soit égal à une quantité donnée K^2.

Pour calculer AB et AC, je remarque que les triangles AOB, AOC donnent $\dfrac{AB}{\sin x} = \dfrac{a}{\sin B}$.

et $$\frac{AC}{\sin x} = \frac{a}{\sin C};$$

d'où $$AB.AC = \frac{a^2 \sin^2 x}{\sin B \sin C} = K^2.$$

Or, il est aisé de voir que

$$\sin B \sin C = \cos\left(\frac{\alpha}{2} + x\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2} - x\right) = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2 x.$$

Par suite, il vient $K^2 = \dfrac{a^2 \sin^2 x}{\cos^2 \dfrac{\alpha}{2} - \sin^2 x}$;

d'où $$\sin^2 x = \frac{K^2 \cos^2 \dfrac{\alpha}{2}}{a^2 + K^2}.$$

Pour que le sinus existe il faut et il suffit que

$$K^2 \cos^2\frac{\alpha}{2} \geq a^2 + K^2$$

ou $$K^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} \geq -a^2,$$

condition toujours remplie. Le problème, dans ce premier cas, est donc toujours possible, comme il était du reste aisé de le prévoir.

On en déduit facilement la construction simple qui suit (*fig. 1*).

Du point A avec un rayon égal à K, je décris un arc de cercle qui coupe respectivement en M et en N la bissectrice intérieure et le côté AC. Du point N j'abaisse ensuite sur AM une perpendiculaire indéfinie NR. Enfin du point O avec OM comme rayon je décris un arc de cercle qui coupe cette perpendiculaire au point R. Je joins OR qui est la droite cherchée ; car il est aisé de voir que

$$OR = \sqrt{a^2 + K^2}$$

et que
$$AS = K \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Deuxième cas. — En conservant les mêmes notations et appelant x l'angle AOC, je dois avoir encore

$$AB.AC = K^2.$$

Les triangles AOB, AOC donnent encore

$$AB.AC = \frac{a^2 \sin^2 x}{\sin B \sin C}$$

et, dans ce cas, je remarque que

$$\sin B \sin C = \sin\left(x + \frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(x - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Par suite il vient

$$K^2 = \frac{a^2 \sin^2 x}{\sin^2 x - \sin^2 \frac{\alpha}{2}};$$

d'où
$$\sin^2 x = \frac{K^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{K^2 - a^2}.$$

La condition de possibilité du problème est dans ce cas

$$K^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \leq K^2 - a^2$$

ou
$$K \cos \frac{\alpha}{2} \geq a.$$

J'ai alors la construction suivante *(fig. 2)*.

Au point O j'élève à la bissectrice une perpendiculaire ON.

Du point A avec K comme rayon, je décris un arc de cercle qui coupe AC en M et OM en N, de telle sorte que

$$\overline{OM}^2 = K^2 - a^2.$$

Par le point M je mène une parallèle à AO jusqu'à son intersection en P, avec un arc de cercle décrit de O avec ON comme rayon. Je joins PO et je dis que PO est la ligne demandée. En effet, il est aisé de voir que

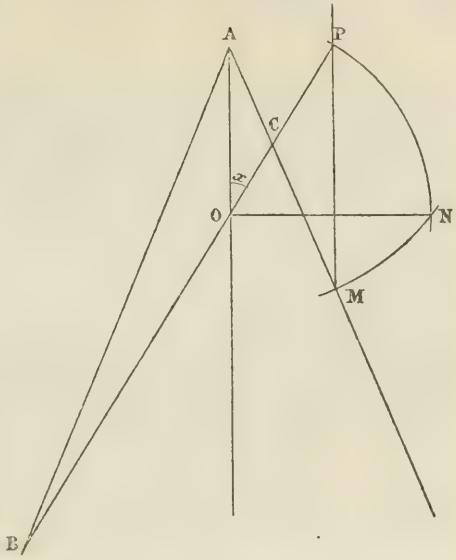
$$OS = K \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Le triangle rectangle OPS donne alors

$$\cos \mathrm{POS} = \sin x = \frac{\mathrm{OS}}{\mathrm{OP}} = \frac{\mathrm{K} \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\mathrm{R}^2 - a^2}}.$$

La condition de possibilité trouvée précédemment nous montre que le minimum de la surface du triangle a lieu pour

$$a = \mathrm{K} \cos \frac{\alpha}{2}.$$



Dans ce cas le point K vient en O, la droite OP est perpendiculaire en ce point à la bissectrice, le triangle est isoscèle. Si OP s'incline dans un sens ou dans l'autre sur AR, le triangle devient infini lorsque OP et AB ou AC approchent du parallélisme.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Bablon, à Epinal; Naura, à Vitry-le-François; Giat, à Moulins; de Kerdrel, à Kéruzoret.

SUR LA FORMATION DE CERTAINS TABLEAUX

Par M. **Désiré André.**

(*Suite*, voir page 139.)

III. — Problème inverse.

8. — Dans la première partie de ce travail, nous nous sommes proposé de résoudre ce problème : *Former avec* n *objets un tableau de* c *colonnes satisfaisant à certaines conditions.*

L'une de ces conditions, la principale même, c'était que chacun des objets fût déterminé par la simple connaissance des colonnes où il figure. Nous sommes conduits à nous poser maintenant ce nouveau problème, qui est l'inverse du premier : *Connaissant les colonnes où figure un certain objet, trouver cet objet.*

9. — La connaissance des colonnes où l'objet en question figure équivaut évidemment à celle du nombre, écrit dans le système binaire, qui sert de numéro à cet objet. Il suffit, pour bien connaître ce numéro, de revenir de ce nombre, écrit dans le système binaire, au même nombre, écrit dans le système ordinaire de la numération décimale. Le numéro connu, l'objet correspondant est connu.

Le retour de la numération binaire à la numération décimale s'effectue d'une manière très simple. Supposons, par exemple, que le tableau formé ait cinq colonnes, ce qui est précisément le cas des deux tableaux qui précèdent. Le chiffre 1 a pour valeurs relatives : dans la première colonne, 2^4 ou 16 ; dans la deuxième, 2^3 ou 8 ; dans la troisième, 2^2 ou 4 ; dans la quatrième, 2^1 ou 2 ; dans la cinquième, 2^0 ou 1. Or, dans tout système de numération, un nombre quelconque est la somme des valeurs relatives de tous ses chiffres. Donc il suffira, pour obtenir, dans le système décimal, le numéro d'un objet quelconque, de faire la somme des puissances de 2 correspondant à toutes les colonnes où figure cet objet.

10. — Considérons le tableau (5) que nous avons formé en prenant pour objets les 31 premiers nombres entiers. Ici, le problème se simplifiera, puisque chaque objet sera identique à son numéro.

Supposons donc qu'on nous demande quel est le nombre de ce tableau qui se trouve dans la première colonne, dans la troisième et dans la quatrième. A la première colonne correspond 16 ; à la troisième, 4 ; à la quatrième, 2. Le nombre demandé est donc égal à $16 + 4 + 2$, c'est-à-dire à 22.

Supposons encore qu'on nous demande le nombre qui

figure dans la deuxième colonne et dans la cinquième. A la deuxième colonne correspond 8 et à la cinquième 1. Le nombre demandé est donc égal à $8 + 1$, c'est-à-dire à 9.

Avec un peu d'exercice, on arrive à répondre à toutes les questions de cette sorte, d'une façon pour ainsi dire instantanée.

11. — Considérons maintenant le tableau (6) que nous avons formé en prenant pour objets les 26 lettres de l'alphabet français. Les numéros que nous avons attribués à ces lettres ne sont autre chose que leurs rangs dans l'alphabet.

Supposons qu'on nous demande la lettre qui figure dans la deuxième colonne, dans la troisième et dans la cinquième. A la deuxième colonne correspond 8; à la troisième, 4; à la cinquième, 1. Le numéro correspondant à la lettre cherchée est donc $8 + 4 + 1$, c'est-à-dire 13. La lettre cherchée est donc la treizième lettre de notre alphabet : c'est la lettre M.

Supposons encore qu'on nous demande la lettre qui figure dans la première colonne et dans la troisième. A la première colonne correspond 16 ; à la troisième, 4. Donc le numéro correspondant à la lettre cherchée est $16 + 4$, c'est-à-dire 20. Donc la lettre cherchée est la vingtième de notre alphabet : c'est la lettre T.

Avec un peu d'exercice, on peut arriver à répondre très vite à ces différentes questions.

12. — A l'aide du tableau formé des 26 lettres de notre alphabet, et sans même avoir ce tableau sous les yeux, on peut donc deviner la lettre que pense une personne, à la condition toutefois que cette personne fasse connaître, d'une manière quelconque, les colonnes où cette lettre figure. En répétant plusieurs fois l'opération, on peut deviner, lettre par lettre, le nom d'une personne, ses prénoms, son lieu de naissance, etc., etc.

Si l'on eût formé un tableau des noms de baptême les plus communs, ou des noms de nos 86 départements, on eût pu, de la même manière, dire à toute personne, non plus lettre par lettre, mais du premier coup, comment elle se nomme, ou dans quel département elle est née.

L'opération, à la vérité, eût été alors un peu plus difficile, d'abord parce que l'addition à faire eût porté sur des nombres plus grands, ensuite parce qu'il eût été nécessaire de savoir, par cœur, la relation qui unit les nombreux objets que l'on considère aux numéros en même nombre qui leur correspondent. Cette dernière difficulté serait de beaucoup la plus sérieuse, peut-être même serait-elle insurmontable, si la mnémotechnie n'avait fait connaître, depuis très longtemps déjà, des moyens variés, et pour ainsi dire infaillibles, d'associer une suite de nombres à une suite d'objets.

IV. — Structure du tableau.

13. — Étant donnés n objets à distribuer en un tableau de c colonnes, on peut, en opérant toujours d'après la règle que nous avons formulée (4), obtenir un très grand nombre de tableaux différents, et cela pour deux raisons.

La première c'est que les n objets donnés peuvent être rangés dans un ordre quelconque, peuvent être numérotés d'un très grand nombre de manières différentes.

La seconde, c'est que les nombres qui figurent dans chaque colonne du tableau peuvent y être placés dans tel ordre qu'on veut, peuvent y être permutés de toutes les manières.

14. — Dans les deux tableaux que nous avons formés plus haut, nous avons opéré à cet égard de la façon qui nous a paru la plus simple.

L'ordre où nous avons rangé nos objets, pour les numéroter, n'a pas été quelconque : ç'a été, pour les 31 premiers nombres, leur ordre de grandeur croissante; pour les 26 lettres de notre alphabet, leur ordre alphabétique.

Dans les colonnes de ces deux tableaux, nous avons agi de même. Dans le tableau des 31 premiers nombres entiers, les nombres de chaque colonne, lus de haut en bas, vont en croissant. Dans les tableaux des 26 lettres, les lettres de chaque colonne se succèdent, de haut en bas, dans l'ordre alphabétique.

15. — Lorsque le nombre n des objets donnés est juste égal à $2^c - 1$, on ne voit pas d'autre façon de faire varier la structure du tableau ; mais lorsque n est inférieur à $2^c - 1$, on en aperçoit immédiatement une nouvelle, qui exige, à la vérité, qu'on modifie légèrement notre règle.

Supposons, en effet, que n soit inférieur à $2^c - 1$. Au lieu de donner aux n objets considérés les numéros $1, 2, 3, \ldots n$, comme notre règle l'indique, on pourra leur donner, pour nnméros, n nombres quelconques, choisis parmi les $2^c - 1$ premiers nombres entiers, et il est évident que ces n nombres pourront être choisis à volonté.

16. — Il y aurait encore un autre moyen de former, avec les n objets donnés, un plus grand nombre de tableaux : ce serait de faire varier le nombre c des colonnes. Ce nombre c n'est assujetti qu'à la seule condition de satisfaire à l'inégalité

$$c > \frac{\log n}{\log 2};$$

il a une limite inférieure, mais n'a pas de limite supérieure : on peut lui donner des valeurs en nombre infini. Néanmoins, dans la pratique, on ne donnera jamais à c des valeurs supérieures à n, de façon que nous aurons toujours

$$n \geq c > \frac{\log n}{\log 2}.$$

On pourrait profiter de l'indétermination, même ainsi réduite, du nombre c, pour imposer au tableau à former des conditions nouvelles ; pour lui imposer, par exemple, la condition d'avoir, au plus, un nombre donné l de lignes, ou même d'avoir juste l lignes.

(A suivre.)

QUESTIONS PROPOSÉES

96. — On considère un triangle ABC, inscrit dans un cercle ; la hauteur CD menée sur AB rencontre le cercle au point E. On demande de mener par le point E une corde EZ.

rencontrant AB en X, BC en Y, et la circonférence en Z, de façon que XY = YZ. *(Reidt.)*

97. — Dans un cercle dont le centre est O, on mène deux diamètres rectangulaires AB, CD; on demande de mener par le point A une corde AY, qui coupe la ligne CO au point X, et la circonférence au point Y, de manière que l'on ait $AX.OX = CX.XY$. *(Reidt.)*

98. — Dans un cercle dont le centre est C, on mène deux diamètres rectangulaires, AB, EF. On demande de trouver sur l'arc BF un point X tel que si l'on mène les lignes AX, BX, EX, dont la dernière rencontre CB en Y, on ait $AX.BX = CY.XE$. *(Reidt.)*

99. — En appelant A, B, C les angles d'un triangle, et α un angle déterminé par la relation

$$\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C,$$

démontrer que l'on a

$$\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\sin^4 A + \sin^4 B + \sin^4 C}{2 \sin A \sin B \sin C (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)}$$

(Brocard.)

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

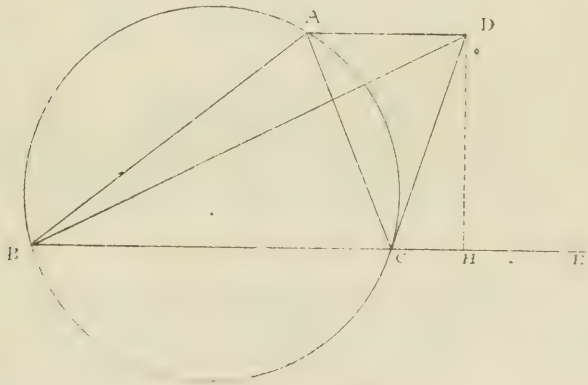
IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 14492-3.

ÉTUDE SUR LE CERCLE DE BROCARD

Par M. **A. Morel.**

(*Suite* voir p. 10, 33, 62, 97).

23. — Nous allons donner de l'angle α, qui détermine les points segmentaires, une construction très simple, au moyen de la règle et du compas, et nous déduirons certaines propriétés de la figure qui nous occupe, en partant de cette construction.



Soit ABC le triangle donné ; je mène au point C la tangente au cercle circonscrit, et par le point A je mène à BC la parallèle AD, qui rencontre la tangente précédente au point D. Je dis que l'angle DBC est égal à l'angle α.

En effet, comme l'angle ACD est évidemment égal à l'angle B du triangle, l'angle DCE est égal à l'angle A.

Cela posé, si h est la hauteur du triangle, on a, dans le triangle rectangle BDH

$$BH = h \operatorname{cotg} DBH.$$

D'autre part, on a

$$CH = h \operatorname{cotg} DCH = h \operatorname{cotg} A,$$

puis

$$BC = h(\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C).$$

Donc, comme on a $BH = BC + CH$ (en tenant compte des signes), il vient

$$\cot g\, DBH = \cot g\, A + \cot g\, B + \cot g\, C.$$

Donc $$DBH = \alpha.$$

24. — On déduit de là une relation métrique très simple entre les deux angles que fait l'une des droites analogues à BD avec les côtés de l'angle qui la comprend.

L'angle DCE étant égal à A, l'angle BDC est égal à $A - \alpha$.

Le triangle BDC donne alors

$$\frac{\sin(A - \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{a}{DC},$$

mais dans le triangle ABC on a

$$\frac{DC}{b} = \frac{\sin DAC}{\sin ADC} = \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{c}{a}.$$

Donc on a $$\frac{\sin(A - \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{a^2}{bc} = \frac{a^3}{abc}.$$

En prenant cette relation et les deux autres relations analogues, on retrouverait l'équation que nous avons donnée au paragraphe **2.** et on en déduirait la relation entre l'angle α et les angles du triangle.

25. — Théorème. — *La droite* Co', *faisant avec le côté* BC *l'angle* α, *la médiane correspondant à* BC *et la médiane antiparallèle menée de l'extrémité* B *de* BC *sont trois droites concourantes.*

On sait que, φ_1 et φ_2 étant les angles qu'une droite fait avec les deux côtés d'un triangle, le rapport $\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2}$ est le rapport des distances d'un point quelconque de la droite avec ces deux côtés; de plus, si trois droites issues des sommets sont concourantes, on sait que le produit des trois rapports de sinus ainsi déterminés est égal à l'unité, et que la réciproque est vraie.

Cela posé :

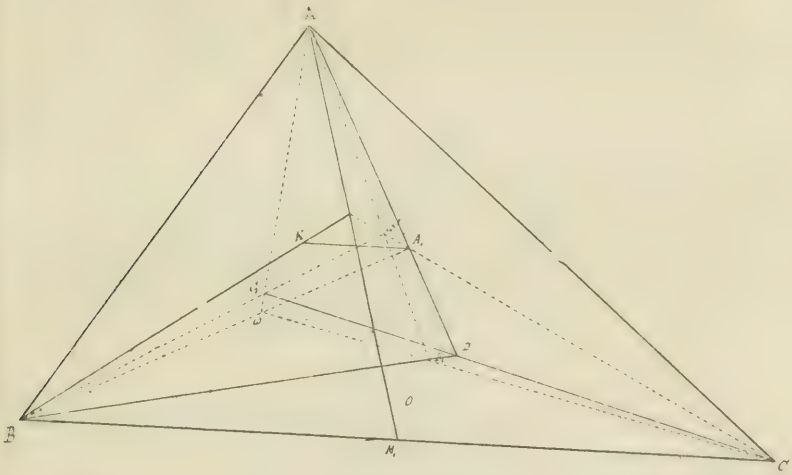
Pour une médiane, le rapport des distances d'un point aux côtés de l'angle est égal à l'inverse du rapport des côtés; donc, si nous appelons δ_a, δ_b, δ_c les distances du point de

rencontre de la médiane AM, et de la médiane antiparallèle BN_2, aux côtés a, b, c, nous avons

$$\frac{\delta_c}{\delta_b} = \frac{b}{c};$$

pour une médiane antiparallèle, au contraire, le rapport des distances aux deux côtés est égal au rapport de ces côtés ;

donc
$$\frac{\delta_a}{\delta_c} = \frac{a}{c}.$$



Donc, en multipliant, il nous reste

$$\frac{\delta_a}{\delta_b} = \frac{ab}{c^2}.$$

Mais on a alors
$$\frac{\delta_a}{\delta_b} = \frac{\sin \alpha}{\sin (C - \alpha)};$$

par suite, la droite $C\omega'$ passe par le point de rencontre des deux droites précédentes.

26. — Théorème. — *La droite* KA_1, *qui joint le point* K *au sommet* A_1 *du triangle* $A_1B_1C_1$, *est divisée en deux parties égales par la médiane partant du point* A_1 *homologue de* A_1.

En effet, nous avons vu précédemment (17) que A_1K est parallèle à BC; donc, puisque les lignes CA_1, BK et M_1A sont concourantes, elles déterminent des segments proportionnels

sur des droites parallèles, et en particulier la droite BC étant partagée en deux parties égales par M_1, la droite K_1A sera divisée en deux parties égales par la droite AM_1. On verrait de même que chacune des droites KB_1, KC_1 est divisée en deux parties égales par la médiane correspondant au côté auquel elle est parallèle.

27. — Théorème. — *Les trois lignes* AA_1, BB_1, CC_1 *se coupent en un même point.*

En effet, appelons d et d' les distances du point A_1 aux deux côtés AC et AB ; le rapport $\frac{d}{d'}$ peut s'écrire

$$\frac{d}{A_1M_1} : \frac{d'}{A_1M_1}.$$

Or on a, puisque A_1 est sur la ligne $C\omega'$, qui fait l'angle α avec BC

$$\frac{d}{A_1M_1} = \frac{\sin(C-\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{c^3}{abc};$$

de même, puisque A_1 est sur la ligne $B\omega$, qui fait l'angle α avec BC

$$\frac{d'}{A_1M_1} = \frac{\sin(B-\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{b^3}{abc};$$

donc

$$\frac{d}{d'} = \frac{c^3}{b^3}.$$

Tel est le rapport des distances d'un point quelconque de AA_1 respectivement aux deux côtés b et c.

En prenant de même les rapports relatifs aux signes BB_1 et CC_1, on voit que le produit de ces rapports est égal à l'unité. Donc les droites AA_1, BB_1, CC_1 sont concourantes en un point que nous appellerons D.

28. — Théorème. — *La ligne qui joint le point* K *au milieu* M_1 *d'un côté, passe par le milieu de la hauteur correspondante.*

Au point B, je fais avec BC un angle BCF, extérieur au triangle et égal à l'angle BCA ; on sait que l'on a

$$\frac{\sin ABK}{\sin KBC} = \frac{AB}{BC}.$$

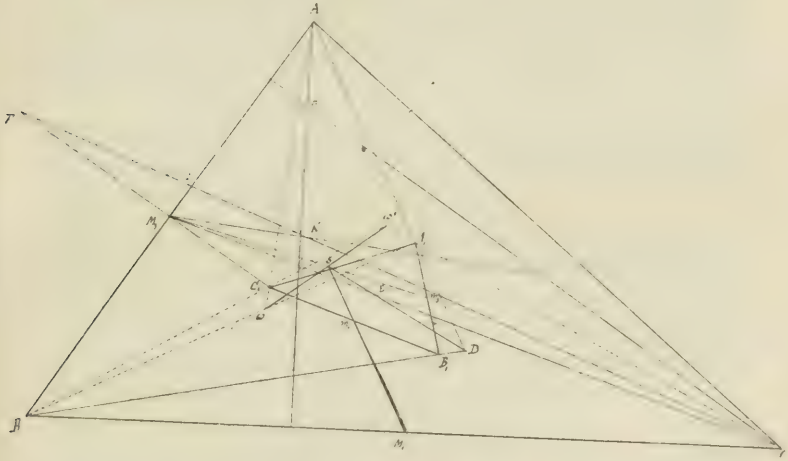
On a aussi

$$\frac{\sin ABF}{\sin CBF} = \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{AB}{BC}.$$

Donc le faisceau $B(CKI_1F)$ est un faisceau harmonique, et le point K a pour conjugué harmonique par rapport au segment CI le point F de rencontre de CI avec BF.

De même, si l'on mène par le point A une droite faisant avec BC un angle égal à l'angle C du triangle, cette droite sera la conjuguée harmonique de AK par rapport à CA et AB, et par suite passera par le point F.

Donc le triangle BFC est isoscèle, et la ligne FM_3, qui passe par le milieu de BC, est perpendiculaire à BC.



Cela posé, les lignes M_3F, M_3A, M_3K, M_3C forment un faisceau harmonique et la hauteur CH, parallèle au rayon M_3F, est partagée en deux parties égales par les trois autres rayons, ce qui démontre le théorème.

29. — Théorème. — *Si l'on joint les milieux des côtés homologues des triangles* ABC *et* $A_1B_1C_1$ *on a trois lignes qui se coupent en un même point, situé sur la ligne* DE, *qui joint le point* D *de rencontre des lignes* AA_1, BB_1, CC_1 *au centre de gravité* E, *commun aux deux triangles* ABC, $A_1B_1C_1$.

En effet, les deux triangles AEA_1, M_1Em_1 sont semblables, puisqu'on a

$$\frac{AE}{EM_1} = 2 = \frac{A_1E}{Em_1};$$

il en résulte que les lignes AA_1 et M_1m_1 sont parallèles; or, dans le triangle ABC, les lignes AA_1, BB_1, CC_1 se coupent en un même point D; donc, dans le triangle homothétique $M_1M_2M_3$, les lignes M_1m_1, M_2m_2, M_3m_3 se couperont en un même point S qui sera sur la droite DE, et on aura

$$\frac{DE}{ES} = 2.$$

30. — Théorème. — *Le point* S *est au milieu de la ligne* $\omega\omega'$.

Pour démontrer ce théorème, nous allons chercher les distances du point S à l'un quelconque des côtés du triangle, et montrer que chacune de ces distances est la demi-somme des distances correspondantes des points ω et ω'.

Nous avons vu (**27**) que, en appelant δ_a, δ_b, δ_c les distances du point D aux côtés a, b, c, on avait les équations

$$\frac{\delta_a}{\delta_b} = \frac{b^3}{a^3}; \quad \frac{\delta_a}{\delta_c} = \frac{c^3}{b^3},$$

ce que l'on peut écrire

$$\delta_a \,.\, a^3 = \delta_b \,.\, b^3 = \delta_c \,.\, c^3.$$

D'autre part, en appelant Δ la surface du triangle, on a évidemment $\qquad a\delta_a + b\delta_b + c\delta_c = 2\Delta.$

On en tire facilement

$$\delta_a = \frac{2\Delta \,.\, a^2b^2c^2}{a^3(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)}.$$

De même, en appelant ε_a la distance du centre de gravité E au côté a, on sait que l'on a

$$\varepsilon_a = \frac{2\Delta}{3a};$$

Soit σ_a la distance du point S à a; puisque les trois points D, E, S sont en ligne droite, et que DE = 2ES, on a

$$\frac{\delta_a - \varepsilon_a}{\varepsilon_a - \sigma_a} = 2;$$

on en tire, par un calcul facile

$$\sigma_a = 2\Delta \,.\, \frac{a\,(b^2 + c^2)}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}.$$

Nous avons vu au commencement de cette étude (**4**) que, en posant $\qquad b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 = K^2,$

nous avions $\omega B = \frac{c^2 a}{K}, \quad \omega' C = \frac{b^2 a}{K},$

$$\sin \alpha = \frac{2\Delta}{K}.$$

Donc, puisque les distances des points ω et ω' à BC sont respectivement $\omega B \sin \alpha, \quad \omega' C \sin \alpha,$

leur somme est $\frac{2\Delta}{K^2} a (c^2 + b^2) = 2\sigma_a.$

Par suite, la distance du point S au côté a est bien la demi-somme des distances des points ω et ω' au même côté. Le même raisonnement s'appliquant évidemment pour un autre côté, le point S est bien au milieu de $\omega\omega'$.

31. — Théorème. — *Les lignes qui joignent les milieux des côtés du triangle* $A'B'C'$ *aux sommets du triangle* ABC *se coupent en un même point* S'.

En effet, dans l'angle $\omega A \omega'$ les droites $\omega\omega'$ et B_1C_1 sont antiparallèles; par suite, la médiane Am_1 et la médiane AS sont des lignes symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle $\omega A \omega'$, et par suite aussi, de l'angle BAC. Donc, puisque les lignes AS, BS, CS concourent au même point, il en est de même des droites Am_1, Bm_2, Cm_3.

On peut calculer les rapports des distances de ce nouveau point S' aux trois côtés; on a, en effet, comme nous venons de le voir pour le point S :

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_b} = \frac{a(b^2 + c^2)}{b(c^2 + a^2)} ; \quad \frac{\sigma_b}{\sigma_c} = \frac{b(c^2 + a^2)}{c(a^2 + b^2)}.$$

On en déduit, puisqu'il faut pour des points correspondants renverser les rapports,

$$\sigma_a' \,.\, a(b^2 + c^2) = \sigma_b' \,.\, b(a^2 + c^2) = \sigma_c' \,.\, c(a^2 + b^2).$$

32. — Théorème. — *Le point correspondant du point* D *est un autre point* D', *pôle de la corde* $\omega\omega'$ *par rapport au cercle de Brocard.*

Pour le démontrer, je considère le point m_1, milieu de B_1C_1; soit F le conjugué harmonique de E par rapport aux points A_1 et m_1; de l'égalité

$$\frac{A_1E}{Dm_1} = \frac{AF}{m_1F} = 2,$$

je tire facilement $FE = 2A_1E$.

Donc, puisque, en appelant H le point de concours des hauteurs de ABC, j'ai, d'après un théorème connu

$$HE = 2EO,$$

je vois que FH est parallèle à A_1O et que, par suite, F est sur la hauteur correspondant au côté BC.

Cela posé, je considère le faisceau harmonique

$$A\,(A_1Em_1F)\,;$$

les symétriques des rayons par rapport à la bissectrice forment un faisceau harmonique; or

AE a pour symétrique AK;

Am_1 ou AS′ a pour symétrique AS (**31**);

AF (ou AH) a pour symétrique AO, d'après un théorème connu ;

Donc le symétrique de AA_1, ou de AD, passe par le point D′, conjugué harmonique de S par rapport à O et K: et puisque OK est le diamètre perpendiculaire à $\omega\omega'$, D′ est le pôle de $\omega\omega'$ par rapport au cercle de Brocard.

33. — Nous avons vu précédemment (**29**) que DES est une ligne droite et, de plus, que $DE = 2ES$; d'autre part, on sait que OEH est une ligne droite, et que $EH = 2OE$; donc la ligne DH est parallèle à SO, ou, ce qui est la même chose, à D′O. *(A suivre.)*

SOLUTION 84

Solution par M. Youssoufian, élève au lycée de Galata-Seraï (Constantinople).

Démontrer géométriquement que l'on a

$$\frac{\pi}{4} = arc\ tg\,\frac{p}{q} + arc\ tg\,\frac{q-p}{p+q}.$$

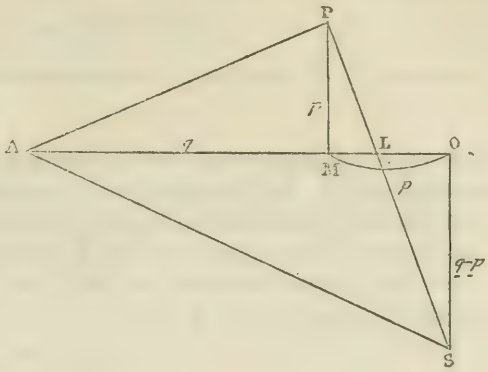
Soient $AM = q$, $MP = p$ perpendiculaire à AM. Je prends $MO = p$ sur le prolongement de AM ; du point O j'élève

la perpendiculaire OS $= q - p$ sur AO et je joins AP, AS, PS.

On a

$$\frac{p}{q} = \text{tg PAM},$$

$$\frac{q-p}{p+q} = p \text{ SAO}.$$



Il s'agit donc de démontrer que SAO + OAP $+ \frac{\pi}{4} = 45°$.

Les deux triangles rectangles PML, SOL ayant l'angle en L égal, sont semblables; par suite

$$\frac{\text{ML}}{\text{LO}} = \frac{p}{q-p} \quad \text{d'où} \quad \frac{\text{ML}}{p} = \frac{p}{q}$$

ce qui pourrait s'écrire

$$\frac{\text{ML}}{\text{MP}} = \frac{\text{MP}}{\text{MA}}.$$

Dans le triangle APL, la hauteur PM étant moyenne proportionnelle entre AM et ML, ce triangle est rectangle en P. Le triangle APS l'est aussi.

D'autre part les deux triangles rectangles APM, ASO donnent

$$\overline{\text{AP}}^2 = p^2 + q^2 \text{ et } \overline{\text{AS}}^2 = (p+q)^2 + (q-p)^2$$
$$= 2\,(p^2 + q^2),$$

donc $\qquad 2\overline{\text{AP}}^2 = \text{AS}^2$

et comme $\overline{\text{PS}}^2 = \overline{\text{AS}}^2 - \overline{\text{AP}}^2$, on a en remplaçant $\overline{\text{AS}}^2$ par $2\overline{\text{AP}}^2$ $\text{PS}^2 = \text{AP}^2$.

Le triangle rectangle APS est donc en même temps isoscèle; par conséquent l'angle PAS $= 45°$. C.Q.F.D.

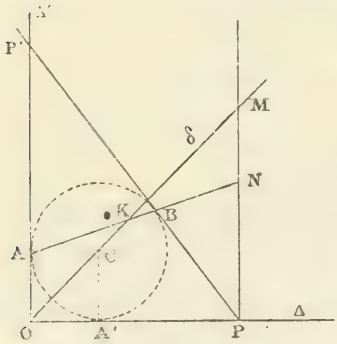
NOTA. — La même question a été résolue par M. de Kerdrel, à Kéruzoret.

QUESTION 86

Solution par M. Youssoufian, au lycée de Galata-Seraï (Constantinople).

On considère deux droites rectangulaires Δ et Δ' ; sur Δ on prend un point fixe P. *Par ce point* P *on fait passer une transversale mobile δ, qui forme avec Δ et Δ' un triangle rectangle. Imaginons maintenant le cercle inscrit, et soit* A *le point de contact de ce cercle avec Δ, et* B *son point de contact avec δ. Démontrer que la droite* AB *passe par un point fixe.*

Soit C le centre du cercle inscrit dont le rayon est r. Je prolonge AB et OC jusqu'à leur rencontre M et N avec la perpendiculaire PM élevée sur Δ au point P.



Les triangles PBN, P'AB étant semblables, on a PN = PB puisque P'A = P'B.

D'autre part OP = PM, puisque MOP = 45°, par suite

$$MN = PM - PN = PO - PB = PO - PA' = r$$

et $$OA = r.$$

d'où MN = OA; il en résulte que les deux triangles OAK, MNK sont égaux comme ayant un côté égal et les angles adjacents égaux ; dès lors OK = KM. Ainsi la corde AN divise OM en deux parties égales et passe toujours par son milieu K. C. Q. F. D.

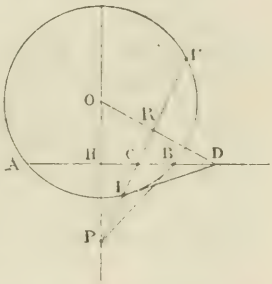
Nota. — La même question a été résolue par MM. Bablon, à Épinal ; Desplanques, à Condé-sur-Escaut ; de Kerdrel, à Kéruzoret.

QUESTION 89

Solution par M. Gindre.

On donne trois points en ligne droite A, B, C : *par A et B on fait passer une circonférence quelconque* O, *soit le point* P *le pôle de* AB *par rapport à* O ; *la droite* PC *rencontre* O *en des points* I *et* I' : *trouver le lieu de ces points, lieu qui est une circonférence.*

Je considère les trois points A, B, C et la circonférence O passant par les deux points A et B; le pôle P de AB par rapport au cercle O est déterminé par l'intersection de la perpendiculaire abaissée de O sur AB et de la tangente menée en B au cercle O.



J'élève au point K, milieu de HI', la perpendiculaire KO sur HI'; elle coupe la droite AB en un point D qui est évidemment le pôle de PHI', de plus ce point D est un point fixe, car il est aussi sur la polaire de C par rapport au cercle O; et enfin la droite DI tangente au cercle en I est de longueur constante, car AB est le lieu des points d'égale puissance par rapport aux cercles tels que O.

Donc le lieu des points I, I' est une circonférence ayant pour centre le point D déterminé par $HD = \frac{a^2}{c}$, et ayant pour rayon $DI^2 = \frac{a^2}{c^2}(a^2 - c^2)$, a et c étant les distances HB et HC.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Hugon, Berdon, à Cluny Giat, Julien Sauve à Moulins; de Kerdrel, à Kéruzoret; Bourgarel, à Toulon.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1883

Mathématiques élémentaires.

On donne deux droites R et R′, non situées dans un même plan, un plan P parallèle à ces deux droites, et un point A. On considère tous les cercles qui ont pour centre le milieu de la perpendiculaire commune aux deux droites R et R′, et dont la circonférence rencontre chacune de ces droites R et R′.

Trouver le lieu de la projection de A sur le plan de chacun de ces cercles.

Soient M et M′ les points où la circonférence de l'un des cercles considérés rencontre la droite R et la droite R′; la sphère qui a ce cercle pour grand cercle et la sphère qui a MM′ pour diamètre se coupent suivant un cercle C; à ce cercle C, on mène les tangentes MT et M′T′ aux points M et M′; soit D la droite d'intersection des plans RMT et R′M′T′. On demande le lieu de la trace de la droite D sur le plan P.

Trouver le lieu des extrémités du diamètre du cercle C perpendiculaire au diamètre MM′ du même cercle.

Plus généralement, trouver le lieu des extrémités d'un diamètre du cercle C faisant avec MM′ un angle constant donné.

ÉCOLE FORESTIÈRE

Composition en mathématiques (3 heures).

Démontrer que le carré d'un nombre premier diminué d'une unité est toujours divisible par 12. (Les nombres 2 et 3 font exception.)

— Déterminer deux nombres sachant que 7 est leur somme et 1267 la somme de leurs cinquièmes puissances.

— Un triangle est défini par sa hauteur, son périmètre et un angle adjacent à la base ; le construire et faire passer par ses trois sommets un triangle équilatéral de surface maximum ou minimum.

— Étant donné un parallélogramme ABCD dont les côtés AB, AC sont fixes de position, mais variables quant à leurs longueurs, de telle sorte que le sommet D décrive une droite fixe EF ; trouver le lieu décrit par le point de rencontre des hauteurs H du triangle ABC.

A chaque point D de la droite EF correspond ainsi un point H du lieu ; établir cette correspondance pour les différentes régions de la droite EF dans le cas général, et spécialement dans le cas où l'angle A est un angle droit.

Composition en trigonométrie et calcul logarithmique
(3 heures).

On donne dans un triangle :

l'angle A égal à $27^\circ\ 14'\ 21'',56$
l'angle B égal à $60^\circ\ 45'\ 22'',42$
l'angle C égal à $92^\circ\ \ 0'\ 16'',02$
et le périmètre égal à 2330^m6815

Déterminer :

1° les trois côtés ;
2° la surface ;
3° le rayon du cercle inscrit ;
4° le rayon du cercle circonscrit.

— Les angles POA et POB étant respectivement égaux à $65^\circ\ 17'\ 34'',79$ et à $24^\circ\ 35'\ 27'',28$, calculer, en millimètres carrés, les surfaces des trois zones décrites par les arcs PB, BA et AM tournant autour du diamètre MN perpendiculaire au diamètre PQ. Le rayon PO est égal à $37^m389765$.

— Déterminer les angles satisfaisant à la relation

$$2925 \sin x + 5292 \cos x = 3045.$$

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

Bordeaux.

(Novembre 1882 et avril 1883.)

— On connaît dans un trapèze rectangle ABCD

$$AB = a,\ DC = b,\ BC = h;$$

calculer le rapport des volumes engendrés en faisant tourner le trapèze successivement autour de a et de b.

Application : $a = 1200$; $b = 550$: $h = 240$.

— Trouver un angle x tel que

$$\sin x = \frac{5}{12} \operatorname{cotg} x.$$

— On connaît, dans un triangle rectangle, l'hypoténuse a, et la somme b des deux côtés de l'angle droit ; calculer ces côtés ; discuter les formules.

— Résoudre l'équation

$$\log (20x + 12) + \log (32x - 8) = \log 15.$$

— Les quatre côtés d'un trapèze sont a, b, c, d : calculer la hauteur du trapèze et les angles.

— Trouver le minimum du trinôme

$$5x^2 - 12x + 16.$$

— Dans un carré de côté a, on inscrit une circonférence de cercle, dans cette circonférence un carré, dans celui-ci une nouvelle circonférence, et ainsi de suite indéfiniment ; calculer la limite sur laquelle tend la somme des circonférences ainsi inscrites.

— Le volume d'un cône est égal à n fois celui d'un cube de côté m, et le rayon de sa base vaut Km. Calculer sa surface latérale.

Application : $n = 3$; $K = \frac{1}{2}$, $m = 7$ mètres.

— La base d'une pyramide régulière est un triangle équi-

latéral de côté a ; la somme des trois côtés de l'une des faces est b ; calculer le volume et la surface de cette pyramide.

Application : $a = 150$ mètres : $b = 425$ mètres.

— Un capitaliste possède une somme de 120,000 francs placée à 4 1/2 0/0 ; il dépense chaque année une certaine somme, et joint le reste de son revenu au capital ; au bout de 5 ans, il possède 140,000 francs : combien dépense-t-il par an ?

Session de juillet 1883.

Série unique (10 juillet).

Étant donnés un point A sur une circonférence de rayon R, le diamètre AOM et la tangente EMF au point M, calculer la distance au centre d'une corde BC, parallèle à la tangente, pour laquelle la surface du triangle ABC est égale à celle du trapèze BCFE. Vérifier la valeur trouvée.

— Dans une sphère S, de rayon R, on inscrit un cube C; dans le cube, on inscrit une deuxième sphère S′: dans cette sphère S′ on inscrit un cube C′, et ainsi de suite indéfiniment. On demande : 1° les rayons des sphères successives S, S′, S″... ; 2° les expressions des volumes des couches sphériques comprises entre S et S′, S′ et S″, etc. Vérifier que la somme de tous ces volumes, en nombre infini, est égale à la sphère S.

— Un électroscope est chargé d'électricité positive ; on approche un corps de la boule de l'appareil ; les feuilles se rapprochent jusqu'au contact, puis divergent ensuite. Quelle conclusion doit-on tirer de l'expérience ? Quelle serait la conclusion si les feuilles, après s'être rapprochées jusqu'au contact, ne divergeaient pas ?

— Métallurgie du fer.

— Indiquer les réactions exercées par le chlore sec et par le chlore humide sur les corps suivants :

Acide sulfhydrique ;

Hydrogène bicarboné ;

donner les formules des réactions.

Paris.

Juillet 1883.

Étant donné un hexagone régulier ABCDEF, on prend sur ses côtés des points A′, B′, C′, D′, E′, F′, tels que l'on ait

$$AA' = BB' = CC' = \ldots = FF' = \frac{AB}{n};$$

on demande : 1° de démontrer que l'hexagone A′B′C′D′E′F′ est régulier ; 2° de calculer le rapport de la surface de cet hexagone à celle du premier ; 3° de chercher pour quelle valeur de n ce rapport est le plus petit possible.

— Dans un triangle ABC, on donne a, A, et $b^2 + c^2$; calculer b et c.

— Trouver les limites entre lesquelles h doit être compris pour que l'inégalité

$$x^2 + 2hx + h > \frac{3}{16}$$

soit vérifiée pour toutes les valeurs réelles de x, positives ou négatives.

— Trouver les valeurs de $\sin x$ et $\sin y$, sachant que les lignes trigonométriques des arcs x et y vérifient les deux équations

$$\sin y = K \sin x,$$
$$2 \cos x + \cos y = 1.$$

— Deux circonférences O et O′, de rayon R et R′, sont tangentes extérieurement ; on leur mène une tangente commune extérieure AA′ ; calculer le volume engendré par le trapèze AA′OO′ tournant autour de OO′.

— On donne l'angle A du triangle ABC égal à 60° ; on donne le rapport $\frac{b}{c} = 2 + \sqrt{3}$; calculer $tg \frac{B - C}{2}$.

— Étant donnés une demi-circonférence O et son diamètre horizontal AB, on propose de trouver sur la circonférence un point M tel que, en abaissant la perpendiculaire MP sur AB, la somme MP + PA soit égale à une longueur donnée.

— Le côté d'un triangle équilatéral ABC est a. Par le point D, pris sur BC, on mène DE et DF respectivement parallèles à BA et CA. Déterminer la distance BD de façon que le

volume engendré par le parallélogramme AFDE dans sa rotation autour de BC soit les deux tiers du volume engendré par la rotation de ABC autour du même axe.

— Les rayons des bases d'un tronc de cône sont R et r; quelle doit être la hauteur de ce tronc de cône pour que sa surface latérale soit égale à la somme des surfaces des deux bases ?

— On lance d'un point O de bas en haut suivant la verticale un point matériel pesant P avec une vitesse v_0; quand P atteint le point le plus haut de sa course, on lance en O un deuxième point matériel P′ avec une vitesse égale v_0; à quelle hauteur au-dessus de O se rencontreront les deux points ?

— On donne les longueurs $2l$ et $2l'$ de deux cordes parallèles d'un cercle et la distance q de ces deux cordes; déterminer l'expression de la valeur du rayon de ce cercle.

— Trouver les limites entre lesquelles doit être compris le nombre donné m pour que l'équation

$$x^2 + 4mx + 2m^2 + 3m - 1 = 0$$

ait ses racines réelles.

— On considère un trapèze ABCD dans lequel un des côtés non parallèles est perpendiculaire sur la base. On demande de calculer BC, CD, DA, connaissant

AB $= a$, la surface s et le périmètre p;

quelles sont les conditions que doivent remplir s et p pour que le problème soit possible ?

— Résoudre l'équation

$$\sin 4x + \sin x = 0.$$

Clermont.

Composition unique.

Étant donnés une circonférence et un point A dans son plan, on mène le diamètre AO. Déterminer sur ce diamètre un point M tel que, en élevant la perpendiculaire MB sur AO, on ait

$$AM + kMB = \text{const.}$$

On désignera par a le rayon du cercle, par d la distance OA, par l la constante, par x l'inconnu OM. On discutera la valeur de x : 1° quand $d = a$, et $k = 2$; 2° dans le cas général. — Résoudre géométriquement la même question.

— Expériences fondamentales sur l'induction électrique.

— Calculer le poids d'un mètre cube d'air à la température de 30°, à la pression 740, l'état hygrométrique étant 0.4; sachant que le poids d'un litre d'air sec à la pression 760 et à 0° est 1^g293 ; le coefficient de dilatation de l'air est 0,00367 ; la tension de la vapeur d'eau à 30° est 31, 55 ; la densité de la vapeur d'eau est 0,622.

Toulouse.

Composition unique.

Trouver le maximum et le minimum de l'expression

$$\frac{\operatorname{tg} 3a}{\operatorname{tg}^3 a},$$

lorsque a varie de 0 à 90°. — Indiquer la loi de variation de la fonction lorsque a varie dans les mêmes limites.

— État hygrométrique; sa mesure ; insister sur les hygromètres à condensation.

— On donne un miroir sphérique concave dont le rayon est 5 mètres; à quelle distance du miroir faut-il placer un objet pour qu'il fournisse une image quatre fois plus petite? à quelle distance pour qu'il fournisse une image quatre fois plus grande ?

Poitiers.

Composition unique.

L'apothème d'un cône a une longueur donnée a : calculer la hauteur sachant que la surface totale est πb^2. Maximum de b.

— Dans un triangle ABC, on mène les bissectrices intérieures et extérieures AD et AD′ de l'angle A. On demande de calculer en fonction des trois côtés du triangle le segment

DD′ que ces bissectrices déterminent sur le côté opposé. Quelles doivent être les valeurs des côtés b et c pour que le segment DD′ soit égal à $2a$, en supposant que la différence des carrés $b^2 - c^2$ soit égale à un nombre donné K^2 ?

— Réfraction à travers les lentilles convergentes. Foyer réel ; foyer virtuel. — Rapport de grandeur de l'image à l'objet.

SUR LA FORMATION DE CERTAINS TABLEAUX

Par M. **Désiré André.**

(*Suite et fin*, voir pages 139, 163.)

V. — Forme du tableau

17. — On peut remarquer que, dans le tableau des 31 premiers nombres entiers, les colonnes ont toutes la même longueur, tandis que, dans le tableau des 26 lettres, il y a des colonnes de trois longueurs différentes. En d'autres termes, on peut remarquer que le premier de ces tableaux est un rectangle, mais que le second n'en est pas un.

En réfléchissant à ce fait, nous sommes parvenu à deux théorèmes très simples, qui nous semblent intéressants, et dont les démonstrations reposent l'une et l'autre sur les deux remarques suivantes.

18. — La première de ces remarques, c'est que, dans le système de la numération binaire, le nombre $2^c - 1$ se représente par une suite 1 1 1 . . . 1, de c chiffres 1. Il s'ensuit évidemment que l'objet dont ce nombre est le numéro figure dans toutes les colonnes du tableau.

La seconde de ces remarques, c'est que, dans le système de la numération binaire, les nombres entiers inférieurs à $2^c - 1$ s'associent par couples, de telle façon que les deux nombres de chaque couple se déduisent l'un de l'autre par la substitution du chiffre 1 au chiffre 0, et *vice versa*. Il est évident que, dans la suite naturelle des nombres entiers,

depuis 1 jusqu'à $2^c - 2$, les nombres d'un même couple sont équidistants des extrêmes et ont une somme égale à $2^c - 1$. Le point important pour nous, c'est que, si les deux nombres d'un même couple sont les numéros de deux objets, ces objets figurent l'un ou l'autre dans toutes les colonnes du tableau, mais ne figurent jamais ensemble dans une même colonne, de telle façon que ces deux objets augmentent le tableau d'une ligne entière, ni plus ni moins.

Ces remarques vont nous permettre de démontrer les théorèmes que nous avons annoncés sur la forme des tableaux. Ces théorèmes correspondent, l'un au cas où n est égal à $2^c - 1$, l'autre au cas où n est inférieur à ce nombre. Ces deux cas sont les seuls qui puissent se présenter, puisque, nous l'avons vu (3), les nombres n et c doivent toujours satisfaire à l'inégalité $n < 2^c$.

19. — Théorème I. — *Si* n *est égal à* $2^c - 1$, *le tableau est toujours un rectangle.*

En effet, les n objets donnés ont alors pour numéros les n nombres $1, 2, 3, \ldots, n$. Le numéro n, étant égal à $2^c - 1$, introduit, d'après la première remarque, une ligne entière dans le tableau. Les $n - 1$ autres objets constituent $\frac{n-1}{2}$ couples, lesquels, d'après la seconde remarque, introduisent aussi chacun, dans le tableau, une ligne entière. Donc ce tableau se compose de plusieurs lignes, toutes entières; donc il a la forme d'un rectangle.

Ce rectangle, nous le savons, a c colonnes. On peut voir, très facilement, qu'il a un nombre de lignes égal à 2^{c-1}.

20. — Théorème. II. — *Si* n *est inférieur à* $2^c - 1$, *on peut toujours donner au tableau la forme d'un rectangle.*

Pour le démontrer, nous distinguerons deux cas, suivant que n sera pair ou impair, c'est-à-dire de la forme $2k$ ou de la forme $2k + 1$.

Si n est de la forme $2k$, nous partageons nos objets en k couples; à chacun d'eux nous faisons correspondre un des couples de nombres définis dans notre seconde remarque : chacun de ces couples donne une ligne entière au

tableau, ni plus ni moins; ce tableau se compose donc de k lignes, toutes entières : c'est un rectangle.

Si n est de la forme $2k + 1$, nous partageons nos $2k + 1$ objets en deux parties, l'une formée d'un seul objet, quelconque d'ailleurs, l'autre composée des $2k$ objets restants. A l'objet isolé nous faisons correspondre le nombre $2^c - 1$: il s'ensuit, d'après notre première remarque, que cet objet donnera une ligne entière au tableau. Nous distribuons les $2k$ objets restants en k couples, auxquels nous faisons correspondre k des couples de nombres définis plus haut ; d'après notre seconde remarque, chacun de ces couples apportera aussi au tableau une ligne tout entière. Donc le tableau sera formé de $k + 1$ lignes entières, et, par conséquent, aura la forme d'un rectangle.

Ainsi, nous pouvons toujours disposer nos n objets en un tableau rectangulaire. A la vérité, pour arriver à ce résultat, nous modifions notre règle initiale (4), comme nous nous avons dit déjà (15) qu'on peut le faire : au lieu de donner à nos n objets les numéros $1, 2, 3, \ldots, n$, nous leur donnons pour numéros n nombres, choisis d'une manière convenable, parmi les $2^c - 1$ premiers nombres entiers.

VI. — Généralisation.

21. — Dans le problème que nous nous sommes proposé en commençant, chaque objet ne peut avoir, par rapport à chaque colonne, que deux manières d'être différentes : ou il y figure, ou il n'y figure pas. Si donc nous voulons représenter, par une suite de signes, l'ensemble des manières d'être d'un objet déterminé par rapport à toutes les colonnes du tableau, il nous suffit d'employer deux signes différents correspondant, l'un au cas où l'objet figure dans la colonne considérée, l'autre au cas où il n'y figure point.

Nous avons choisi, pour distinguer ces deux cas, le chiffre 1 et le chiffre 0. Nous aurions pu prendre deux autres signes, absolument quelconques. Mais, quels qu'aient été ces signes, ils auraient toujours donné, pour chaque objet du tableau,

une suite correspondant à un nombre écrit en chiffres, dans le système de la numération binaire.

22. — Si on généralise le problème de telle sorte que chaque objet puisse offrir, par rapport à chaque colonne du tableau, trois manières d'être différentes, pour représenter, par une suite de signes, l'ensemble des manières d'être d'un objet déterminé par rapport à toutes les colonnes du tableau, il faudra employer trois signes différents, correspondant aux trois manières d'être de l'objet par rapport à chaque colonne.

On pourra prendre ces trois signes différents d'une manière tout à fait arbitraire ; mais, de quelque manière qu'on les choisisse, les suites de signes correspondant aux objets donnés pourront être regardées comme des nombres, écrits en chiffres, dans le système de numération dont la base est 3.

Si chaque objet pouvait avoir, par rapport à chaque colonne 4, 5, 6,. . . manières d'être différentes, on serait conduit, pour former les suites correspondant aux objets donnés, à employer 4, 5, 6, . . . signes différents, et les suites formées pourraient être regardées comme des nombres, écrits en chiffres, dans les systèmes de numération dont les bases respectives sont les nombres 4, 5, 6, . . .

23. — Il n'est pas malaisé d'imaginer, de bien des façons, des tableaux où chaque objet puisse avoir, par rapport à chaque colonne, plus de deux manières d'être différentes.

Supposons, par exemple, que chaque colonne soit partagée, de haut en bas, en p parties. Un objet quelconque pourra présenter, par rapport à cette colonne, $p + 1$ manières d'être différentes : ou il n'y figurera pas du tout, ou il figurera soit dans la première partie, soit dans la deuxième,... soit dans la p^{me}.

Supposons, pour donner un nouvel exemple, que les colonnes ne soient point divisées, mais que chaque objet puisse figurer jusqu'à p fois dans une même colonne. Un objet quelconque pourra avoir encore, par rapport à chaque colonne, $p + 1$ manières d'être différentes : ou il n'y figurera pas, ou il y figurera une fois, deux fois, . . . p fois.

Dans chacun de ces exemples, on sera conduit à des suites qui pourront être regardées comme des nombres, écrits en chiffres, dans le système de numération dont la base est $p + 1$.

24. — On peut d'ailleurs former des tableaux qui conduisent à des nombres exprimés à l'aide d'une base supérieure à 2, sans avoir recours aux procédés qui précèdent, c'est-à-dire sans partager aucune colonne en plusieurs parties, ni sans faire figurer plusieurs fois un même objet dans une même colonne.

Imaginons, par exemple, que l'on forme un tableau des 26 lettres de notre alphabet, en convenant de donner à chaque lettre tantôt sa forme majuscule, tantôt sa forme minuscule. Évidemment, chaque lettre pourra présenter, par rapport à chaque colonne, trois manières d'être différentes : ou elle n'y figurera pas, ou elle y figurera sous sa forme majuscule, ou elle y figurera sous sa forme minuscule. Il faudra donc trois signes différents pour écrire les suites de signes correspondant à chaque lettre, et ces suites pourront être regardées comme des nombres, écrits en chiffres, dans le système de numération dont la base est 3.

25. — Dans tous les cas, on le voit, on est ramené à des nombres, écrits en chiffres, dans un certain système de numération. A mesure que la base de ce système augmente, le nombre minimum des colonnes du tableau tend à diminuer. Ce fait provient de ce que, dans un système donné, il faut d'autant moins de chiffres pour écrire tous les nombres inférieurs à une certaine limite, que ce système a plus de chiffres, c'est-à-dire que sa base est plus grande. En général, si l'on représente par n le nombre des objets donnés, par c le nombre des colonnes du tableau, et par β la base du système de numération auquel on est ramené, il faut et il suffit, pour que le tableau puisse être construit, que ces trois nombres n, c, β satisfassent à l'inégalité

$$n < \beta^c.$$

On tire de là

$$c > \frac{\log n}{\log \beta}.$$

Le second membre de cette dernière inégalité est une limite inférieure de c_2 et l'on voit que cette limite est d'autant moindre que β est plus grand.

QUESTIONS PROPOSÉES

100. — On donne un triangle équilatéral ABC et une droite DE, parallèle au côté BC. Trouver sur la droite DE un point M tel que $MA'.MB'.MC' = K$,
K étant un nombre donné, et A', B', C', étant les points où les droites MA, MB, MC rencontrent respectivement les côtés BC, AC, AB. *(Lucien Lévy.)*

101. — Sur la bissectrice de l'angle droit d'un triangle ABC rectangle en A, on prend un point M. Soit D le point où la bissectrice rencontre l'hypoténuse, P la projection de M sur le côté AC. Déterminer le point M de façon que les aires des triangles BMD et MPC aient une somme donnée.
(Lucien Lévy.)

102. — On considère un point A, mobile sur un demi-cercle BAC, de centre O, et les cercles inscrits aux triangles AOB, AOC. Trouver la position du point A pour laquelle les centres des cercles inscrits et le centre O du cercle donné forment un triangle de périmètre donné. *(G. L.)*

103. — On considère un triangle OPQ. Soit A un point pris sur PQ, A' le symétrique de A par rapport au milieu de PQ, A'' le symétrique de A' par rapport au point O. La droite AA'' rencontre OP au point R. Démontrer que la médiane AS du triangle RAP est parallèle à QO. *(G. L.)*

Le Rédacteur-Gérant,
E. VAZEILLE.

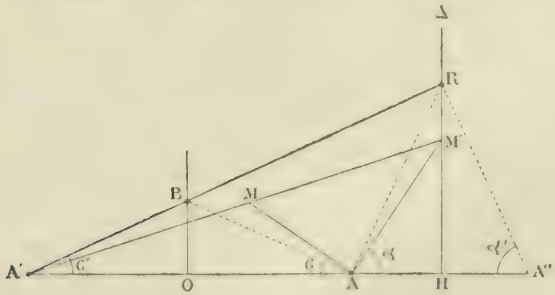
IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS — 16506-3.

NOTE DE GEOMÉTRIE RELATIVE A L'ELLIPSE

Par M. **G. de Longchamps.**

1. — Nous nous proposons de montrer, dans cette petite note, comment on peut, par une construction qui nous paraît plus simple que celles qu'on emploie ordinairement, *trouver le petit axe d'une ellipse connaissant un point de la courbe et le grand axe, en grandeur et en position.*

La construction dont nous voulons parler est une application nouvelle de *la transformation réciproque* que nous avons exposée l'année dernière, dans le *Journal de Mathématiques spéciales*. Mais nous tenons à faire remarquer que cette note n'exige, pour être comprise, que la notion élémentaire de la transformation réciproque et, qu'elle s'appuie uniquement sur la propriété fondamentale relative à la transformation de l'ellipse en droite, propriété qui a été démontrée par M. Lauvernay, dans ce journal (*). La construction que nous allons proposer pourrait donc être exposée en ne prenant pour base que des considérations élémentaires.



Soit AA′ le grand axe donné, et M un point de l'ellipse; joignons A′M et prolongeons cette droite jusqu'à ce qu'elle rencontre au point M′ la perpendiculaire élevée au point A, à AM. Abaissons maintenant de ce point M′ une perpendi-

(*) *Journal de Mathématiques élémentaires*, 1882, p. 82.

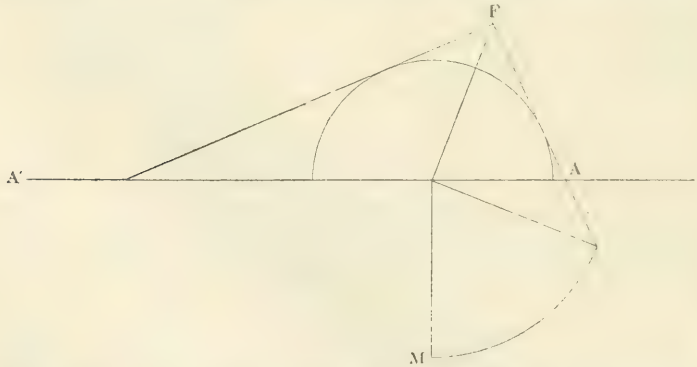
culaire sur la droite A'A prolongée; nous obtenons ainsi une droite Δ, que nous allons considérer.

On sait, par la propriété que nous venons de rappeler, que toute transversale, issue du point A', rencontre l'ellipse en un point μ, la droite Δ en un point μ', ces points μ, μ' formant un segment de droite qui est vu, du point A, sous un angle droit.

Cette remarque étant faite, prenons le point A'' symétrique de A, par rapport à Δ, et sur A'A'' comme diamètre, décrivons un demi-cercle qui rencontre Δ au point R; nous allons démontrer que A'R rencontre la perpendiculaire élevée au milieu de AA' en un point qui est précisément le sommet de l'ellipse proposée.

En effet, les angles marqués α et α' sont égaux; il en est de même des angles β et β'; de plus α' et β' sont des angles complémentaires. De là résulte ce fait que α et β étant angles complémentaires, l'angle BAR est droit; le point B est donc le sommet de l'ellipse.

2. — Si nous ne nous trompons, cette manière rapide de trouver le second axe d'une ellipse peut présenter quelque intérêt, parce qu'on rencontre, notamment dans la géométrie



descriptive, un certain nombre de questions qui comportent une détermination immédiate et évidente de l'un des axes, mais qui offrent quelque résistance, quand on veut déterminer l'autre axe.

Pour citer un exemple de ce que nous venons d'avancer, imaginons une demi-sphère reposant par son grand cercle de base sur le plan horizontal et cherchons l'ombre portée sur le plan par un point lumineux placé en F.

La construction indiquée par la figure ci-dessus montre que, pour des raisons faciles à donner, AA′ est le grand axe de l'ellipse d'ombre, et que M est un point particulier de cette ellipse. On pourra donc appliquer à cette figure la construction que nous venons d'indiquer plus haut et l'ombre portée sera ainsi déterminée par ses axes, au moyen d'une construction assez rapide.

ÉTUDE SUR LE CERCLE DE BROCARD

Par M. **A. Morel.**

(*Suite et fin;* voir p. 10, 33, 62, 97 et 169).

---

34. — *Si des sommets* A, B, C *du triangle* ABC, *on abaisse des perpendiculaires respectivement sur les côtés* B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 *du triangle* $A_1B_1C_1$, *ces perpendiculaires se coupent en un point* O_1, *qui est situé sur le cercle circonscrit au triangle* ABC.

Soit O_1 le point de rencontre des perpendiculaires abaissées respectivement de A sur B_1C_1 et de B sur A_1C_1. L'angle de ces deux perpendiculaires est égal à l'angle C_1, et par suite à l'angle C. Donc les quatre points A, B, C, O_1 sont sur une même circonférence.

De plus, si l'on joint le point O_1 au point C, la ligne ainsi menée fait avec la ligne AO_1 le même angle que ferait la perpendiculaire menée du point C sur A_1B_1; de même, l'angle BO_1C serait égal à l'angle de BO_1 avec la perpendiculaire menée du point C sur A_1B_1. Donc les trois perpendiculaires se coupent en un même point, qui est bien situé sur la circonférence circonscrite au triangle ABC.

35. — Il est facile de trouver la surface du triangle $A_1B_1C_1$, connaissant la surface du triangle ABC.

En effet, nous avons vu précédemment (7) que, en appelant δ la distance $\omega\omega'$, et d le diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC, nous avions

$$d = \frac{2\delta}{\sin 2\theta\sqrt{1 - 3\operatorname{tg}^2\theta}};$$

d'autre part, nous savons (11 et 12) que le triangle $\omega O\omega'$ est isoscèle, et que l'angle en O est égal à 2θ; le diamètre du cercle circonscrit est donc égal à $\frac{\delta}{\sin 2\theta}$. On a par suite, en appelant Δ et Δ_1 les surfaces respectives des deux triangles ABC et $A_1B_1C_1$, qui sont semblables :

$$\frac{\Delta_1}{\Delta} = \left(\frac{\delta}{d \sin 2\theta}\right)^2,$$

ce qui devient $$\frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{4}(1 - 3\operatorname{tg}^2\theta).$$

Abaissons du point K des perpendiculaires KP, KQ, KR sur les côtés du triangle ABC. Nous savons que l'on a

$$KP = A_1M_1 = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\theta.$$

De même $$KQ = \frac{b}{2}\operatorname{tg}\theta; \quad KR = \frac{c}{2}\operatorname{tg}\theta.$$

Donc on a

$$\text{tri. } PKQ = \frac{1}{8}\, ab \operatorname{tg}^2\theta \sin C = \frac{1}{4}\,\Delta \operatorname{tg}^2\theta.$$

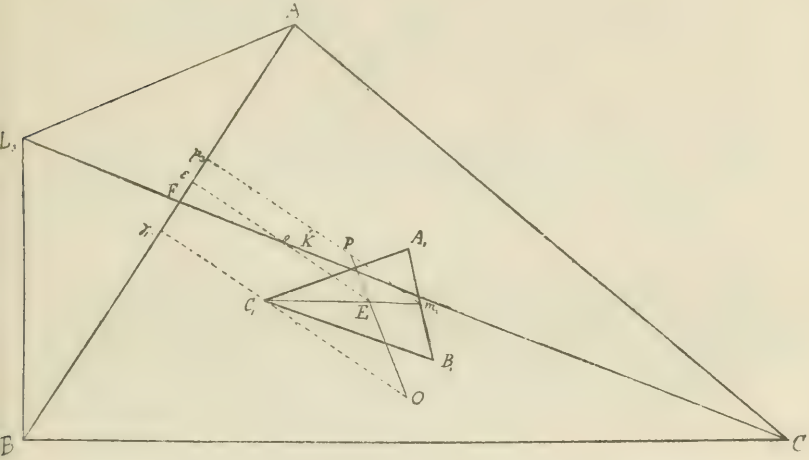
On trouvera les mêmes valeurs pour les deux triangles QKR, RKP. Si donc nous appelons Δ_2 la surface du triangle PQR, nous avons $$\Delta_2 = \frac{3}{4}\Delta\operatorname{tg}^2\theta.$$

Par suite $$\Delta_1 + \Delta_2 = \frac{1}{4}\Delta.$$

36. — Théorème. — *Par le point* K *passent les trois transversales qui joignent les sommets du triangle* ABC *avec les sommets du triangle formé par les tangentes menées par* A, B, C, *du cercle circonscrit.*

Nous avons vu, en effet, que si par les points B et A nous menons des droites faisant avec BA des angles égaux à l'angle C, ces droites rencontrent la ligne CKF en un point

L_3 qui est le conjugué harmonique du point K par rapport aux points C et F (le point F est le point où cette ligne rencontre le côté BA), et que le triangle BL_3A étant isoscèle, la ligne qui joint le sommet au milieu de la base est perpendiculaire sur cette base.

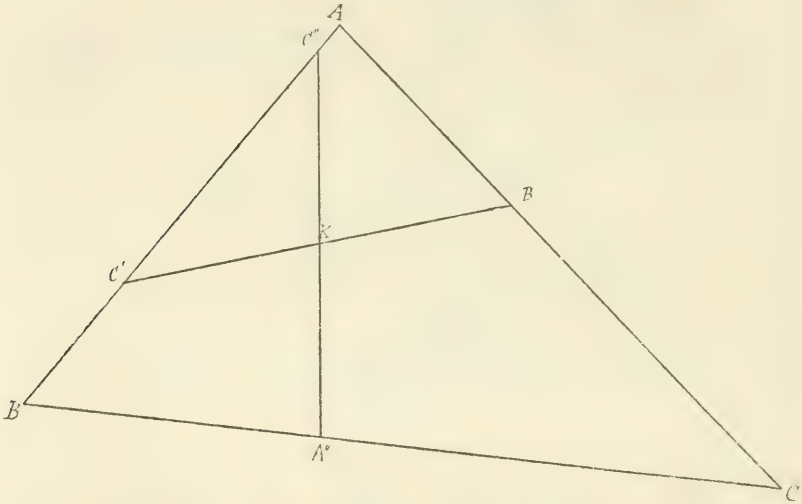


Mais les lignes BL_3 et AL_3, d'après leur construction même, ne sont pas autre chose que les tangentes en B et A au cercle ABC ; si nous prolongeons ces tangentes et que nous prenions de même les points L_2 et L_1 où elles rencontrent la tangente en C, nous verrons, par le même raisonnement que précédemment, que les lignes BL_2 et AL_1 passent par le point K. De plus, nous voyons que, par exemple, les deux côtés AB, AC, la ligne AK et la ligne AL_1 forment un faisceau harmonique.

37. — Théorème. — *Le point* K *est le centre d'un cercle qui coupe les côtés de* ABC *en des points diamétralement opposés.* (En d'autres termes, *par le point* K *passent trois droites égales ayant leur milieu en* K.)

D'après ce que nous avons dit de la détermination du point K, la ligne AE étant la médiane correspondant au

côté BC, c'est-à-dire étant le lieu des milieux des droites parallèles à BC, la ligne AK est le lieu des milieux des droites antiparallèles à BC et comprises dans l'angle BAC.



Si donc par le point K je mène une droite C'B' antiparallèle à BC, elle sera divisée en deux parties égales par le point K; de plus, l'angle AC'K qu'elle fait avec le côté BA (en allant de B vers A) est égal à l'angle BCA.

Si, de même, par le point K je mène C''A'' antiparallèle à AC, et rencontrant BA en C'', elle a aussi son milieu en K, et l'angle BC''K est égal à l'angle ACB. Donc le triangle KC'C'' est isoscèle, et, par suite, la circonférence ayant pour centre le point K, et pour rayon KC', passe par les points de rencontre des côtés du triangle avec les droites antiparallèles aux autres côtés et passant par le point K. Ces droites sont donc bien égales, et sont des diamètres de ce cercle.

38. — Théorème. — *Les perpendiculaires abaissées des milieux des côtés du triangle* $A_1B_1C_1$ *sur les côtés du triangle* ABC *se coupent en un point qui n'est autre que le centre du cercle des neuf points du triangle* ABC.

Nous avons vu (14) que les deux triangles ABC, $A_1B_1C_1$ ont le même centre de gravité. Soit E ce centre de gravité commun. La ligne C_1E rencontre A_1B_1 au point m_3, et l'on a

$$\frac{C_1E}{Em_3} = \frac{2}{1}.$$

(Voir la figure au n° 36.)

Par conséquent, en appelant γ_1, ε et μ_3 les projections des trois points sur AB, nous avons aussi

$$\frac{\gamma_1\varepsilon}{\varepsilon\mu_3} = \frac{2}{1}.$$

D'autre part, soit P le centre du cercle des neuf points du triangle ABC, on sait que les trois points O, E, P sont en ligne droite, et que l'on a

$$\frac{OE}{EP} = \frac{2}{1}.$$

Or, la projection du point O sur AB se confond avec le point γ_1, qui lui-même est au milieu M_3 de BC; il en résulte que la projection du point P se confond avec celle du point m_3, ce qui exige que la perpendiculaire abaissée du milieu de B_1C_1 sur le côté BC passe par le point P.

Le théorème est donc démontré.

Nous arrêterons ici cette étude, déjà bien longue. Notre but, en l'entreprenant, était seulement de faire connaître à nos lecteurs quelques-unes des propriétés de ce nouveau cercle lié au triangle; nous avons pris les plus élémentaires et nous avons ainsi indiqué aux lecteurs français une figure déjà connue à l'étranger depuis 1877, époque où de premières propositions sur la figure ont été signalées par notre camarade Brocard dans la *Nouvelle Correspondance mathématique*. M. Brocard a continué les communications dans le Journal belge jusqu'en 1881, puis dans des journaux allemands, tels que le *Zeitschrift für math. und natur. Unterricht*, dirigé par M. Hoffmann.

Comme nous l'avons dit au début, M. Neuberg, dans le *Mathesis*, a proposé de donner au nouveau cercle le nom de

son inventeur, ce qui, à notre avis, présente deux avantages : d'abord, de conserver ses droits à M. Brocard, et, en outre, de ne rien préjuger sur les propriétés d'une figure. De nouvelles découvertes peuvent, en effet, rendre singulier un nom qui serait consacré par l'usage, et qui ne serait plus en accord avec les propriétés connues de la figure.

C'est en particulier ce qui arrive, par exemple, pour le cercle que nous appelons le *cercle des neuf points*, et qui, en réalité, contient *dix-huit* points remarquables liés au triangle. Tandis que le nom de *cercle de Feuerbach*, que lui donnent les Allemands, du nom de celui qui leur a fait connaître ce cercle, ne présente pas la même singularité choquante.

Pour revenir au cercle qui nous intéresse, nous dirons que, dans l'étude que nous venons d'en faire, nous nous sommes contenté de grouper, d'une manière aussi méthodique que possible, et surtout de présenter très élémentairement les propriétés à la fois les plus simples et les plus importantes de ce cercle. Si, le plus souvent, nous avons cherché des démonstrations purement synthétiques, et à la portée de tous nos jeunes lecteurs de Mathématiques élémentaires, nous n'avons aucun droit sur les propositions mêmes que nous avons exposées, comme pourrait le faire croire l'absence complète d'indications sur les auteurs de ces propositions.

Nous nous sommes arrêté à la mesure qui consistait à ne nommer personne dans cette étude, à part M. Brocard, auquel revient le premier, de l'avis de tous, l'honneur de la découverte de ce cercle, précisément parce que, dans bien des cas, il peut être difficile de fixer bien exactement le nom de l'auteur véritable d'une découverte ; un auteur peut, de très bonne foi, trouver par lui-même un théorème, sans que pourtant on puisse, dans une publication, lui en attribuer la propriété, si ce théorème est déjà connu, et publié à l'insu de ce géomètre.

C'est en particulier ce qui nous est arrivé à propos de l'étude actuelle. Un théorème (20, 21 et 22) avait été proposé dans le *Journal de Mathématiques spéciales*; lorsque, dans le

cours de nos recherches, nous sommes arrivé à ce théorème, nous avons reconnu que la même propriété avait été énoncée d'une manière plus générale dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, et avait été en outre reprise sous la même forme dans une étude sur le centre des médianes antiparallèles, publiée en 1881 dans le *Mathesis*. Il est bien certain, du reste, que le géomètre qui nous avait envoyé l'énoncé de cette question ignorait qu'elle eût été déjà proposée, et même résolue, ce que nous ignorions nous-même à ce moment.

Nous croyons aujourd'hui devoir signaler les savants, tant français qu'étrangers qui se sont occupés de recherches sur la figure que nous avons présentée à nos lecteurs. Ce sont d'abord M. Brocard, capitaine du génie ; puis MM. Tarry, Neuberg, auxquels nous joindrons, en Allemagne, les noms de MM. Stoll, Kiehl et Fülhmann, qui ont indiqué un certain nombre des propriétés non signalées par M. Brocard dans le mémoire qu'il a présenté à ce sujet à l'Association française, au Congrès d'Alger.

Comme nous le disons plus haut, nous ne considérons pas cette étude comme complète, et nous signalerons à nos lecteurs, en leur proposant comme questions à résoudre, quelques-unes des propriétés les plus intéressantes que nous rencontrerons au sujet du cercle de Brocard ; nous croyons qu'il y a encore des points intéressants à élucider à ce sujet. A. M.

PROPOSITIONS

RELATIVES AU CERCLE DE BROCARD

Nous signalons à nos lecteurs, comme nous venons de l'annoncer dans l'étude que nous avons faite du cercle de Brocard, les propositions suivantes :

1. — Le triangle ABC et le triangle $A_1B_1C_1$ sont homologiques : leur centre d'homologie est le point D ; leur axe d'homologie est une droite G_1 qui est perpendiculaire à OD.

2. — Soit C_2 le point d'intersection du cercle de Brocard avec le cercle passant par les points A, B, O : de même A_2 et B_2 seront les points communs aux cercles de Brocard et aux cercles BCO, CAO. Les lignes A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sont les médianes du triangle $A_1B_1C_1$. Les triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ sont donc homologiques : leur centre d'homologie est le point E, centre de gravité du triangle ABC. L'axe d'homologie est une droite G_2, perpendiculaire à la ligne qui joint le point E au centre du cercle de Brocard.

3. — Le triangle ABC et le triangle $A_2B_2C_2$ sont homologiques ; leur centre d'homologie est le point K.

4. — Les droites issues des sommets du triangle ABC, et faisant avec ses côtés, extérieurement, l'angle α, déterminent deux triangles T'_α, T''_α, égaux entre eux et semblables au triangle donné. Les centres des cercles circonscrits à ces nouveaux triangles sont les symétriques des points ω et ω' par rapport au centre O du cercle circonscrit au triangle primitif.

5. — Les points segmentaires ω et ω' sont les centres des médianes antiparallèles des triangles T'_α et T''_α.

6. — Les parallèles menées par A, B, C aux côtés du triangle $A_1B_1C_1$ se coupent au point N de rencontre de OD et du cercle circonscrit à ABC.

7. — Les centres α_1, β_1, γ_1 des triangles circonscrits à ωBC, ωCA, ωAB sont les sommets d'un triangle qui admet pour l'un des points segmentaires le centre O du cercle circonscrit à ABC. Il en est de même pour les centres α_2, β_2, γ_2 des cercles circonscrits aux triangles ω'BC, ω'CA, ω'AB. Les triangles $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ et $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ sont semblables au triangle ABC. De plus, les triangles $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ et $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ sont homologiques, leur centre d'homologie étant le point O.

Tous ces énoncés nous ont été communiqués par M. Brocard. Nous publierons les solutions géométriques ou analytiques qui nous seront adressées, en donnant la préférence cependant aux solutions géométriques qui pourraient ainsi prendre place dans la partie élémentaire du Journal, partie qui contient l'étude du cercle de Brocard.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1883

Mathématiques élémentaires.

Solution par M. HADAMARD, élève au Lycée Louis-le-Grand (copie couronnée).

On donne deux droites R *et* R′, *non situées dans un même plan et un plan* P *parallèle à ces deux droites. On considère tous les cercles qui ont pour centre le milieu* O *de la perpendiculaire commune aux deux droites, et dont la circonférence rencontre ces deux droites.*

1° Trouver le lieu de la projection d'un point A *de l'espace sur le plan de ces cercles.*

2° Si M, M′ *sont les points de rencontre du cercle* O *avec les deux droites, la sphère qui a* MM′ *pour diamètre et la sphère, qui a le cercle* O *pour grand cercle, se coupent suivant un cercle* C. *A ce cercle on mène aux points* M, M′ *les tangentes* MT, M′T′. *Les plans* RMT, R′M′T′ *se coupent suivant une droite* SS′, *lieu de la trace de cette droite sur le plan* P.

3° Si l'on mène le diamètre du cercle C *perpendiculaire à* MM′, *quel est le lieu des extrémités de ce diamètre?*

4° Plus généralement, quel est le lieu des extrémités d'un diamètre du cercle C *faisant avec* MM′ *un angle donné* α?

1° Soit LL′ la perpendiculaire commune (1), O son milieu. Projetons en H,H′, sur un plan mené par le point O parallèlement au plan P, les points M,M′. Les lieux des points H,H′ sont respectivement les projections Ox,Ox' des droites R,R′.

D'ailleurs les rectangles MHOL, M′H′OL′ montrent que MH = M′H′, et par suite ces droites sont les côtés opposés d'un parallélogramme. Il en résulte que les droites MM′, HH′ ont même milieu I. Mais les triangles rectangles OMH, OM′H′, égaux comme ayant l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal, montrent que le triangle HOH′ est isos-

---

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

cèle et par suite que la droite OI est bissectrice de l'angle xOx'.

Le plan MOM′ passe donc par l'une des deux bissectrices OI,OI′ de l'angle xOx'.

Ce fait que le plan MOM′ passe tantôt par l'une de ces deux droites, tantôt par l'autre, tient à ce qu'il existe deux séries de cercles satisfaisant à l'énoncé. En effet, on peut obtenir les points M,M′ en portant sur les deux droites deux distances LM = L′M′. Mais on peut à une même longueur LM portée dans un certain sens, faire correspondre deux longueurs L′M′ portées dans deux sens différents, ce qui donne deux cercles OMM′.

Les considérations précédentes montrent immédiatement quel est le lieu de la projection a du point A. Il se compose de deux circonférences décrites dans des plans perpendiculaires respectivement à OI et OI′ et ayant respectivement pour diamètres les perpendiculaires abaissées du point A sur ces deux droites.

2° On voit immédiatement que le cercle C est le cercle décrit sur MM′ comme diamètre dans un plan perpendiculaire à OI (ou OI′). Par suite les tangentes MT,M′T′ sont perpendiculaires au plan MOM′, et l'on voit que la droite SS′ n'est autre que la perpendiculaire à ce plan, inscrite entre les deux droites R et R′.

Projetons alors la figure sur le plan P. La projection ss' de SS′ sera perpendiculaire à la trace du plan MOM′, trace qui est parallèle à OI, puisque OI est parallèle au plan P. Cette projection a donc une direction fixe. De plus, si nous prenons pour les points S et S′ servant à définir SS′ ceux qui sont sur R et R′, les points s et s' seront respectivement sur deux droites fixes, savoir les projections r et r' de R et de R′. D'ailleurs la trace h dont nous cherchons le lieu est sur ss' et (à cause des triangles semblables hSs, $hS's'$) la divise dans le rapport $\frac{S's'}{Ss}$, rapport qui est constant puisque les droites R et R′ sont parallèles au plan P. Donc le lieu du point h est une droite passant par le point l où se rencontrent les projections r et r'.

On peut dire que ce lieu est la droite menée par le point l, de façon que les sinus de ses angles avec r et r' soient entre eux comme sS et s'S'. Car ces sinus sont dans le rapport des perpendiculaires hp, hq abaissées du point h sur r et r', perpendiculaires qui, à cause de l'égalité des angles s,s', sont entre elles comme hs et hs', ou comme sS et s'S'.

A la seconde série de cercles O correspond un second lieu du point h, savoir une droite telle que le rapport des sinus de ses angles avec les droites r et r' soit aussi égal à $\frac{Ss}{s'S'}$, mais située dans l'angle des droites r et r' où ne se trouve pas la première. Ces deux lieux sont, comme on le voit, conjugués harmoniques par rapport à l'angle (r, r').

La droite MM' se trouve être définie absolument comme la droite ss', et par suite le point m où elle perce le plan P décrit la même droite lh.

Quant à la relation qui lie les points m et h, c'est

$$lm \,.\, lh = \text{const.}$$

En effet, je dis d'abord que cette relation existe quand le plan P contient la droite R'.

Pour cela je mène par le point I une parallèle à ss'. Cette parallèle perce le plan P en un point S', situé sur la parallèle à OI menée par le point s' et aussi sur la projection de MM', puisque le plan projetant de MM' et le plan S_1'IM' se confondent tous deux avec le plan perpendiculaire à OI au point I. Cette même projection contiendra encore la projection I' de I. Or le triangle S'_1IM est rectangle, puisque SS' est perpendiculaire au plan MOM'. Il en résulte que le carré de II', c'est-à-dire une constante, est égal au produit I'S'_1.I'M', produit qui est proportionnel au produit L'S'.L'M', puisque les triangles rectangles L'MI, S'M'S'_1 ont un angle aigu constamment égal au demi-angle des deux droites.

La relation démontrée dans ce cas particulier subsiste généralement; car, les droites MM',LL',SS' étant parallèles à un même plan fixe, les segments de lh sont proportionnels à ceux de R'.

3° et 4° Si $M_1M'_1$ désigne le diamètre du cercle C faisant avec MM' l'angle α, on voit que le point M_1 n'est autre que

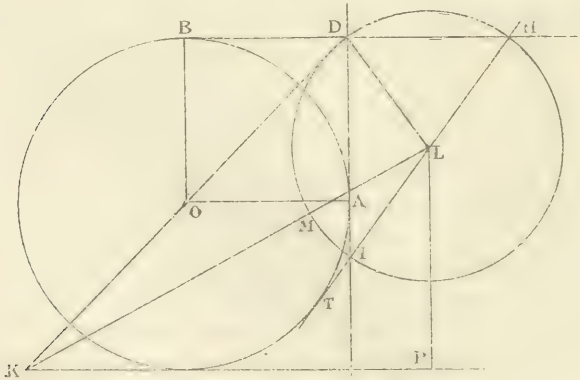
le point M qui a tourné autour de OI de l'angle α. Son lieu n'est donc autre que la droite R qu'on aurait fait tourner de l'angle α autour de l'axe OI.

Il y a, comme toujours, deux lieux; les premiers lieux sont les génératrices d'une surface de révolution d'axe OI; les seconds les génératrices d'une surface de révolution d'axe OI'.

QUESTION 45

Solution par M. Aubry, élève au Lycée de Charleville.

On considère un cercle C *et deux rayons rectangulaires* OA, OB ; *les tangentes aux points* A *et* B, *supposées fixes, forment avec une troisième tangente mobile un triangle rectangle. On imagine le cercle circonscrit à ce triangle et l'on propose de démontrer que ce cercle est constamment tangent à un cercle fixe que l'on déterminera.* (G. L.)



Soit D le point de concours des tangentes en A et B. HIT la tangente mobile, L le centre du cercle Δ circonscrit au triangle IDH, K le symétrique de D par rapport à O et enfin M le point d'intersection de KL et de Δ.

Si du point L nous abaissons la perpendiculaire LP sur la tangente KP au cercle C, nous aurons

$KL^2 = KP^2 + LP^2 = \left(2R + \frac{DH}{2}\right)^2 + \left(2R - \frac{DI}{2}\right)^2$ et, en développant,

$$KL^2 = 4R^2 + 2R \,.\, DH + \frac{DH^2}{4} + 4R^2 - 2R \,.\, DI + \frac{DI^2}{4}$$

puis en remarquant que $DH^2 + DI^2 = IH^2 = 4LI^2$

$$KL^2 = 4R^2 + LM^2 + 2R(2R + DH - DI)$$
$$= 4R^2 + LM^2 + 2R[R + DH - (DI - R)].$$

Mais $\quad R + DH = BH = HT = HI + IA$

$$DI - R = IA$$

d'où, par soustraction,

$$R + DH - (DI - R) = HI = 2LM.$$

L'égalité précédente deviendra donc

$$KL^2 = (KM + ML)^2 = (2R + LM)^2.$$

ce qui exige que $KM = 2R$.

Le cercle A reste donc constamment tangent à un cercle de centre K et de rayon 2R.

Remarque. — On pourrait chercher le lieu décrit par le point L. Ce lieu est facile à déterminer, car si nous tirons LD, nous aurons

$$LK - LD = LM + KM - LD = 2R.$$

Cette égalité montre que le lieu est une hyperbole ayant ses foyers en D et K, tangente au cercle C aux points d'intersection de KD avec ce cercle, et dont les asymptotes sont OA et OB.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Puig, à Marseille; Deville, à Lorient.

QUESTION 64

Solution par M. Aubry, élève au Lycée de Charleville.

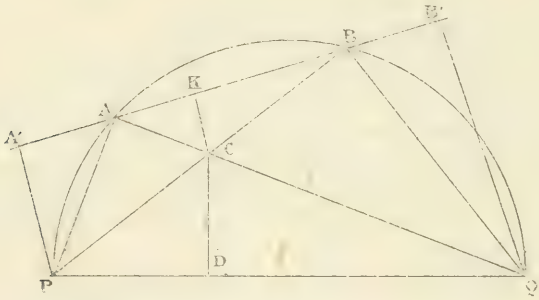
On donne un demi cercle, construit sur la droite PQ *comme diamètre; soient* A *et* B *deux points pris sur la circonférence et tels que* $PA + QB = 2R$ *; les droites* PB *et* QA *se coupent en un point* C.

1° Démontrer que le triangle CPQ *jouit de cette propriété que l'inverse de la hauteur relative à* PQ *est égal à la somme des inverses des côtés qui la comprennent.*

2° Etablir que cette propriété s'applique aussi au triangle CAB, *en considérant la hauteur issue du point* C.

3° Étudier la variation de AB *quand le point* A *est supposé mobile sur la circonférence, et montrer que cette longueur passe par un maximum relatif quand la figure* PABQ *est un demi-hexagone régulier.*

4° Ayant projeté les points P, Q *sur* AB, *on obtient deux points* A', B'. *On propose d'établir la relation qui existe entre* AB *et* A'B'. (G. L.)



1° Soit CD la hauteur du triangle PCQ relative au côté PQ. En égalant deux expressions de la surface de ce triangle, nous aurons

$$PQ.CD = PA.CQ;$$

d'où

$$\frac{1}{CD} = \frac{PQ}{PA.CQ}: \qquad (1)$$

Or les triangles PCA et BCQ, qui sont semblables, donnent la proportion

$$\frac{CP}{CQ} = \frac{PA}{BQ}$$

de laquelle on déduit

$$\frac{CP + CQ}{CP} = \frac{PA + BQ}{PA} = \frac{2R}{PA}:$$

puis

$$\frac{CP + CQ}{CP.CQ} = \frac{2R}{PA.CQ} = \frac{PQ}{PA.CQ}. \qquad (2)$$

Les égalités (1) et (2) montrent que

$$\frac{1}{CP} = \frac{CP + CQ}{CP.CQ} = \frac{1}{CP} + \frac{1}{CQ}.$$

2° Du point C abaissons la perpendiculaire CK sur AB; de la similitude des triangles PCQ et ACB on déduit

$$\frac{CK}{CD} = \frac{CA}{CP},$$

puis

$$\frac{1}{CK} = \frac{CP}{CA.CD} = \frac{CP}{CA}\left(\frac{1}{CP} + \frac{1}{CQ}\right)$$
$$= \frac{1}{CA} + \frac{CP}{CQ.CA},$$

ou, en remarquant que

$$\frac{CP}{CQ} = \frac{CA}{CB}, \quad \frac{1}{CK} = \frac{1}{CA} + \frac{1}{CB}.$$

3° Le quadrilatère inscriptible PABQ donne

$$PQ.AB = BP.AQ - AP.PQ$$

ou, en posant $PA = x$ et $PQ.AB = m$

$$AB.2R = m = \sqrt{x(4R - x)(4R^2 - x^2)} - x(2R - x).$$

Après avoir fait disparaître le radical et ordonné, il vient

$$2x^2(4R^2 - m) - 4Rx(4R^2 - m) + m^2 = 0.$$

La condition de réalité de x est

$$2m^2 + 4R^2m - 16R^4 \leq 0$$

ou, m' et m'' désignant les racines de ce trinôme.

$$m'' < m \leq m'.$$

Or $m'' = -4R^2$; $m' = 2R^2$ et m ne peut être négatif; la condition devient donc $m \leq 2R^2$.

Le maximum de m sera donc $2R^2$ et alors $AB = R$, $x = R$ et PABQ est bien un demi-hexagone régulier.

Ceci nous fait voir que, PA croissant de 0 à R, AB croît de 0 à R et que, PA continuant à croître jusqu'à 2R, AB diminue jusqu'à 0.

4° Les triangles PAA′ et PQB, QBB′ et PQA étant semblables, nous aurons

$$AA'.PQ = PA.BQ$$
$$BB'.PQ = PA.BQ$$

d'où $$AA' = BB' = \frac{PA.BQ}{2R}$$

et $$A'B' - AB = AA' + BB' = \frac{PA.BQ}{R}.$$

AB et PA.BQ étant maximums tous deux pour PA = BQ = AB = R, A'B' sera maximum en même temps qu'eux.

Alors A'B' = 2R, ce qui pouvait facilement se voir *a priori*.

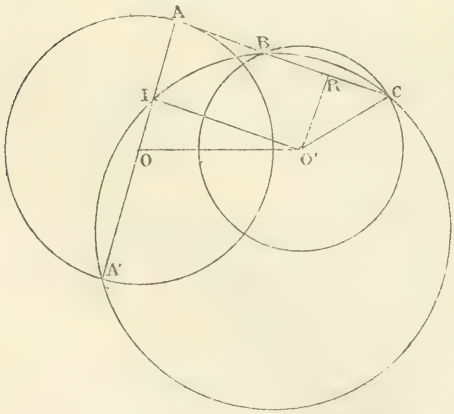
Nota. — La même question a été résolue par M. A. de Kerdrel, à Kerozoret.

QUESTION 66

Solution par M. Aubry, élève au Lycée de Charleville.

On considère deux cercles Δ et Δ' se coupant orthogonalement. On prend sur Δ un point quelconque A, *et on mène par ce point à Δ une tangente qui rencontre Δ' aux points* B *et* C; *par ces points et par le point* A', *diamétralement opposé à* A, *on fait passer une circonférence qui rencontre* AA' *en un point* I. *Trouver le lieu décrit par ce point, lieu qui est une circonférence.*

(G, L.)



Soit K le milieu de BC; nous avons

$$AA'.AI = AB.AC = AK^2 - CK^2.$$

Or le trapèze rectangle OO'KA donne la relation

$$OO'^2 = AK^2 + OA^2 + O'K^2 - 2OA.O'K;$$

d'où $$AA'.O'K = AK^2 + OA^2 + O'K^2 - OO'^2.$$

Mais par hypothèse

$$OO'^2 = OA^2 + O'C^2.$$

de plus $$O'K^2 = O'C^2 - CK^2 ;$$
donc $$OO'^2 - O'K^2 = OA^2 + CK^2.$$

Comparant cette égalité à la précédente, il vient
$$AA'.O'K = AK^2 - CK^2 = AA'.AI.$$

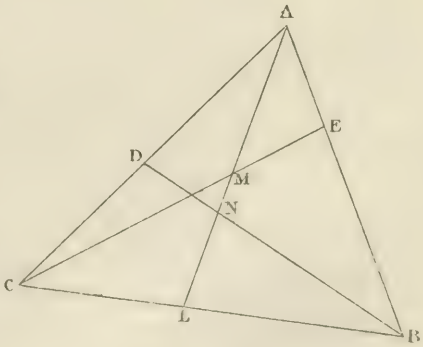
Donc $O'K = AI$ et la figure IAKO′ est un rectangle. Le lieu du point I est donc la circonférence décrite sur OO′ comme diamètre.

QUESTION 77

Solution par M. Voignier, au Collège de Commercy.

Construire un triangle connaissant les deux côtés AB *et* AC, *et la longueur de la partie de la bissectrice de l'angle* BAC *comprise entre les deux hauteurs partant de* B *et de* C.

$$AC = b$$
$$BA = c$$
$$MN = m.$$



Les triangles semblables MAE et ADN donnent :

$$\frac{AM}{AN} = \frac{AE}{AD} = \frac{c}{b}$$

$$\frac{AM}{AM - AN} = \frac{b}{c - b},$$

$$AM = \frac{bm}{c - b},$$

$$AN = \frac{cm}{c - b}.$$

D'ailleurs on a $$b \sin A = \frac{bm}{c - b} \sin \frac{A}{2},$$

$$2b \cos \frac{A}{2} = \frac{bm}{c - b}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \frac{m}{2(c - b)}.$$

Connaissant $\cos\frac{A}{2}$ et par conséquent l'angle A, le triangle est déterminé.

NOTA. — La même question a été résolue par M. F. Taratte à Évreux.

QUESTION 99

Solution par M. P. GIAT, élève au Lycée de Moulins.

En appelant A, B, C *les angles d'un triangle et* α *un angle déterminé par la relation*

$$\cot g\,\alpha = \cot g\,A + \cot g\,B + \cot g\,C, \qquad (1)$$

démontrer que l'on a

$$\cot g\,2\alpha = \frac{\sin^4 A + \sin^4 B + \sin^4 C}{2\sin A \sin B \sin C\,(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)}.$$

(Brocard.)

On a $$\cot g\,2\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}. \qquad (2)$$

Or la relation (1) nous donne :

$$\cot g\,\alpha = \frac{\cos A \sin B \sin C + \cos B \sin C \sin A + \cos C \sin A \sin B}{\sin A \sin B \sin C}$$

et comme $A + B + C = 180^\circ$, la relation précédente devient

$$\cot g\,\alpha = \frac{\sin^2 A + \sin B \sin C \cos A}{\sin A \sin B \sin C}.$$

Remplaçant $\cot g\,\alpha$ par sa valeur dans l'égalité (2), il vient

$$\cot g\,2\alpha = \frac{(\sin^2 A + \sin B \sin C \cos A)^2 - \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C}{2\sin A \sin B \sin C\,(\sin^2 A + \sin B \sin C \cos A)}$$

Il s'agit de démontrer d'abord que le numérateur est égal à $\frac{1}{2}(\sin^4 A + \sin^4 B + \sin^4 C)$, c'est-à-dire :

$$\sin^4 A + 2\sin^2 B \sin^2 C \cos^2 A + 4\sin^2 A \sin B \sin C \cos A - 2\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C = \sin^4 B + \sin^4 C.$$

On peut écrire ainsi :

$$\sin^2 A\,[1 - (\cos A - 2\sin B \sin C)^2] = (\sin^2 B - \sin^2 C)^2 = \sin^2(B+C)\sin^2(B-C)$$

ou, comme $\sin A = \sin(B + C)$

$$1 - (\cos A - 2\sin B \sin C)^2 = \sin^2 (B - C)$$
$$1 - \cos^2 (B - C) = \sin^2 (B - C),$$

on arrive à une identité. L'égalité (3) peut donc s'écrire :

$$\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\sin^4 A + \sin^4 B + \sin^4 C}{4\sin A \sin B \sin C (\sin^2 A + \sin B \sin C \cos A)}.$$

Or il est facile de reconnaître que

$$2\sin^2 A + 2\sin B \sin C \cos A = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C.$$

En effet, on peut écrire :

$$\sin^2 (B + C) - 2\sin B \sin C \cos (B + C) = \sin^2 B + \sin^2 C,$$

et si l'on développe le premier membre, il se réduit à

$$\sin^2 B + \sin^2 C.$$

Donc $\operatorname{cotg} 2\alpha = \dfrac{\sin^4 A + \sin^4 B + \sin^4 C}{2\sin A \sin B \sin C (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)}.$

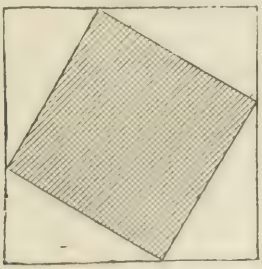
C. Q. F. D.

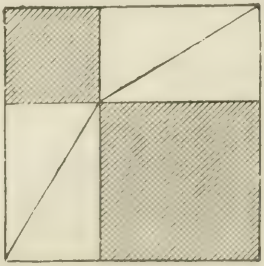
VARIÉTÉS

LA CHAISE DE LA MARIÉE

Parmi la multitude des démonstrations que l'on a données du carré de l'hypoténuse, nous croyons devoir reproduire la suivante, qui appartient au genre casse-tête.

Nous construisons deux carrés égaux, dont chacun des





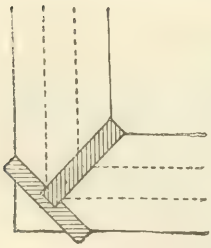
côtés est égal à la somme des deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle quelconque, et nous formons les figures 1 et 2. Si de chacun de ces carrés égaux nous retranchons quatre triangles égaux au triangle rectangle donné, il

reste d'une part le carré construit sur l'hypoténuse, et d'autre part les deux carrés construits sur les autres côtés.

La démonstration que nous venons de donner du théorème de Pythagore sur le carré de l'hypoténuse ne diffère pas essentiellement de la démonstration hindoue, connue sous le nom de la *chaise de la petite mariée*, que l'on rencontre dans l'ouvrage de Bhascara *(Bija Ganita § 146)*. Après avoir tracé la figure qui n'est qu'une combinaison des deux précédentes, l'auteur hindou se contente de dire : *Voyez*. Le numéro de janvier 1882 du *The Mathematical Magazine* contient une variante de cette démonstration attribuée à Garfield, l'infortuné président des États-Unis assassiné l'année précédente.

LE FOSSÉ DU CHAMP CARRÉ

Un champ carré est entouré d'un fossé dont la largeur est partout la même. On demande d'établir un pont avec deux madriers dont la longueur est précisément égale à la largeur du fossé. La figure (3) représente un coin du champ avec la disposition des deux madriers. Quant à la démonstration mathématique, elle résulte de l'inégalité suivante :



$$2\sqrt{2} < 3.$$

et devient évidente si l'on suppose la largeur du fossé égale à trois unités.

Cette devinette peut trouver son utilité en temps de guerre; nous avons déjà donné un autre exemple, dans notre premier volume, pour la traversée d'un régiment.

DEVINER UN DOMINO PENSÉ

Faites penser à une personne de la société un domino, ou mieux encore deux nombres égaux, ou inégaux, dans la

suite des dix nombres

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Vous pourrez, par une seule question, deviner le domino ou les deux nombres pensés. Cette devinette peut se pratiquer de bien des façons ; voici la plus simple :

Vous faites doubler le premier point et ajouter le nombre qu'il vous plaira ; puis vous faites quintupler le résultat, et ajouter le second point. Alors demandez le total.

Pour obtenir les deux numéros pensés, vous diminuez le total de cinq fois le nombre ajouté ; la différence obtenue est un nombre de deux chiffres dont le premier correspond au premier nombre pensé, et le second à l'autre point.

En effet, si l'on désigne par x le premier point, par y le second, par a le nombre ajouté, les opérations successives sont représentées algébriquement par

$$2x$$
$$2x + a$$
$$10x + 5a$$
$$10x + 5a + y$$

et si l'on retranche $5a$ du résultat, il reste $10x + y$.

On peut deviner de la même manière trois chiffres pensés, en faisant effectuer successivement les opérations précédentes, puis les suivantes :

Doubler le total et ajouter un nombre b,

$$20x + 10a + b + 2y;$$

quintupler le résultat obtenu et ajouter le troisième chiffre pensé, $100x + 50a + 5b + 10y + z$;

demandez alors le résultat. Si vous en retranchez

$$50a + 5b,$$

il reste $100x + 10y + z$,

c'est-à-dire le nombre du système décimal dont les centaines représentent le premier chiffre pensé, les dizaines le second et les unités le troisième.

Il peut sembler curieux que, par une seule question, on puisse deviner trois nombres pensés, puisque l'on n'a qu'une seule équation pour trois inconnues. C'est un exemple des plus simples de l'analyse indéterminée : car l'équation obtenue n'a qu'une seule solution dans ce cas. Plus générale-

ment on pourra opérer dans un système de numération à base quelconque, ou même dans un système à bases multiples, car, dans ces divers systèmes, un nombre quelconque ne peut être représenté que d'une seule manière par des chiffres, puis avec le même signe.

(Extrait des *Récréations mathématiques* de M. E. Lucas, 2e v. Gauthier Villars, éditeur).

QUESTIONS PROPOSÉES

104. — On donne un cercle compris entre deux droites parallèles; on demande de mener à ce cercle une tangente telle que la partie de cette tangente comprise entre les deux parallèles ait une longueur donnée.

105. — On donne deux parallèles MN, M'N', et un point P entre ces deux parallèles; mener par le point P une droite rencontrant MN en x, M'N' en y, de telle façon que Px — Py ait une longueur donnée c.

106. — Deux cercles se coupent en A et B. On demande de mener par le point A une droite rencontrant l'un des cercles en x, l'autre en y, de façon que, si l'on tire Bx et By, on ait

$$Bx^2 + By^2 = d^2.$$

107. — On a deux droites rectangulaires AB et CD; sur ACB, on prend, de part et d'autre de C les longueurs CA $= a$, CB $= b$; on demande de mener par le point C, dans l'angle BCD, une droite Cx de longueur c, telle que, si l'on abaisse la perpendiculaire xy sur CD, on ait

$$Ax^2 - Bx^2 = xy^2.$$

Le Rédacteur-Gérant,
E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX
RUE BERGÈRE, 20, PARIS — 18346-3

EXERCICES DIVERS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Par M. **Émile Lemoine,** ancien élève de l'École Polytechnique.

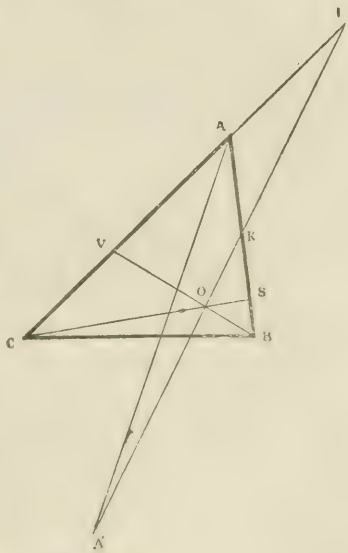
I

Soit ACB *un triangle,* K *un point fixe sur* AB.

Je divise KB *en* S *et* CA *en* V *de façon que l'on ait :*

$$\frac{CV}{VA} = \frac{BS}{SK} = m \quad (1)$$

Trouver le lieu du point O *d'intersection des droites* CS, BV *quand* m *varie.*



Soit I la position de V lorsque m prend la valeur $\frac{BA}{AK}$ c'est-à-dire lorsque S est en A.

On a par définition

$$\frac{BA}{AK} = \frac{CI}{IA} \quad . \quad (2)$$

Multiplions membre à membre (1) et (2) on a

$$\frac{BA}{AK} \cdot \frac{CV}{VA} = \frac{CI}{IA} \cdot \frac{BS}{SK}$$

ou

$$\frac{BA}{BS} \cdot \frac{CV}{VA} = \frac{CI}{IA} \cdot \frac{AK}{SK}$$

ou en multipliant les deux membres par $\frac{OS}{OC}$

$$\frac{OS}{OC} \cdot \frac{BA}{BS} \cdot \frac{CV}{VA} = \frac{OS}{OC} \cdot \frac{CI}{IA} \cdot \frac{AK}{SK}.$$

Le premier membre est l'unité, car il exprime que dans le triangle CAS les trois points V, O, B sont en ligne droite ; le second membre, qui est aussi par conséquent égal à l'unité,

exprime donc que dans le triangle CAS les trois points O, K, I sont en ligne droite.

Le lieu de O est par suite KI.

Nous laissons au lecteur à démontrer que, quel que soit K, la droite KI passe toujours par le point A′ symétrique de A par rapport au milieu de BC.

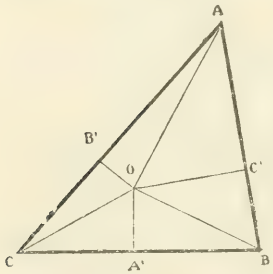
II

Si trois points A′, B′, C′ *pris respectivement sur les côtés* BC, CA, AB *d'un triangle, sont tels que l'on ait*

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2a \,.\, CA' + 2b \,.\, AB' + 2c \,.\, BC',$$

les trois perpendiculaires menées en A′ *à* CB, *en* B′ *à* AC, *en* C′ *à* AB *se coupent en un même point.*

Supposons que d'un point O du plan d'un triangle ABC nous abaissions des perpendiculaires sur les trois côtés ; appelons A′, B′, C′ les pieds de ces perpendiculaires et joignons OC, OB, OA.



Posons pour abréger l'écriture

$$CA' = x, \quad AB' = y, \quad BC' = z$$
$$OA' = x', \quad OB' = y', \quad OC' = z'$$

les deux triangles rectangles A′OB, C′OB donnent

$$x'^2 + (a - x)^2 = z^2 + z'^2$$

C′OA, B′OA donnent $z'^2 + (c - z)^2 = y^2 + y'^2$

B′OC, A′OC — $y' + (b - y)^2 = x^2 + x'^2$

Ajoutons ces trois égalités nous avons

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2ax + 2by + 2c$$

ou $a^2 + b^2 + c^2 = 2a \,.\, CA' + 2b \,.\, AB' + 2c \,.\, BC'$;

et comme la relation est du premier degré, la réciproque est vraie et le théorème est démontré.

Cette relation entraîne évidemment

$$2a \,.\, CA' + 2b \,.\, AB' + 2c \,.\, BC' = 2a \,.\, A'B + 2b \,.\, B'C + 2c \,.\, C'A.$$

III

Soit O *le point du plan du triangle* ABC *tel que les parallèles menées par ce point aux trois côtés et limitées entre*

ces côtés soient égales entre elles, soit l *cette longueur commune :*

Construire un triangle connaissant la base BC, *l'angle opposé et la longueur* l.

On démontre facilement le lemme suivant :

Lemme. — *Sur les côtés d'un angle* CAB *fixe je prends deux points* C *et* B *tels que*

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{AB} = \frac{1}{K}$$

K *étant une ligne donnée; la droite* CB *passe par un point fixe* L *que l'on obtient en projetant sur la bissectrice de l'angle* CAB *l'extrémité de la longueur* AH = 2K, *le point* H *étant pris sur l'un des côtés de l'angle donné.*

Il est facile de voir que l'on a

$$l = \frac{2abc}{bc + ac + ba}$$

et d'en tirer $$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2a - l}{al}.$$

D'après le lemme précédent on peut donc trouver le point L; c'est-à-dire que la bissectrice AL est déterminée et l'on est ramené au célèbre problème de Pappus (généralisé pour un angle quelconque) :

Par un point L *pris sur la bissectrice d'un angle donné, mener une droite de longueur donnée et terminée aux côtés de l'angle.*

La discussion du problème est intéressante.

Ce qui précède montre comment on résoudrait facilement le problème suivant :

Construire un triangle connaissant la base, la somme ou la différence des deux autres côtés et la longueur l.

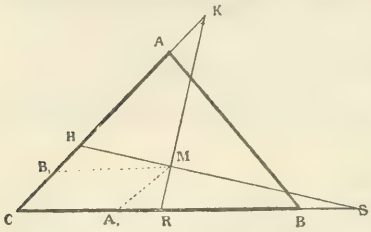
IV

Étant donné un triangle ABC *on prend*

sur AC *(dans le sens* CA) AK = m
— — *(dans le sens* AC) AH = n
— CB *(dans le sens* CB) BS = m
— — *(dans le sens* BC) BR = n

On joint KR, HS. *Ces deux droites se coupent en* M.

Le lieu de M *est, quels que soient* m *et* n, *une droite parallèle à la bissectrice de l'angle* BCA *et qui coupe* AB *au point symétrique par rapport au milieu de* AB *du pied de cette bissectrice.*



Lemme. — *Soit* C_1 *le point symétrique par rapport au milieu de* AB *du pied* C' *sur* AB *de la bissectrice de l'angle* C *du triangle* ABC; *par* C_1 *je mène une parallèle à cette bissectrice; soit* M *un des points de cette parallèle; par* M *je mène une parallèle à* AC *qui coupe* CB *en* A_1 *et une parallèle à* CB *qui coupe* AC *en* B_1; *la différence* $MB_1 - MA_1$ *est égale à la différence des côtés* CB — CA.

Réciproquement, si $MB_1 - MA_1 = CB - CA$, *le point* M *appartient à la droite considérée.*

Je n'insiste pas sur ce lemme facile à démontrer.

Revenons au problème proposé :

Par M je mène une parallèle à CA qui coupe CB en A_1
— — CB — CA en B_1

on a
$$\frac{MA_1}{HC} = \frac{SA_1}{SC}$$

ou
$$\frac{MA_1}{b-n} = \frac{m+n+A_1R}{a+m};$$

$$\frac{MA_1}{A_1R} = \frac{KC}{CR}$$

ou
$$\frac{MA_1}{A_1R} = \frac{b+m}{a-n};$$

d'où
$$\frac{MA_1}{b-n} = \frac{m+n+MA_1\dfrac{a-n}{b+m}}{a+m},$$

d'où
$$MA_1 = \frac{(b+m)(b-n)}{m-n+a+b};$$

on aurait de même

$$MB_1 = \frac{(a+m)(a-n)}{m-n+a+b},$$

d'où $$MB_1 - MA_1 = a - b.$$

Le point M appartient donc, d'après le lemme, à la droite désignée par l'énoncé.

Remarque I. — On trouverait facilement

$$A_1R = B_1H = \frac{(a-n)(b-n)}{a+b+m-n}.$$

Remarque II. — Ce lieu est remarquable parce qu'il semble au premier abord qu'il faudrait encore pour le déterminer une relation entre m et n.

Si l'on joint par exemple KS et HR et que l'on appelle N leur intersection, il n'y a pas de lieu de N à moins que l'on ne donne une relation entre m et n.

Soit $m = n$, on verrait que le lieu de N est la droite perpendiculaire à la bissectrice de l'angle BCA et qui coupe CB au point D tel que $CD = a + b$.

Soit $m^2 + n^2 = K^2$, le lieu est une parabole.

Remarque III. — En opérant par rapport à chaque sommet de ABC comme nous venons d'opérer par rapport au point C, nous trouverons des points analogues au point M, qui seront par conséquent répartis sur trois droites. En nous reportant à l'étude que nous avons publiée au commencement de 1883 dans le *Journal de Mathématiques spéciales* sur de nouveaux points remarquables, etc., on verra facilement que ces trois droites se coupent au point que nous avons appelé ω_1 et nous pouvons énoncer le théorème :

Si l'on prend sur chaque côté d'un triangle le point symétrique par rapport au milieu de ce côté, du pied de la bissectrice tombant sur ce côté, et que par ce point on mène une parallèle à cette bissectrice, on a trois droites qui concourent en un point, par lequel passent également les trois droites qui joignent un sommet au point de contact, sur le côté opposé à ce sommet, du cercle ex-inscrit qui touche ce côté entre les deux autres sommets.

La remarque III peut se généraliser et l'on démontre encore facilement le théorème suivant :

Soient dans un triangle ABC *les trois droites* Aα, Bβ, Cγ *se coupant en un même point ; soient* α_1, β_1, γ_1 *les symétriques de* α, β, γ *par rapport aux milieux de* BC, *de* AC, *de* AB. *Les droites menées par* α_1, β_1, γ_1, *parallèlement à* Aα, Bβ, Cγ *se coupent en un même point.*

(A suivre.)

CONSIDÉRATIONS

SUR LA PROJECTION OBLIQUE DU CERCLE

Par M. **A. Jullien,** professeur de sciences à Sainte-Barbe.

Dans un très grand nombre de questions telles que les sections planes des cylindres et des cônes, les ombres portées, les voûtes en stéréotomie, etc., on a immédiatement deux diamètres conjugués d'une ellipse.

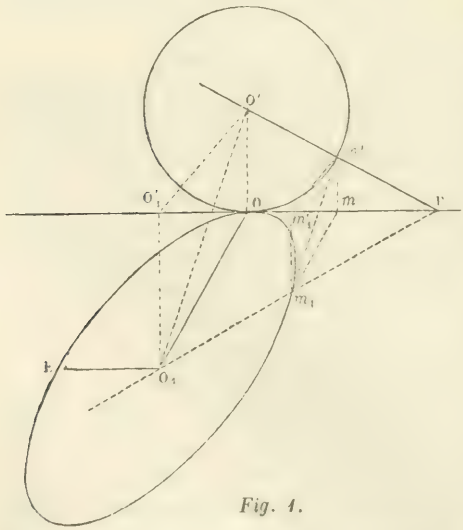


Fig. 1.

Nous nous proposons de montrer que, par des considérations purement géométriques, en considérant l'ellipse comme étant la projection oblique de l'ombre portée d'un cercle, on est conduit à la construction connue pour la détermination des axes en direction, et à une construction nouvelle pour celle des sommets.

Soit O' *(fig. 1)* un cercle placé sur le plan vertical de projection, et tangent à la ligne de terre. Rappelons les con-

structions par lesquelles on obtient l'ombre portée d'un tel cercle sur le plan horizontal, quand on l'éclaire au moyen de rayons parallèles à une direction donnée OO_1, $O'O'_1$. On sait que cette ombre portée, ou projection oblique, est une ellipse qui a pour centre O_1, qui est tangente à la ligne de terre en O, et qui a pour diamètres conjugés la droite O_1O et une parallèle O_1E à la ligne de terre, égale au rayon du cercle.

Pour avoir l'ombre portée d'un point quelconque m de la circonférence, on peut déterminer la trace horizontale m_1 du rayon lumineux mm_1, $m'm'_1$, mené par m' ; mais observons que, O_1P étant la projection oblique de la droite $O'P$ qui passe par m', le point m_1 doit se trouver sur O_1P ; observons, en outre, que les triangles O_1OO', m_1mm' sont semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels, et que, par suite, les droites m_1m' et O_1O' sont parallèles. Si donc on prolonge $O'm'$ jusqu'en P, et si on joint O_1P, une parallèle à O_1O' menée par le point m' donnera m_1 sur PO_1.

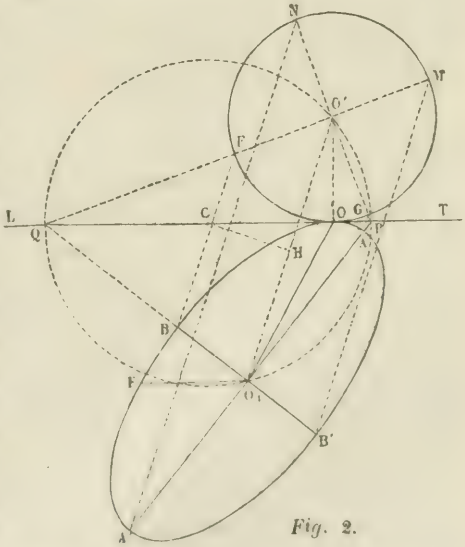


Fig. 2.

Chaque système de deux diamètres perpendiculaires du cercle fournit, en projection oblique, un système de deux diamètres conjugués de l'ellipse. On aura les axes de la courbe, en déterminant le système de deux diamètres du cercle qui se projette suivant deux droites perpendiculaires.

Décrivons un cercle *(fig. 2)* qui passe par les deux points O_1, O' et qui ait son centre C sur la ligne de terre ; P et Q

étant les points où ce cercle et la ligne de terre se rencontrent, joignons les points O_1 et O' aux points P et Q. Les angles $PO'Q$ et PO_1Q sont droits comme inscrits dans une demi-circonférence ; par conséquent les axes de l'ellipse sont les droites AA', BB', suivant lesquelles se projettent les diamètres GN, FM du cercle.

Actuellement, supposons qu'on nous donne deux diamètres conjugués O_1O et O_1E d'une ellipse et proposons-nous de déterminer ses axes en direction et en grandeur.

Axes en direction. — Par le point O, on mène une parallèle LT à O_1E; on élève à LT une perpendiculaire OO' égale à O_1E, puis on décrit un cercle ayant son centre sur LT et passant par O_1 et O'. Les droites O_1P et O_1Q, qui vont du point O_1 aux deux points P et Q_1 où le cercle coupe la ligne LT, donnent les directions des axes. Nous retrouvons ainsi la construction bien connue à laquelle conduit le théorème de Chasles sur les segments de la tangente parallèle à l'un des diamètres conjugués.

Axes en grandeur. — On décrit le cercle O' dont on a le centre et le rayon, on joint le point O' aux points P et Q, puis on mène des parallèles à la droite O_1 O' par les points où les droites O'P et O'A rencontrent la circonférence O'. Ces parallèles coupent les axes en des points qui sont les sommets.

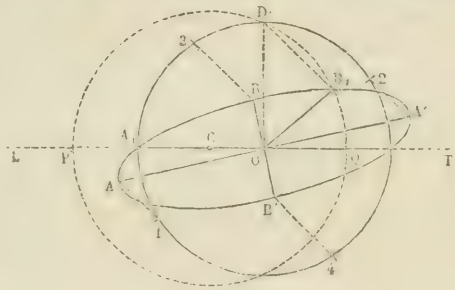
La construction que nous venons d'exposer et que nous fournit la considération de l'ellipse comme projection oblique du cercle, diffère essentiellement de celle qui est basée sur les théorèmes d'Apollonius. Elle présente, en outre, quelques *avantages graphiques*. On obtient, en effet, les quatre sommets à la fois par des parallèles faciles à mener, tandis qu'autrement on a bien les axes en grandeur, mais il faut encore les diviser en deux parties égales, ce qui exige huit arcs de cercle, puis porter les demi-axes sur les directions précédemment déterminées.

La construction suivante repose sur les mêmes considérations géométriques que celles qui précèdent, mais est plus avantageuse au *point de vue graphique*.

Soient OA_1 et OB_1 deux diamètres conjugués d'une ellipse

(fig. 3). Décrivons un cercle ayant O pour centre et OA_1 pour rayon. Ce cercle peut être considéré comme étant situé sur l'un des plans de projection ; l'ellipse devient alors sa projection oblique, son ombre portée, sa perspective cavalière, et notamment OB_1 est la projection oblique du rayon OD perpendiculaire au diamètre OA_1 que nous prenons pour ligne de terre.

Décrivons un cercle qui ait son centre C sur la ligne de terre et qui passe par D et B_1. Soient P et Q les points où ce cercle coupe la ligne de terre. Observons que l'angle droit PDQ se projetterait obliquement suivant un angle droit PB_1 Q et que les diamètres du cercle O parallèles à PD et DQ auraient pour projections des diamètres de l'ellipse parallèles à PB_1 et B_1 Q et, par suite, perpendiculaires entre eux.



(Fig. 3.)

Axes de l'ellipse en direction. — On mène par le point O des parallèles aux droites PB_1, B_1Q qu'il est d'ailleurs inutile de tracer sur l'épure.

Sommets de l'ellipse. — On détermine les points 1, 2, 3, 4 où la circonférence O est rencontrée par des parallèles aux droites PD, DQ menées par son centre. Des parallèles à DB_1 passant par ces points rencontrent les axes de l'ellipse aux sommets.

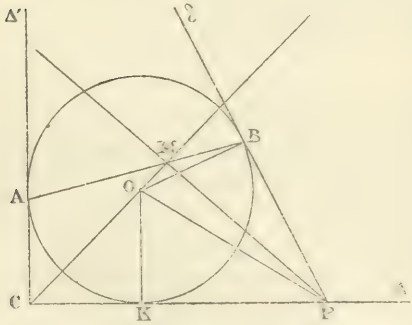
La considération du cercle dont une ellipse, donnée par deux diamètres conjugués, est la projection oblique, nous a conduit à la détermination des axes et des sommets. Elle permettrait de résoudre aussi facilement la plupart des problèmes qui se rapportent à l'ellipse : tracé de la courbe par points, tangentes, intersections, segments ou secteurs dans un rapport donné.

QUESTION 86

Solution par M. Naura, élève au Collège de Vitry-le-François.

On considère deux droites rectangulaires Δ *et* Δ' *et sur* Δ *on prend un point fixe* P. *Par ce point* P *on fait passer une transversale mobile* δ *qui forme avec* Δ *et* Δ' *un triangle rectangle. Imaginons maintenant le cercle inscrit et soit* A *le point de contact de ce cercle avec* Δ' *et* B *son point de contact avec* δ. *Démontrer que la droite* AB *passe par un point fixe.*

La droite AB coupe la bissectrice de l'angle C en M. Nous pouvons déterminer ce point A qui est indépendant de la direction de la droite δ. Menons les rayons de contact OK, OB et joignons MK. Les angles COP et MBP étant égaux comme ayant mêmes mesures, car l'arc intercepté par l'angle au centre COP est évidemment la moitié de l'arc AKB, le quadrilatère MBPO est inscriptible. Comme dans ce quadrilatère l'angle OBP est droit, il en est de même de l'angle OMP. M est donc la projection de P sur CO. Ce point étant indépendant de la position de δ, toutes les cordes AB y passent.

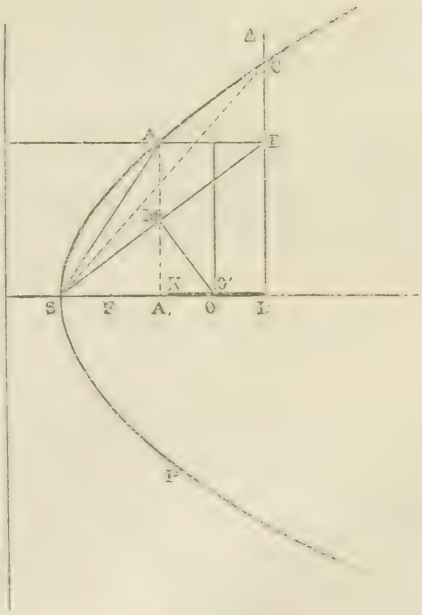


Nota. — La même question a été résolue par M. Aubry, à Charleville.

QUESTION 87

Solution par D. Bablon, élève au Collège d'Épinal.

On considère une parabole P, *et une droite* Δ *perpendiculaire à l'axe de cette parabole et située à une distance du sommet* S *égale au double du paramètre; une parallèle à l'axe rencontre* P *au point* A *et* Δ *au point* B. *Trouver le lieu du centre des cercles circonscrits au triangle* SAB *quand cette parallèle se déplace. On suppose pour bien fixer la position de la droite* Δ, *que cette droite rencontre réellement la parabole.*



Le centre de la circonférence circonscrite au triangle SAB se trouve à la rencontre des perpendiculaires élevées aux milieux de deux côtés du triangle. Soient O et O' les points où ces perpendiculaires rencontrent l'axe de la parabole.

Les deux triangles OMS et SBD donnent

$$\frac{OS}{SB} = \frac{SM}{SD}$$

ou

$$\frac{OS}{SB} = \frac{\frac{SB}{2}}{2p}$$

p désignant le paramètre de la parabole;

ou $$OS = \frac{\overline{SB}^2}{4p} = \frac{\overline{BD}^2 + SD^2}{4p} = \frac{\overline{BD}^2 + 4p^2}{4p}.$$

Mais $$\overline{BD}^2 = \overline{AA'}^2 = 2p.A_1S$$
d'après la formule de la parabóle ; donc
$$OS = \frac{2p.A_1S + 4p^2}{4p} = p + \frac{A_1S}{2}$$

Mais, d'autre part,
$$SO' = SD - O'D = 2p - \frac{AB}{2} = 2p - \frac{2p - SA_1}{2}.$$

ou $$SO' = p + \frac{A_1S}{2};$$

donc $$SO = SO' = p + \frac{A_1S}{2}.$$

Le centre de la circonférence circonscrite à SAB est donc sur l'axe. L'axe est donc le lieu cherché.

Nota. — La même question a été résolue par MM. de Kerdrel, à Kérozoret ; Taratte, à Évreux.

QUESTION 91

Solution par M. Ferdinand Taratte, élève au Lycée d'Évreux.

On considère des paraboles P *ayant pour sommet un point fixe* O *et passant aussi par un autre point fixe* A. *1° Les tangentes à* P *aux points* O *et* A *se coupent en un point* I, *trouver le lieu de ce point; 2° la tangente au point* A *et l'axe de la parabole se coupent en un point* I', *trouver le lieu de ce point. On déterminera ces deux lieux par des considérations purement géométriques.* (École centrale, 1879.)

1° On sait que I est le milieu de AI'. Donc si par ce point je mène une parallèle à l'axe, elle passera par I, milieu de AO, et on voit que le lieu de I est la circonférence décrite sur OE comme diamètre.

2° Par I' je mène une parallèle à la tangente en O et je prolonge AO, en F, j'aurai AO, = FO car AI = II' : donc le lieu du point I' est une circonférence décrite sur FO = AO comme diamètre.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Giat, Julien Sauve, à Moulins; Naura, à Vitry-le-François; Gindre, à Pontarlier; Joseph Taratte, à Saint-Louis; Berdon, Hugon, à Cluny; de Kerdrel, à Kéruzoret; Bablon, à Épinal; Aubry, à Charleville; J. Slabochevitsch, à Saint-Pétersbourg.

QUESTION 92

Solution par M. NAURA, élève au Collège de Vitry-le-François.

Déterminer les côtés d'un triangle connaissant a *et sachant que* a, b, c *et* h_a *sont en progression géométrique* (h_a *est la hauteur abaissée sur* a).

De la progression géométrique on déduit

$$b^2 = ac \qquad (1)$$

et

$$bc = ah_a. \qquad (2)$$

La dernière relation prouve que le triangle est rectangle, on a donc

$$b^2 + c^2 = a^2. \qquad (3)$$

De (1) et (3) on déduit

$$c^2 + ac - a^2 = 0,$$

d'où

$$c = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$$

après avoir rejeté la racine négative

et

$$b = \sqrt{ac} = a\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}.$$

NOTA. — Ont résolu la même question MM. de Kerdrel, à Kéruzoret; F. Taratte, à Évreux.

QUESTION 93

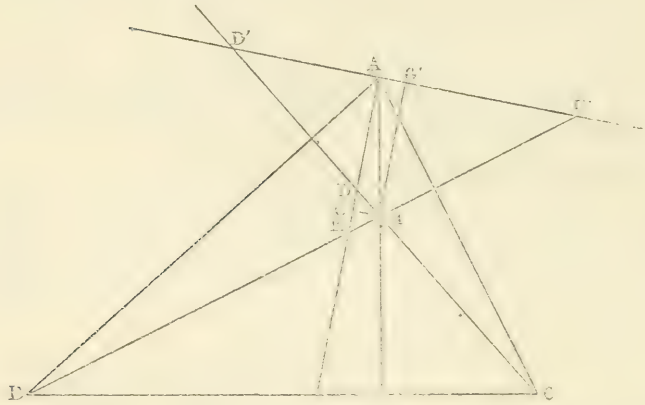
Solution par M. AMAURY DE KERDREL.

Construire un triangle ABC *connaissant la différence des angles* B *et* C *et les portions de la bissectrice intérieure de l'angle* A *et de la bissectrice extérieure du même angle comprises entre les hauteurs partant de* B *et de* C.

Supposons le problème résolu; soit H le point de concours des hauteurs; DE, D'E' les deux portions de bissectrices. Les deux triangles HDE, HD'E' sont isoscèles, car

$$DEH = EDH = 90 - \frac{A}{2}$$

$$HD'E' = HE'D' = \frac{A}{2}.$$



Soient G et G' les milieux de DE et de D'E', les triangles HD'G', HDG sont semblables et

$$\frac{HG}{\frac{DE}{2}} = \frac{\frac{D'E'}{2}}{HG'}$$

d'où $$HG \times HG' = \frac{DE \times DE'}{4}.$$

Le produit $GA \times GH$ est donc connu. D'ailleurs, l'angle GAH, angle de la bissectrice et de la hauteur, est égal à la demi-différence des angles à la base. On est donc ramené à construire le triangle rectangle AGH, dans lequel on connaît les angles et le produit des côtés de l'angle droit; ce problème se résout facilement, car

$$AH^2 = \frac{GA \times GH}{\sin \alpha \cos \alpha} = \left(\frac{DE}{2 \sin \alpha}\right) \times \left(\frac{D'E'}{2 \cos \alpha}\right)$$

AH se construira donc par une moyenne proportionnelle ; le triangle étant connu, le reste de la construction s'achèvera aisément.

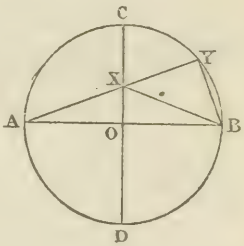
NOTA. — La même question a été résolue par M. F. Taratte, élève au lycée d'Évreux.

QUESTION 97

Solution par M. F. TARATTE, élève au lycée d'Évreux.

Dans un cercle dont le centre est o, *on mène deux diamètres rectangulaires* AB *et* CD ; *on demande de mener par le point* A *une corde* Ay *qui coupe la ligne* Co *au point* x *et la circonférence au point* y, *de manière que l'on ait* Ax.ox = Cx.xy

(Reidt.)



Soit Ay la corde demandée. J'aurai alors

$$\frac{Ax}{Cx} = \frac{xy}{ox},$$

d'où

$$\frac{Ay}{Ao} = \frac{xy}{ox}$$

ou encore

$$\frac{ox}{Ao} = \frac{xy}{Ay};$$

mais dans les deux triangles rectangles Axo et AyB j'ai

$$\frac{ox}{Ao} = \frac{yB}{Ay}$$

donc $xy = yB$, et par suite yxB vaut 45°. Le triangle AxB étant aussi isoscèle, il en résulte que l'angle yAB vaut la moitié de 45°, et par suite le point y est le milieu de l'arc BC.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Youssoufian, à Constantinople; Caitucoli, à Draguignan; Naura, à Vitry-le-François; Voignier, à Commercy.

EXAMENS ORAUX DE L'ÉCOLE FORESTIÈRE (1883)

Étant donné $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = b$, calculer $\sin x$ et $\cos x$; dire *à priori* combien on trouvera de valeurs pour $\sin x$ et pour $\cos x$.

— Déterminer la plus petite valeur que pourra prendre l'expression $(x - 1)^2 + (2x + 1)^2$.

— Étudier les variations de la fonction

$$y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$$

lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$. Construire la courbe représentative de cette variation.

— On donne deux axes rectangulaires Ox et Oy, et sur Ox un point F d'abscisse a ; ce point est le foyer d'une parabole dont Oy est la directrice ; trouver l'équation de la parabole, son intersection avec une parallèle à l'axe, et la tangente au point trouvé.

— On donne un plan incliné ; en un point A de ce plan, une tige fixe AB perpendiculaire au plan. Un fil attaché en B est fixé, à son autre extrémité, à la surface d'une sphère. On demande quelle doit être la position de la sphère sur le plan pour qu'il y ait équilibre. Trouver la tension du fil.

— Un mobile se meut sur une droite AB, et est constamment attiré par un point I suivant une force mesurée par la distance du point I au mobile. Comment pourra-t-on évaluer le travail de la force ?

— On donne deux axes rectangulaires ; on prend une droite OID, dont I est le milieu ; sur Oy, on prend OB = OI ; trouver les équations des médianes du triangle BID.

— Former l'équation du troisième degré qui admet pour racines 2, 4 et 8.

— On donne deux axes rectangulaires Ox et Oy ; on demande l'équation du cercle de rayon R tangent à Oy, et ayant son centre sur Ox. On prolonge toutes les droites

issues de O, telles que OM d'une quantité constante MB = R; trouver le lieu décrit par le point B.

— Calculer la vitesse d'un mouvement, sachant que l'espace est donné par la formule

$$e = a \sin t.$$

— Trouver le rectangle de périmètre maximum ou minimum inscrit dans un demi-cercle.

— Rendre calculable par logarithmes l'expression

$$1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx.$$

— On a une droite de longueur constante dont les extrémités s'appuient sur deux droites rectangulaires; par les extrémités on mène des perpendiculaires aux axes. Trouver l'équation du lieu du point de rencontre de ces perpendiculaires.

EXAMENS ORAUX DE L'ÉCOLE NAVALE (1883)

Construire $x + y = a$; $x^2 + y^2 = m^2$.

— Centre de gravité du tronc de pyramide triangulaire, ou du tronc de cône à bases parallèles.

— Étant donnés deux points A et B d'un plan, et un certain nombre de forces dans ce plan, soit m^2 la somme des moments par rapport à A, K^2 la somme des moments par rapport à B: la somme des projections des forces sur AB est nulle. Que peut-on en conclure?

— Lorsque des forces situées dans un plan sont telles que la somme de leurs moments, prise par rapport à trois points du plan est nulle pour chaque point, il y a équilibre.

— Trouver l'angle de la ligne de terre et d'un plan dont les traces sont en ligne droite.

— Soit BD une droite donnée; on prend un point C sur cette droite; sur BC comme côté on construit un triangle équilatéral; sur CD on construit un carré. Trouver la position du point C pour laquelle la somme des surfaces de ces deux polygones est minima.

— On donne une série de forces dans un plan, et deux

points du plan. La somme des moments par rapport à chaque point est nulle, et il en est de même de la somme des projections des forces sur la droite qui joint les points. Que doit-on en conclure?

— Trouver le reste de la division du polygone entier $f(x)$ par $(x-\alpha)(x-\beta)$ sans effectuer la division. Appliquer au cas suivant

$$f(x) = 5x^5 + 2x^4 - 6x^3 - 8x^2 + 3x - 5\,;$$
$$(x-\alpha)(x-\beta) = x^2 + 4x - 21.$$

— Dans un triangle équilatéral de côté a, inscrire un autre triangle équilatéral de côté m.

— Inscrire dans un cercle donné un triangle isoscèle de telle sorte que le volume qu'il engendre en tournant autour de sa base soit maximum.

— Lieu des pôles des grands cercles qui font un angle donné avec un grand cercle donné.

— Mener par un point pris sur une sphère un grand cercle tangent à un petit cercle donné.

— De combien de manières peut-on décomposer un nombre en un produit de deux facteurs? — En un produit de deux facteurs premiers entre eux?

— Résoudre

$$m \sin(a+x) = p \sin(b-x).$$

— Quelles conditions doivent remplir les termes de la fraction $\frac{a}{b}$, pour que sa racine à moins de $\frac{1}{b}$ près soit $\frac{a}{b}$?

— Résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, en considérant $bx + c$ comme les deux premiers termes d'un carré.

— On donne la série

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36. . . .

Trouver la somme des n premiers termes.

— Couper une sphère par un plan de façon que le cône, ayant pour sommet le centre de la sphère et pour base la section, ait le même volume que le segment sphérique de même base.

— Démontrer que les volumes de deux pyramides qui ont un angle solide commun sont entre eux comme les produits des trois arêtes de cet angle solide.

— Rendre calculable par logarithmes séc a — séc b.

— Inscrire dans un demi-cercle un rectangle de périmètre donné.

— Étant donné un rectangle, former avec ce rectangle une boîte ouverte de volume maximum, en enlevant des carrés égaux aux quatre angles, et relevant les petits rectangles ainsi déterminés.

— Construire les lignes x et y, sachant que l'on a

$$x + y = a; \quad \frac{x^2}{y^2} = \frac{p}{q}.$$

— On donne un triangle; déterminer un point sur la base, tel que, si l'on mène par ce point des parallèles aux deux côtés, le parallélogramme ainsi formé ait une aire équivalente à la moitié du triangle donné.

— On donne dans un plan deux points A et B, et une série de forces. La somme des moments par rapport à A et à B a pour valeur K^2 pour chacun des points; la somme des projections sur AB est égale à m. Que peut-on conclure de ces données?

— Parmi tous les rectangles de même surface, quel est celui qui est inscrit dans le plus petit cercle?

— Parmi tous les cylindres de même volume, quel est celui qui est inscrit dans la plus petite sphère?

— Résoudre $tg\, x = \cos x$.

— Variations de la fonction $y = \dfrac{x}{\sin x}$.

— Trouver sur la sphère le lieu des points également distants de deux grands cercles donnés.

— Quelle est la condition pour que trois nombres donnés soient les termes de rangs m, n, p d'une progression géométrique?

— Construire un triangle connaissant a, h_a et $b^2 + c^2 = m^2$.

— Construire $\dfrac{x}{c} = \dfrac{a^3}{b^3}$.

— Rendre calculable par logarithmes

$$y = m \sin \alpha + n \cos \alpha.$$

— Mener dans un cercle une corde telle que la somme de cette corde et de sa distance au centre soit maxima.

— Rendre calculable par logarithmes l'expression

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

— On donne le demi-cercle AOB, et le point C tel que OC $= a$; ce point est sur le diamètre AB. Mener la droite CD telle que les volumes engendrés par les contours mixtilignes AMDC et CDMB en tournant autour de AB soient égaux.

— Deux circonférences se coupent; par le point commun B, on mène une sécante CBD. Trouver le produit BC $\times$ BD. Discussion.

— On donne une sphère. Circonscrire à cette sphère un cône tel que sa surface latérale soit à la surface de la zone interceptée, dans un rapport donné.

— Lieu géométrique des pôles des grands cercles tangents à un petit cercle donné.

— Deux courriers partent des points A et B, distants de 105 kilomètres; en allant à la rencontre l'un de l'autre, ils se rencontrent au bout de 6 heures; s'ils avaient marché dans le même sens, ils se seraient rencontrés au bout de 39 heures. Trouver la vitesse de chaque mobile.

— Inscrire dans une sphère le cône de surface totale — ou de volume — maximum.

— Maximum ou minimum de $x^p + \frac{1}{x^q}$.

— Étant donné un triangle ABC, trouver sur la base un point M tel que, menant par ce point les parallèles MD, ME à AB et AC, on ait

$$\frac{S \,.\, BME}{S \,.\, CMD} = \frac{m}{n}.$$

AGRÉGATION DE L'ENSEIGNEMENT SPÉCIAL

CONCOURS DE 1883

Algèbre et Trigonométrie.

Vérifier l'égalité

$$\frac{1 - x^2}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} = 1 + 2x\cos\alpha + 2x^2\cos 2\alpha + 2x^3\cos 3\alpha + \ldots$$

Employer la série pour calculer la valeur du premier membre en faisant

$$x = 0{,}127; \quad \alpha = 6^0.$$

Combien de termes faut-il prendre pour que l'erreur commise en négligeant les termes suivants soit moindre que 0,001.

Géométrie descriptive.

Étant donné un cône à base elliptique, et un point pris sur le plan de la base à l'intérieur de l'ellipse, couper ce cône par un plan suivant une courbe ayant son centre en ce point.

On construira la projection de cette courbe sur le plan de la base.

Mécanique.

Expression du travail moteur nécessaire pour entretenir le mouvement d'un convoi, à une vitesse donnée, sur un chemin de fer rectiligne de pente donnée.

ÉPREUVES PRATIQUES

Géométrie descriptive (durée 3 heures 1/2).

Faire la perspective d'une voûte d'arêtes.

On prendra pour plan du tableau la face antérieure; le point de vue est situé sur l'axe vertical de l'appareil, à une hauteur convenable, et le point de distance est pris à volonté.

Calcul topographique (durée 3 heures).

Un observateur, pour déterminer sa position D sur le terrain dont il a la carte, a mesuré les différences d'azimuth de trois points A, B, C, marqués sur la carte. Les coordonnées de ces points, relevées sur la carte, sont

A	dist. à la mérid.	200	dist. à la perp.	600
B	—	650	—	700
C	—	900	—	400

Les angles mesurés en D, sont

$$ADB = 85^\circ\ 2',\ 1\ ;$$
$$BDC = 56^\circ\ 18',\ 6.$$

On demande les coordonnées du point D.

Mécanique.

Lever de machine à l'usine (durée 4 heures).
Rendu à la salle de dessin (durée 3 heures).

QUESTIONS PROPOSÉES

108. — On considère un angle droit yox, et un cercle Δ inscrit dans cet angle. Par le point o, on mène une transversale δ, qui rencontre Δ aux points A et B; on projette alors les points A et B sur ox, en A′ et B′, puis sur oy, en A″ et B″. Ceci fait, sur A′B′ on décrit un demi-cercle Δ', et sur A″B″ un demi-cercle Δ'', et par le point o, on mène à Δ' une tangente oP, et à Δ'' une tangente oQ; enfin, on rabat oP sur ox, en oP′; et oQ sur oy, en oQ′. Les parallèles aux droites ox et oy menées par les points Q′ et P′ se coupent en un point I, dont on demande le lieu lorsque δ tourne autour du point o. *(G. L.)*

109. — On considère une suite de termes

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4\ \ldots\ u_{2n-1},\ u_2$$

qui jouissent de cette propriété que si l'on considère quatre termes consécutifs dans cette suite, le produit des extrêmes

soit égal au produit des moyens. On donne les trois premiers termes u_1, u_2, u_3, et l'on demande de trouver la somme S_{2n} des $2n$ premiers termes. On supposera que u_3 est un nombre différent de u_1. *(G. L.)*

110.— Soient u_1, u_2, $u_3 \ldots u_n$ des nombres tels que l'un quelconque d'entre eux soit égal au produit des deux nombres précédents. Démontrer que, en désignant par P_n le produit de ces nombres, on a

$$P_n = u_2 P_{n-1} P_{n-2};$$

les nombres u_1 et u_2 sont supposés quelconques. *(G. L.)*

111. — On considère un angle droit yOx, et un point A dans l'intérieur de cet angle ; par le point A passent deux cercles Δ et δ tangents aux droites Ox et Oy ; soient P, Q leurs points de contact avec Ox ; R, S leurs points de contact avec Oy.— 1° Démontrer que les cercles APQ, ARS sont tangents au point A ; — 2° démontrer qu'ils sont égaux ; — 3° reconnaître que ces cercles sont vus du point O, l'un et l'autre, sous un angle droit ; — 4° la droite OA rencontre le cercle δ en un point B, différent de A ; par B passent deux cercles inscrits dans l'angle yOx, savoir δ et une autre circonférence δ'. Démontrer que le cercle δ est moyen géométrique entre δ' et Δ ; — 5° du cercle Δ, on peut déduire par la construction citée plus haut une infinité de cercles Δ_1, Δ_2,... inscrits dans l'angle yOx, et dont les rayons, d'après la remarque 4, sont en progression géométrique. A ces cercles Δ_1, Δ_2... correspondent des cercles tels que les cercles APQ, définis tout à l'heure. On obtient ainsi une infinité de cercles U_1, U_2 et l'on propose de démontrer que les rayons de ces cercles sont aussi les termes d'une progression géométrique. *(G. L.)*

112. — On considère deux cercles concentriques Δ et Δ', ayant pour centre commun O. On mène une tangente AB à Δ', rencontrant Δ en A et B, et touchant Δ' en O. Un diamètre rencontre Δ en C et D, et Δ' en C' et D'. On mène OC' et OD' ; ces lignes rencontrent AC aux points I, I', et BD en I'', I'''. 1° Chacun des points I, I', I'', I''' décrit un cercle

quand CD tourne autour de O′ ; — 2° le milieu de AC coïncide avec le milieu de II′ ; — 3° les triangles IOI′, I″OI‴ sont équivalents ; — 4° le maximum de la surface de ce triangle a lieu quand CD est parallèle à AB ; — 5° les points I, I,′ I″, I‴ sont sur un cercle concentrique à Δ. Ce cercle est maximum quand CD est parallèle à AB.

(G. L.)

113.— On considère un cercle C, et un point P dans son plan. Soit Δ une droite partant de P, et rencontrant C aux points A et B ; on mène les tangentes à C en ces points, et l'on prend le point Q symétrique de P par rapport au milieu de AB. Démontrer que O étant le centre de C, la perpendiculaire élevée à la droite OQ au point Q est partagée par ce point et les tangentes citées plus haut en deux parties égales.

(G. L.)

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX
RUE BERGÈRE, 20, PARIS — 20642-3

EXERCICES DIVERS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Par M. **Émile Lemoine,** ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir page 217.)

V

On a un triangle ABC *et un point* M *dans son plan; on mène par* M *une sécante qui coupe respectivement les côtés* BC, AC, AB *en* A′, B′, C′; *soient* α, β, γ *les symétriques de* A′, B′, C′ *par rapport à* M. *Démontrer que les trois droites* Aα, Bβ, Cγ *se coupent au même point.*

Soient a_1, b_1, c_1 les points où Aα, Bβ, Cγ coupent les côtés BC, AC, AB; soient a, b, c les longueurs de ces côtés.

Les triangles B′CA′, C′BA′ coupés par la transversale Aα donnent

$$\frac{\alpha B'}{\alpha A'} \cdot \frac{AC}{AB'} \cdot \frac{a_1 A'}{a_1 C} = 1$$

$$\frac{\alpha A'}{\alpha C'} \cdot \frac{AC'}{AB} \cdot \frac{a_1 B}{a_1 A'} = 1$$

ou en multipliant membre à membre et réduisant

$$\frac{\alpha B'}{\alpha C'} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{AC'}{AB'} \cdot \frac{a_1 B}{a_1 C} = 1;$$

on a de même

$$\frac{\beta C'}{\beta A'} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{BA'}{BC'} \cdot \frac{b_1 C}{b_1 A} = 1$$

$$\frac{\gamma A'}{\gamma B'} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{CB'}{CA'} \cdot \frac{c_1 A}{c_1 B} = 1$$

multipliant membre à membre en remarquant :

1° Que le produit des trois premières fractions est identiquement l'unité puisque (à cause de la symétrie par rapport à M des points A′ et α, B′ et β, C′ et γ) l'on a

$$\alpha B' = \beta A', \quad \beta C' = B'\gamma, \quad \gamma A' = \alpha C';$$

2° Que le produit des trois deuxièmes fractions est l'unité identiquement;

3° Que le produit des trois troisièmes fractions est aussi

l'unité, puis queles trois points A′, B′, C′ sont en ligne droite;

il reste $$\frac{a_1B}{a_1C} \cdot \frac{b_1C}{b_1A} \cdot \frac{c_1A}{c_1B} = 1.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

VI

D'un point K *appartenant à l'axe radical de deux circonférences de centres* O *et* O′ *je mène deux tangentes* KA, KA′ *à ces circonférences,* A *et* A′ *étant respectivement les points de contact sur* O *et sur* O′. *Les droites* OA, O′A′ *se coupent en* M. *Trouver le lieu de* M *quand* K *parcourt l'axe radical.*

Les deux triangles rectangles KMA, KMA′ sont égaux, puisqu'ils ont l'hypoténuse KM commune, et que les côtés KA et KA′ sont égaux comme tangentes partant de l'axe radical;

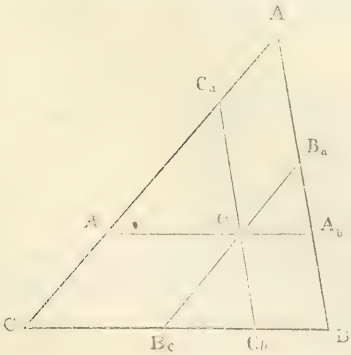
donc $$MA = MA',$$

alors $$MO - MO' = OA - O'A' = \text{constante}.$$

Le lieu de M est donc l'hyperbole qui a pour foyers O et O′, et dont l'axe transverse a pour longueur la différence des rayons de deux circonférences.

VII

Par un point O *du plan du triangle* ABC *je mène les droites* A_bA_c, B_cB_a, C_bC_a *respectivement parallèles à* CB, CA, AB *et terminées aux côtés du triangle.*



Déterminer le point O *de façon que la somme*

$$\overline{A_cA_b}^2 + \overline{B_aB_c}^2 + \overline{C_aC_b}^2$$

soit minima.

Supposons que A_cA_b ait une longueur p. Cherchons sur A_cA_b le point O tel que la somme $\overline{C_aC_b}^2 + \overline{B_aB_c}^2$ soit minima.

Soit $$B_aB_c = q,$$
$$C_aC_b = r,$$

il est facile de démontrer la relation très connue

$$\frac{A_c A_b}{BC} + \frac{B_a B_c}{AC} + \frac{C_a C_b}{AB} = 2.$$

On a donc $$\frac{q}{b} + \frac{r}{c} = \frac{2a - p}{a}$$

et $$q^2 + r^2 = K^2;$$

d'où

$$\left(\frac{r}{c}\right)^2 \frac{b^2 + c^2}{b^2} - 2\left(\frac{r}{c}\right)\frac{2a - p}{a} + \frac{(2a - p)^2}{a^2} - \frac{K^2}{b^2} = 0.$$

La condition de réalité de $\frac{r}{c}$ donne

$$K^2 > \frac{b^2c^2(2a - p)}{a^2(b^2 + c^2)};$$

d'où le minimum de K^2 est

$$\frac{b^2c^2(2a - p)}{a^2(b^2 + c^2)}.$$

A cette valeur correspondent pour q et r les valeurs

$$q = \frac{(2a - p)c^2b}{a(b^2 + c^2)},$$

$$r = \frac{(2a - p)b^2c}{a(b^2 + c^2)},$$

d'où l'on conclut $$qb = cr.$$

Il est donc évident que pour le point qui correspond au minimum de $$\overline{A_cA_b}^2 + \overline{B_aB_c}^2 + \overline{C_aC_b}^2$$

on a $$pa = qb = rc.$$

Ce qui, joint à l'équation

$$\frac{p}{a} + \frac{q}{b} + \frac{r}{c} = 2,$$

détermine les valeurs cherchées

$$p = b.c.\frac{2\,abc}{c^2b^2 + a^2c^2 + a^2b^2},$$

$$q = a.c.\frac{2\,abc}{c^2b^2 + a^2c^2 + a^2b^2},$$

$$r = a.b.\frac{2\,abc}{c^2b^2 + a^2c^2 + a^2b^2}.$$

Nous ajoutons, sans en donner ici la démonstration, que *le lieu des points* O *pour lesquels la somme* $p^2 + q^2 + r^2$ *a une*

valeur donnée est une conique qui a pour centre le point pour lequel $p^2 + q^2 + r^2$ *est minimum.*

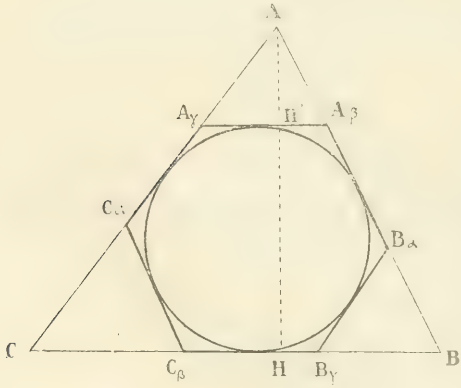
Nous laissons le soin de démontrer que *si l'on cherche sur toutes les droites* $A_c A_b$ *les points* O *pour lesquels* $q^2 + r^2$ *est minimum, le lieu de ces points est une droite qui passe par le pied de la médiane antiparallèle partant de* A.

Enfin nous engageons le lecteur à étudier la variation de la fonction $p^2 + q^2 - r^2$ qui présente des particularités intéressantes.

VIII

Construire un hexagone circonscriptible à un cercle. On sait que les côtés opposés sont parallèles, et l'on connaît trois côtés non consécutifs.

Soit $A_\gamma A_\beta B_\alpha B_\gamma C_\beta C_\alpha$ cet hexagone.



Soient

$$A_\gamma A_\beta = l.$$
$$B_\alpha B_\gamma = m.$$
$$C_\beta C_\alpha = n,$$

les trois côtés donnés.

On démontre facilement que les côtés parallèles de l'hexagone sont égaux; cela posé, prolongeons les trois autres côtés jusqu'à ce que par leur rencontre ils forment le triangle ABC.

Soit x, y, z les trois côtés CB, AC, AB de ce triangle, H le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur CB, H' le point où cette perpendiculaire coupe $A_\gamma A_\beta$; on a, en appelant r le rayon du cercle inscrit dans l'hexagone, p le 1/2 périmètre du triangle ABC, et S sa surface :

$$\frac{A_\gamma A_\beta}{CB} = \frac{AH'}{AH} \quad \text{ou} \quad \frac{l}{x} = \frac{AH - 2r}{AH}$$

ou
$$\frac{l}{x} = \frac{\frac{2S}{x} - \frac{2S}{p}}{\frac{2S}{x}} = \frac{p-x}{p};$$

d'où enfin
$$l = \frac{x(p-x)}{p}.$$

Ce que l'on peut écrire
$$x^2 - px + pl = 0.$$

On a de même
$$y^2 - py + pm = 0$$
$$z^2 - pz + pn = 0$$

On tire de là
$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4pl}}{2} \\ y &= \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4pm}}{2} \\ z &= \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4pn}}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ajoutant et remarquant que $x + y + z = 2p$, il vient
$$p = \pm\sqrt{p^2 - 4pl} \pm \sqrt{p^2 - 4pm} \pm \sqrt{p^2 - 4pn}$$
en résolvant cette équation on trouve
$$2p = \frac{(l^2 + m^2 + n^2 - 2mn - 2ln - 2lm)^2}{(m+n-l)(l+n-m)(m+l-n)}.$$

Les formules (1) donnent alors la valeur de x, y, z puisque p est connu, et rien n'est plus simple que d'achever le problème.

Remarquons que dans les formules (1) le signe supérieur convient seul à la question; il suffit pour le reconnaître de les appliquer au cas où $l = m = n$, car alors évidemment l'hexagone est régulier
$$x = 3l, \quad p = \frac{9l}{2}$$
et l'on a identiquement
$$3l = \frac{\frac{9l}{2} + \sqrt{\frac{81l^2}{4} - 4\,\frac{9l}{2}\,.\,l}}{2}$$
avec le signe supérieur du radical.

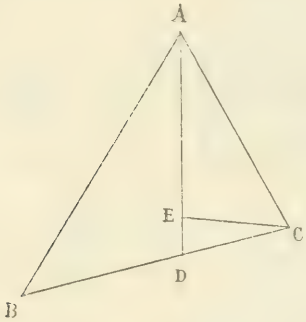
IX

Chacun connaît la démonstration de cette proposition : *La bissectrice de l'angle d'un triangle divise le côté opposé en deux segments proportionnels aux côtés adjacents.*

On la trouve démontrée d'une même façon dans tous les traités de Géométrie élémentaire.

M. Laisant m'a communiqué la démonstration suivante qui est peut-être, *pédagogiquement*, préférable.

Soit ABC le triangle, AD la bissectrice de l'angle CAB.



Je fais l'angle ACE = ABD.

Les deux triangles ACE, ABD ont deux angles égaux et sont semblables, donc

$$\frac{CE}{DB} = \frac{AC}{AB};$$

mais le triangle CED est isoscèle, car les angles CEA et CDE ont respectivement pour suppléments les angles égaux CEA et BDA ; donc CE = CD et l'on a

$$\frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB} \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Démonstration analogue pour la bissectrice de l'angle extérieur.

X

Dans un triangle ABC *les deux droites* $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ *de Simson relatives à deux points* M *et* M' *diamétralement opposés sont rectangulaires et se coupent sur le cercle des neuf points.*

On se rappelle que l'on appelle droite de Simson la ligne droite qui passe par les pieds des trois perpendiculaires abaissées sur les trois côtés, d'un point M du cercle circonscrit au triangle ABC.

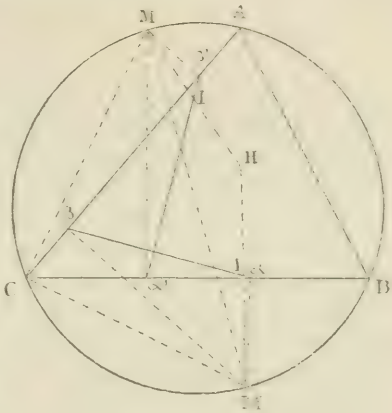
Soient M et M' les deux extrémités d'un diamètre du cercle circonscrit,

$M\alpha$, $M\beta$ les perpendiculaires abaissées de M sur CB et sur CA,

$M\alpha'$, $M\beta'$ les perpendiculaires abaissées de M' sur CB et sur CA,

K l'intersection de $\alpha\beta$ et de $\alpha'\beta'$;

Prolongeons $M'\alpha'$ jusqu'en J sur le cercle circonscrit; il est évident que JM est parallèle à CB puisque l'angle MJM' est droit. Joignons CM et CM' :



Le quadrilatère $C\alpha'\beta'M'$ étant inscriptible on a

$$\alpha'\beta'C = JM'C = JMC;$$

mais $M\alpha\beta C$ étant inscriptible, on a

$$K\beta\beta' = \alpha MC,$$

donc

$$\alpha'\beta'C + \beta'\beta K = JMC + CM\alpha = 90^\circ.$$

Donc le triangle $\beta K\beta'$ est rectangle en K. Ce qui démontre que les droites de Simson $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ sont rectangulaires.

Cela posé, si H est le point de concours des hauteurs de ABC, on sait que $\alpha\beta$ passe par le milieu I de MH et $\alpha'\beta'$ par le milieu I' de M'H.

Or comme le cercle des neuf points est aussi le lieu des points milieux des droites HM partant de H et allant à la circonférence circonscrite, I et I' sont des points du cercle des neuf points et des points diamétralement opposés de ce cercle.

L'angle I'KI étant droit, le point K appartient donc au cercle des neuf points.

C'est la solution géométrique de la question 1473 des *Nouvelles Annales des Mathématiques*. (*A suivre.*)

NOUVELLES PROPRIÉTES DU TRIANGLE

Par M. **H. Brocard** capitaine du génie.

I

Étant donné un point M du plan d'un triangle ABC, à ce point M correspond toujours un autre point M′, qui est l'intersection des trois droites, respectivement symétriques des trois droites AM, BM, CM, par rapport aux bissectrices des angles A, B, C; c'est-à-dire que l'on a MAC = M′AB; MCB = M′CA ; MBA = M′BC.

Les deux points M, M′ sont dits correspondants, ou réciproques (*).

Parmi les groupes de points de cette nature, il y a lieu de distinguer :

1° Les points segmentaires ω, ω' (ou points de Brocard), pour lesquels les angles ωAC, ωCB, ωBA, ω'AB, ω'BC, ω'CA sont égaux entre eux. On sait que, α désignant l'angle dont il vient d'être question, on a la relation

$$\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C.$$

2° Le centre O du cercle circonscrit au triangle, et le point H de rencontre des hauteurs.

3° Le centre de gravité E du triangle ABC, et le centre K des médianes antiparallèles (ou point de Grebe).

4° Le point D, centre d'homologie de ABC et du triangle $A_1B_1C_1$ dont les sommets sont aux points de rencontre des droites ωB, ω'C ; ωC, ω'A ; ωA, ω'B; et le point D′, pôle de la droite $\omega\omega'$ dans la circonférence des sept points (cercle de Brocard), décrite sur la ligne OK pour diamètre.

5° Le centre I du cercle inscrit est à lui-même son propre correspondant; il en est de même du centre de chacun des cercles ex-inscrits.

(*) Nous avons vu précédemment (p. 100) que ces points avaient été signalés d'abord par le capitaine Mathieu (*Nouv. Ann. 1865*). (A. M.)

Nous considérerons encore parmi les points correspondants : le milieu S de $\omega\omega'$ et son correspondant S' ;

Le centre Z du cercle de Brocard (milieu de OK), et son correspondant Z'.

II

Cela posé, voici divers systèmes de trois points en ligne droite :

1° O, E, H ; de plus OE = 2EH. Cette propriété a déjà été signalée par Euler ;

2° D, E, S ; on a DE = 2ES.

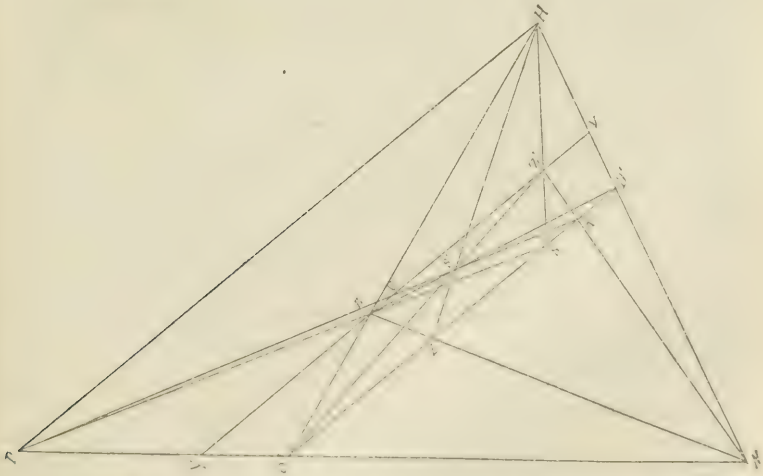
3° D, K, S' ;

4° E, S', D' ;

5° O, S', Z' ;

6° S, Z', H ; on a Z'H = 2SZ' ;

7° Z, S', H ;



Enfin, si N est une des extrémités du diamètre OD du cercle circonscrit, voici trois autres systèmes de trois points en ligne droite :

8° H, D', N ;

9° Z', K, N ;

10° E, Z, N.

Il en résulte aussi que certains systèmes de droites forment des droites concourantes. Ainsi

1. Le point S′ se trouve sur les droites KD, ED′, ZH.
2. Le point Z′ se trouve sur les droites KN, OS′, SH.
3. Le point N se trouve sur les droites OD, EZ, KZ′, D′H.

III

Les distances de la plupart des points désignés dans ce qui précède aux côtés du triangle s'expriment assez simplement en fonction des longueurs des trois côtés ou des lignes trigonométriques des angles du triangle.

Les distances de deux points correspondants aux trois côtés sont inversement proportionnelles entre elles.

En effet, soient λ, μ, ν les distances d'un point aux côtés a, b, c du triangle. Ce point est à la rencontre de deux droites partant, par exemple, des sommets B et C ; l'une de ces droites est définie par le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ des distances d'un de ses points aux côtés a et b; l'autre par le rapport $\frac{\lambda}{\nu}$ des distances d'un de ses points aux côtés a et c.

Or, par définition, le point correspondant sera à l'intersection de deux droites, également issues des points B et C; mais l'une d'elles aura pour rapport des distances d'un de ses points aux côtés a et b le rapport $\frac{\mu}{\lambda}$; l'autre aura pour rapport des distances d'un de ses points aux côtés a et c le rapport $\frac{\nu}{\lambda}$.

Donc, on a d'une part les rapports

$$\frac{\delta_a}{\lambda} = \frac{\delta_b}{\mu} = \frac{\delta_c}{\nu},$$

et d'autre part les égalités

$$\delta'_a \lambda = \delta'_b \mu = \delta'_c \nu.$$

IV

On peut, d'une manière simple et générale, établir que trois points, liés à un triangle, sont en ligne droite.

En effet, lorsqu'un point est lié à un triangle, on peut toujours évaluer les distances de ce point aux trois côtés.

Soient d_a, d'_a, d''_a les trois distances de trois points au même côté a; si le rapport

$$\frac{d_a - d'_a}{d'_a - d''_a}$$

est indépendant du côté que l'on considère, les trois points sont en ligne droite.

En effet, soit ABC le triangle considéré. M, N, P les trois points. On a, par hypothèse,

$$\frac{d_a - d'_a}{d'_a - d''_a} = \frac{d_b - d'_b}{d'_b - d''_b}.$$

Si nous menons par les points des parallèles respectivement au côté a jusqu'à la rencontre avec le côté b, et des parallèles à b jusqu'à la rencontre avec a, les longueurs de ces lignes seront proportionnelles aux distances des mêmes points au côté b et au côté a (puisque ces lignes s'obtiendront en divisant les distances correspondantes par *sin* C). Par suite, nous aurons, entre les lignes nouvelles, une relation identique à celle que nous donne l'hypothèse, et l'on sait que, dans ce cas, les trois points sont en ligne droite.

La connaissance préalable d'un autre point sur le même alignement permettra de substituer ce nouveau point à l'un des points désignés, lorsque ses distances s'exprimeront beaucoup plus facilement.

Dans la pratique, on cherchera seulement si deux des différences $d_a - d'_a$, $d'_a - d''_a$, $d_a - d''_a$ sont dans un rapport constant; il sera inutile de le vérifier pour les autres distances. Cette condition est, en effet, nécessaire et suffisante.

Les projections des segments déterminés par les trois points se trouvent dans le même rapport que ces segments, et aussi que les différences que nous venons de considérer. On peut en déduire des relations métriques; généralement, ces dernières se présenteront, d'une façon presque intuitive, à la seule inspection des formules, comme on pourra le reconnaître dans quelques-uns des exemples donnés dans le cours de cette étude.

V

Soit M un point du plan dont les distances aux trois côtés du triangle sont proportionnelles à une fonction symétrique f des côtés a, b, c; P étant une constante, et T désignant la surface du triangle, les distances d_a, d_b, d_c du point M aux trois côtés s'exprimeront par des relations de la forme

$$\frac{d_a}{f_a} = \frac{d_b}{f_b} = \frac{d_c}{f_c} = \rho.$$

$$2T = ad_a + bd_b + cd_c = \rho(af_a + bf_b + cf_c),$$

relations qui déterminent ρ et d_a, d_b, d_c.

De même, pour le point correspondant M′, résultant de l'intersection des droites AM′, BM′, CM′, symétriques des droites AM, BM, CM par rapport aux bissectrices, on aura

$$d'_a f_a = d'_b f_b = d'_c f_c = \rho'$$

$$2T = ad'_a + bd'_b + cd'_c = \rho'\left(\frac{a}{f_a} + \frac{b}{f_b} + \frac{c}{f_c}\right),$$

relations qui déterminent ρ' et d'_a, d'_b, d'_c.

Le plus souvent, on connaîtra d'avance la fonction f pour l'un des points M ou M′.

Pour abréger l'écriture, nous emploierons les notations suivantes :

$$a + b + c = 2P;$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = m^2;$$
$$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = n^4;$$
$$a^4 + b^4 + c^4 = p^4;$$

on en tire $\qquad m^4 = p^4 + 2n^4.$ *(A suivre.)*

EXAMENS ORAUX DE L'ÉCOLE SAINT-CYR (1883)

On donne deux circonférences tangentes extérieurement; leurs rayons sont R et r. Trouver l'angle des tangentes communes. Quelle est la condition pour que cet angle soit de 60°?

— Trouver la relation qui doit exister entre b et c pour que l'on ait $\dfrac{\sin^2 b}{\sin^2 c} = \dfrac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}$.

— On donne un demi-cercle AOB, on mène la tangente en B; mener la droite ACM rencontrant la circonférence en C et la tangente en M de façon que, si l'on fait tourner la figure autour de AB, on ait vol. ACB = vol. CMB.

— De tous les cylindres inscrits dans une sphère, quel est celui de surface totale maxima ?

— Dans un rectangle ABCD, mener une ligne DM, rencontrant AB en M de façon que $DM^2 + MB^2 = K^2$.

— On a $\sin x = \frac{3}{5}$, $\sin y = \frac{4}{5}$. Démontrer que l'on a $x + y = 90°$.

— Un mobile pesant est lancé horizontalement avec une vitesse donnée. Trouver à un instant donné sa position et sa vitesse.

— Connaissant la corde d'un arc, trouver son sinus et son cosinus.

— Dans un triangle on a $b = \sqrt{2}$; $c = \sqrt{3}$; $C = 60°$. Calculer les éléments de ce triangle.

— Inscrire dans une sphère un cylindre tel que son volume soit égal à la somme des volumes des segments déterminés par les deux bases.

— Étant données trois forces appliquées aux sommets d'un triangle suivant les hauteurs issues de ces sommets, et proportionnelles aux côtés opposés, démontrer qu'il y a équilibre.

— On donne un rectangle ABCD; déterminer sur AB un point M tel que $DM^2 = AM.BM$.

— Lieu géométrique des points de l'espace dont la somme des carrés des distances à trois points fixes est constante.

— On prend deux plans inclinés ayant même hauteur OH et même sommet O. En O est une poulie sur laquelle passe un cordon terminé par deux poids P et P'; ces derniers reposent sur les plans inclinés. On demande les conditions d'équilibre. — Les deux poids étant en équilibre, démontrer que si on fait monter un des poids d'une certaine longueur sur l'un des plans, l'autre descendant de la même longueur sur l'autre plan, le centre de gravité du système ne change pas.

— Mettre sous la forme d'un produit de deux facteurs

du premier degré le polynôme

$$6x^2 - 13xy + 6y^2 - x - y - 1.$$

— Variation des racines de l'équation

$$(\lambda^2 + 3\lambda + 7)x^2 + (\lambda - 1)x - 15 = 0,$$

quand λ varie de $-\infty$ à $+\infty$.

— Déterminer c dans l'équation $x^2 - 7x + c = 0$ de façon que l'on ait $x'^2 - x''^2 = 21$.

— Résoudre le système

$$x - y = 3xy; \quad x + y = 7xy.$$

— Trouver la fraction $\frac{x}{y}$, sachant que $\frac{x+1}{y} = \frac{1}{3}$, et $\frac{x}{y+1} = \frac{1}{4}$.

— Étant donné le demi-cercle MOP, mener la corde MN de telle façon que le volume engendré par le segment qu'elle détermine soit égal au volume du cône engendré par le triangle rectangle ONK (K étant la projection de N sur OM) lorsque la figure tourne autour de OM.

— On donne un triangle ABC, et un point O auquel est appliquée une force F perpendiculaire au plan du tableau. Décomposer cette force en trois autres appliquées en A,B,C, et parallèles à la première.

— On donne une barre indéfinie, avec une force appliquée en un point A, et verticale. On sait que l'unité de longueur de la barre, supposée prismatique et homogène, pèse a; dire où il faut couper la barre pour qu'il y ait équilibre, si l'on prend un point C comme point fixe sur la barre.

— Étant donnés un cercle et un point extérieur, mener par ce point une sécante telle que la corde soit une moyenne proportionnelle entre la sécante entière et la partie extérieure.

— Résoudre $\quad x^y = y^x; \quad x^a = y^b.$

— Trouver deux nombres tels que leur différence, leur somme et leur produit soient entre eux comme 2, 3, 5.

— Dans l'équation

$$x^2 + 4(p-2)x + 3p^2 + 5 = 0,$$

déterminer p de façon que l'une des racines soit double de l'autre.

— Construire la ligne

$$x = \sqrt{a^2 + \sqrt{b^4 + a^2b^2}}.$$

— On a trouvé le plus grand commun diviseur D de A et de B; trouver le plus grand commun diviseur de A et de A + B; de A + mB et de B; de A + mB et de A.

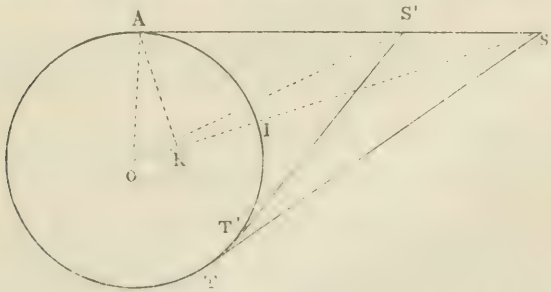
— Trouver pour $x = a$ la valeur de l'expression

$$\frac{\sqrt[3]{x^2 - ax} + \sqrt{x^2 - a^2}}{\sqrt[2]{x^2 - a^2} + x^3 - ax^2}.$$

QUESTION 33

Sur une tangente à la sphère O, *on prend deux points tels que* OS — OS′ *soit égal à* R. *Ces deux points sont les sommets de deux cônes circonscrits à la sphère. Déterminer la position des points* S *et* S′ *de façon que le volume compris entre les deux cônes et la sphère ait un volume donné.* (L. Lévy.)

Soient S et S′ les deux points cherchés. Si, du volume



ASTI, compris entre le premier cône et la sphère, je retranche le volume AS′T′I, compris entre le second cône et la sphère, j'aurai la quantité que je cherche à déterminer au moyen des quantités SO et S′O.

Soit x la longueur SO; je vais exprimer le volume ASTI au moyen de x. J'ai d'abord

Vol. ASTI = vol. AST — vol. sect. AITO;

ce qui donne

$$\text{Vol. ASTI} = \frac{1}{3}\pi x \,.\, \text{AK}^2 - \frac{2}{3}\pi \text{R}^2\,\text{IK}$$
$$= \frac{1}{3}\pi(\text{R} - \text{OK})[x(\text{R} + \text{OK}) - 2\text{R}^2].$$

Or, on sait que l'on a $\text{OK} = \frac{\text{R}^2}{x}$; donc après réductions faciles, on trouve

$$\text{Vol. ASTI} = \frac{1}{3}\pi\text{R}^2\,\frac{(x - \text{R})^2}{x}.$$

On trouvera de même, en posant $\text{OS}' = y$,

$$\text{Vol. AS'T'I} = \frac{1}{3}\pi\text{R}^2\,\frac{(y - \text{R})^2}{y};$$

donc il faut déterminer x et y de façon que l'expression

$$\frac{1}{3}\pi\text{R}^2\left[\frac{(x - \text{R})^2}{x} - \frac{(y - \text{R})^2}{y}\right]$$

ait une valeur donnée, sachant que, entre x et y, on a la relation $x - y = \text{R}$.

On en tire immédiatement, pour la valeur de l'expression cherchée, en fonction d'une seule inconnue :

$$\frac{1}{3}\pi\text{R}^2\left[\frac{y^2}{(y + \text{R})} - \frac{(y - \text{R})^2}{y}\right].$$

Il suffit évidemment de déterminer la fonction entre crochets, de façon que cette fonction prenne une valeur $\text{R}l$, telle que $\frac{1}{3}\pi\text{R}^3 l$ soit égal au volume donné.

On a donc, après réduction, à résoudre l'équation

$$\frac{y^2 + \text{R}y - \text{R}^2}{y^2 + \text{R}y} = l$$

ou $$y^2(l - 1) + \text{R}y(l - 1) + \text{R}^2 = 0.$$

On voit immédiatement que, si le volume donné est plus petit que le quart de la sphère (auquel cas on a $l < 1$), les racines de cette équation sont réelles, l'une positive, l'autre négative ; or, dans le problème, y représente une quantité essentiellemement positive, puisque y est une longueur, qui doit être plus grande que R, le point S devant être extérieur à la sphère. Si l était plus grand que 1, les deux racines seraient négatives, dans le cas où elles seraient

réelles. On voit donc que le volume compris entre les deux cônes et la sphère, sous les conditions imposées par l'énoncé, est inférieur au quart du volume de la sphère.

Cherchons la condition pour que la racine positive soit plus grande que R, en supposant $l < 1$.

L'équation peut s'écrire, en changeant tous les signes,

$$y^2(1 - l) + Ry(1 - l) - R^2 = 0;$$

en écrivant que la racine positive est plus grande que R, on trouve pour condition

$$l > \frac{1}{2}.$$

Donc, le volume compris ainsi entre les deux cônes et la sphère est compris entre le huitième et le quart du volume de la sphère.

Il est facile de construire les deux racines de l'équation en y, puisque ces racines étant de signes contraires, le problème revient à trouver deux lignes dont la différence soit R, et dont le produit soit égal au rectangle de deux lignes R et $\frac{R}{1 - l}$. La plus petite de ces racines est celle qui convient au problème.

VARIÉTÉS

DEUX PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE DE SITUATION

Par M. **Fleury**, chef d'institution.

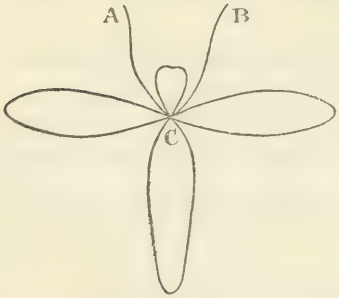
Dans son bel ouvrage intitulé *Récréations mathématiques*, M. Lucas traite, comme exemples de géométrie de situation, le *problème des ponts de Kœnigsberg* et celui des *figures d'un seul trait*. Pour la solution de la première question, il reproduit textuellement un long mémoire d'Euler, auquel il ajoute une note complémentaire, et de cette solution il fait dépendre celle des figures d'un seul trait. Mais personne n'a encore indiqué d'une manière précise la marche à suivre pour arriver sûrement et sans tâtonnements à décrire une figure

d'un trait continu, et sans repasser sur aucune ligne déjà tracée. Dans le présent article je donne : 1° une solution beaucoup plus simple des deux questions que je ramène à une seule ; 2° une règle sûre et très simple pour décrire une figure d'un trait continu, et sans repasser sur les lignes déjà tracées.

Figures d'un seul trait.

La ligne qui part d'un des points A et B, pour aboutir à l'autre, passant cinq fois au point C, il s'ensuit qu'il y a dix chemins qui partent du point C.

On voit ainsi que dans une figure d'un seul trait tous les points sont pairs, à l'exception des deux extrémités de la ligne, qui sont en des points impairs, à moins qu'elles ne soient réunies au même point.



Ainsi, toute figure d'un seul trait a tous ses points pairs, ou seulement deux points impairs. Mais la réciproque de cette proposition n'est pas vraie ; car une figure qui a tous ses points pairs ou seulement deux points impairs peut être composée de plusieurs parties qui ne communiquent pas entre elles ; et il est bien évident que dans ce cas elle ne peut se décrire d'un seul trait.

Pour reconnaître si une figure peut être tracée d'un seul trait, il faut d'abord s'assurer que toutes ses parties communiquent entre elles, et ensuite que tous ses points sont pairs ou qu'elle n'a que deux points impairs.

Lorsque tous les points de la figure sont pairs, on peut partir d'où l'on veut, et l'on finit nécessairement où l'on a commencé ; tandis que si la figure a deux points impairs, il faut nécessairement commencer par l'un et finir par l'autre.

La figure étant tracée à la craie sur le tableau noir, la question consiste à en décrire une pareille, ou, en sui-

vant la même marche, à en effacer successivement les lignes avec le doigt ou un pinceau. Pour faciliter l'explication, je supposerai que c'est un pinceau qui suit et efface à mesure les lignes de la figure donnée.

J'appellerai figure réduite, toute figure composée seulement des lignes qui ne sont pas encore effacées; point d'arrivée, le point où est arrivé le pinceau qui efface; et point final, celui par lequel se termine l'opération.

Le point d'arrivée et le point final sont nécessairement les deux points impairs de toute figure réduite. Il n'y a qu'au moment où le pinceau passe par le point final que la figure a tous ses points pairs.

Durant toute l'opération le nombre des points impairs étant nécessairement deux ou zéro, une figure réduite ne peut devenir impossible qu'en se partageant en deux parties qui ne communiquent plus entre elles.

Si par les points d'une figure on entend seulement ses points multiples, la ligne qui joindra deux points A et B sans passer par aucun point intermédiaire sera un chemin direct, et si c'est le seul chemin qui aille de A à B, je l'appellerai chemin isolant; parce qu'une fois qu'il est parcouru et effacé, la figure se trouve partagée en deux parties isolées l'une de l'autre.

Cela posé, la règle sûre et très simple pour réussir à décrire d'un seul trait la figure donnée, c'est de ne prendre un chemin isolant que lorsqu'il n'en reste plus d'autre à prendre.

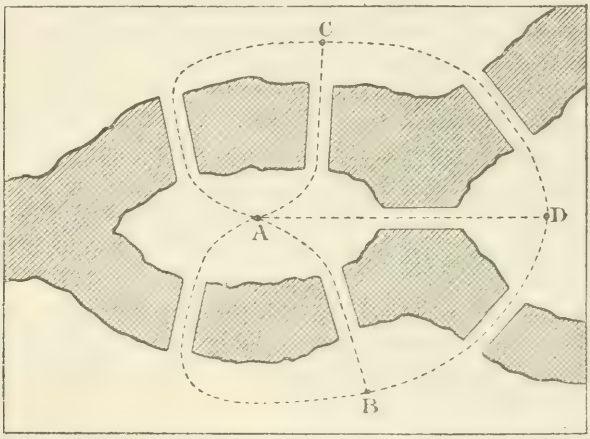
Cette condition est nécessaire; car si, arrivé en A, je prends le chemin isolant AB, lorsqu'un autre chemin partant du point A n'a pas été parcouru, la figure réduite sera partagée en deux figures partielles isolées, et il ne me sera plus possible de revenir à celle que j'aurai quittée. La condition est suffisante : car le point A étant impair, puisque c'est le point d'arrivée, il devient pair par la suppression du chemin AB, et alors, en décrivant la figure partielle située du côté du point A, on reviendra en A, après quoi l'on prendra le chemin AB pour aller décrire l'autre figure partielle, qui contient le point final; autrement si ce point était sur la pre-

mière figure partielle, celle-ci n'aurait qu'un seul point impair, ce qui est absolument impossible.

Problème des ponts de Kœnigsberg.

Ce problème consiste à déterminer le parcours à suivre pour passer une seule fois chacun des sept ponts répartis comme l'indique la figure ci-dessous.

Supposons que l'on désigne par les points A, B, C, D, les



bureaux où il faut aller prendre chaque fois son billet pour le passage du pont suivant, et tirons les lignes qui joignent ces points deux à deux en passant par tous les ponts. La question reviendra évidemment à décrire d'un seul trait la figure formée par toutes ces lignes. Or les quatre points A, B, C, D étant impairs, la figure ne peut se décrire d'un seul trait, et ainsi le problème des ponts de Kœnigsberg est impossible.

Il n'en serait pas de même pour un piéton qui se proposerait de passer une fois sur chacun des deux trottoirs de chaque pont; car alors toutes les lignes étant doublées, les points A, B, C, D deviendraient pairs, et ainsi le problème du piéton serait possible en commençant par où l'on voudrait.

De même, si dans le premier cas on établissait un pont

de plus entre A et B, ces deux points deviendraient pairs, et le problème serait possible en commençant par un des deux points C et D, Si, en outre, on établissait un pont de plus entre C et D, le parcours de tous les ponts serait possible en commençant par où l'on voudrait.

La possibilité du problème une fois reconnue, il suffit pour en assurer la réussite de suivre la règle très simple qui consiste à ne prendre un chemin isolant que quand il n'en reste plus d'autre à prendre.

La règle donnée par Euler, équivoque et incomplète, d'une part, est, d'autre part, la meilleure pour assurer la non-réussite du problème. La voici telle qu'elle est reproduite dans l'ouvrage de M. Lucas : « On supprime par la pensée les couples de ponts qui conduisent d'une région dans une autre; on cherche ensuite la course à effectuer avec le reste des ponts. Cela fait on rétablit les ponts supprimés. »

L'auteur ne dit pas la règle à suivre pour trouver « la course à effectuer avec le reste des ponts » ; ce qui peut être toute la question. Mais supposons cette course trouvée et effectuée. il sera souvent impossible de passer ensuite tous les ponts rétablis.

BIBLIOGRAPHIE

TABLES DE LOGARITHMES A SIX DÉCIMALES, construites sur un plan nouveau, par *Adolphe Benoist*, docteur en droit, membre de la Société Mathématique de France. — Paris, librairie Delagrave.

Les Tables de Logarithmes de M. Benoist se distinguent des tables précédentes par un certain nombre de modifications qui sont, à coup sûr, des perfectionnements pour des ouvrages de cette nature.

Une première modification, qui tient principalement au nombre de décimales choisi par l'auteur, consiste dans les tables de parties proportionnelles. On sait que, en général, on peut compter sur autant de figures au nombre qu'il y a de décimales dans le logarithme; il en résulte que, les tables donnant déjà cinq figures, l'interpolation ne devra en donner qu'une. De là cette idée fort heureuse de M. Benoist, d'inscrire sur une colonne verticale les neuf premiers nombres, à droite et en face, la correction à faire subir

au logarithme lorsque la sixième figure du nombre est l'un de ces chiffres, tandis que, à gauche, il inscrit les modifications du logarithme qui donneront, en négligeant le septième chiffre, une sixième figure déterminée. Nous croyons que cette modification pourra, dans beaucoup de cas, abréger les calculs.

Parlons immédiatement d'une seconde modification introduite dans les nouvelles tables, et qui est très bonne. On sait que, dans les tables les mieux faites, celles de Schron par exemple, il y avait tout un calcul à faire pour obtenir les logarithmes des sinus ou des tangentes des arcs inférieurs à 3 degrés. M. Benoist a conservé le bas des pages des logarithmes des nombres pour y inscrire les logarithmes de ces sinus et de ces tangentes, mais il a donné immédiatement ces logarithmes eux-mêmes, de façon qu'il n'y a pas de calcul nouveau à faire pour les obtenir. De plus, la disposition même des tables en dix colonnes lui permet de donner, dans un espace restreint, les logarithmes des lignes de ces arcs de seconde en seconde.

Mais ce que nous trouvons surtout avantageux au point de vue du calcul, ce sont les modifications apportées dans la disposition des tables de lignes trigonométriques. Ces modifications sont les suivantes : d'abord une seule page contient les logarithmes d'une ligne trigonométrique pour un degré. Il a suffi pour cela de prendre une disposition analogue à celle des tables ordinaires pour les logarithmes des nombres. Une première colonne verticale contient les nombres de 0 à 59; ce sont les minutes. Puis il y a sept colonnes verticales marquées 0, 10, 20, ..., 60. C'est dans ces colonnes que sont inscrites les quatre dernières décimales du logarithme pour les dizaines de seconde. Il en résulte les deux avantages suivants : on peut, au moyen de la première colonne, avoir immédiatement les logarithmes des arcs de minute en minute; puis on sait que pour la dernière dizaine de secondes, on aura à chercher les quatre dernières décimales toujours dans la même colonne verticale.

En second lieu, la table comprend les logarithmes des lignes trigonométriques de tous les arcs du premier quadrant ins *toujours dans le même sens;* les sinus se liront toujours de haut en bas, l'arc étant pris à gauche; il en est de même pour la tangente; pour les lignes complémentaires, on lit les logarithmes de bas en haut, l'arc est compté sur la droite. Cette disposition a permis de réduire le nombre des pages de la table, tout en donnant moins de chances d'erreur pour la lecture des logarithmes. Pour l'interpolation même, on saura que l'on doit *ajouter* lorsque les nombres se lisent de haut en bas, et de gauche à droite, que l'on doit *retrancher* quand les nombres se lisent de bas en haut, et de droite à gauche.

En résumé, nous croyons que les nouvelles tables de M. Benoist rendront de grands services à ceux qui ont fréquemment à faire des calculs de logarithmes; nous ne regrettons même pas que l'auteur n'ait pas indiqué si le dernier chiffre est ou n'est pas forcé; nous ne croyons pas que cette connaissance soit vraiment d'une grande utilité dans la pratique.

La disposition adoptée par M. Benoist rend très facile la lecture des chiffres; c'est là un point important pour un ouvrage tel que celui que nous venons d'analyser. Nous estimons donc, que ce livre mérite, à plus d'un titre, d'attirer l'attention des professeurs et nous pensons qu'il rendra de grands services aux élèves en leur facilitant le succès de ce calcul trigonométrique qui fait partie des épreuves écrites de leurs examens.

G. L.

QUESTIONS PROPOSÉES

114. — On donne un triangle ABC, et le cercle circonscrit. Un point mobile M parcourt ce cercle. Pour chaque position du point mobile, on construit : 1° la droite de Simson relative au point A et au triangle BCM ; 2° la droite de Simson relative au point B et au triangle ACM. Lieu du point I d'intersection de ces deux droites.

(X. Antomari.)

115. — On donne deux circonférences ayant pour centre commun le point O. Soient OT un rayon quelconque de la grande circonférence, Ot un rayon quelconque de la petite circonférence. Par le point T, on mène la tangente à la première, et par le point t la tangente à la deuxième. Soient M leur point de rencontre, et I l'un des points de rencontre de Mt avec la petite circonférence. Prouver que l'on a

$$Mt^2 = MT^2 + IT^2.$$

(X. A.)

116. — Si dans un triangle ABC, l'angle A est double de l'angle B, on a entre les côtés la relation

$$a^2 = b\,(b + c).$$

Cas du triangle rectangle, A et B étant aigus. Réciproque.

(X. A.)

117. — On donne un quadrilatère ABCD ; soient A′ le centre de gravité du triangle BCD, B′ celui du triangle CAD, etc. Prouver que les deux quadrilatères ABCD, A′B′C′D′ sont homothétiques.

(X. A.)

118. — On donne le triangle ABC et le rayon r du cercle inscrit. Soient A′B′C′ les points de contact du cercle inscrit avec les côtés du triangle, A′ étant sur BC, etc. On pose AC′ $= \alpha$, BA′ $= \beta$, CB′ $= \gamma$. Si S désigne la surface du triangle ABC, prouver que l'on a

$$S = \frac{\alpha\beta\gamma}{r}.$$

(X. A.)

119. — La figure étant la même que celle de la question précédente, par le point L, pris sur le cercle inscrit, on mène une quatrième tangente $A_1B_1C_1$, le point A_1 étant sur BC, etc. On pose $LA_1 = x$, $LB_1 = y$, $LC_1 = z$; quelle relation y a-t-il : 1° entre x et y; 2° entre x et z; 3° entre y et z; 4° entre x, y, z? En conclure la formule

$$S = \frac{\alpha\beta\gamma}{r}. \qquad (X.\ A.)$$

120. — On considère un parallélogramme ABCD; par le sommet C, on mène une transversale mobile qui rencontre AB au point P, et AD en Q. Sur CP et CQ comme diamètre on décrit des cercles. Trouver le lieu géométrique décrit par le centre de similitude de ces deux cercles. *(G. L.)*

RECTIFICATION

L'article que nous avons publié (p. 222) et ayant pour titre *Considérations sur la projection oblique du cercle* est extrait textuellement des *Nouvelles Annales de Mathématiques* (2e série, t. XIV, p. 324 et 359, 1875).

C'est par un malentendu que cet article a été publié dans le *Journal de Mathématiques* ; l'auteur regrette cet oubli, et la Rédaction retire l'article.

(*La Rédaction*).

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX
RUE BERGÈRE, 20, PARIS — 23068-3

EXERCICES DIVERS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Par M. **Émile Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir pages 217 et 241.)

XI

Trouver une relation entre les distances x, y, z *d'un point* O *du plan d'un triangle aux trois sommets* A, B, C *et les côtés* a, b, c *de ce triangle.*

On a par les formules connues

$$\cos\frac{1}{2}\,\mathrm{BOC} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(y+z+a)(y+z-a)}{yz}}$$

$$\cos\frac{1}{2}\,\mathrm{COA} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x+z+b)(x+z-b)}{xz}}$$

$$\cos\frac{1}{2}\,\mathrm{AOB} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x+y+c)(x+y-c)}{xy}}$$

mais entre les trois angles $\frac{1}{2}$ BOC, $\frac{1}{2}$ COA, $\frac{1}{2}$ AOB dont la somme est 90°, on a la relation

$$1 - \cos^2\frac{1}{2}\,\mathrm{BOC} - \cos^2\frac{1}{2}\,\mathrm{COA} - \cos^2\frac{1}{2}\,\mathrm{AOB}$$

$$= 2\cos\frac{1}{2}\,\mathrm{BOC}\cos\frac{1}{2}\,\mathrm{COA}\cos\frac{1}{2}\,\mathrm{AOB}\,;$$

en remplaçant les cosinus de ces angles par leurs valeurs respectives, on a donc

$$1 - \frac{1}{4}\left(\frac{(y+z)^2-a^2}{yz} + \frac{(x+z)^2-b^2}{xz} + \frac{(x+y)^2-c^2}{xy}\right)$$

$$= \frac{1}{4xyz}\sqrt{\left((y+z)^2-a^2\right)\left((x+z)^2-b^2\right)\left((x+y)^2-c^2\right)}$$

élevant au carré et développant, il vient

$$a^2x^4 + b^2y^4 + c^2z^4 - (b^2+c^2-a^2)(a^2x^2+y^2z^2) -$$
$$(a^2+c^2-b^2)(b^2y^2+x^2z^2) - (a^2+b^2-c^2)(c^2z^2+x^2y^2)$$
$$+ a^2b^2c^2 = 0. \qquad (1)$$

Nous engageons les élèves à appliquer cette formule à divers problèmes comme ceux-ci :

Trouver le point du plan d'un triangle pour lequel les distances aux trois sommets sont proportionnelles (ou inversement proportionnelles) aux côtés opposés; aux carrés des côtés opposés : à la somme des carrés des deux côtés qui aboutissent au même sommet, etc.; ils trouveront là un bon exercice de calcul.

Ces problèmes peuvent aussi se résoudre géométriquement par intersection de lieux.

Remarque I. — Si l'on fait $x = y = z$ dans la formule (1), on trouve le rayon du cercle circonscrit.

Remarque II. — *Si* O *est le point tel que les pieds des perpendiculaires abaissées de ce point sur les côtés soient symétriques des pieds des hauteurs par rapport au milieu des côtés* — (ce point est celui que nous avons déjà rencontré dans notre étude sur le tétraèdre dont les arêtes opposées sont égales deux à deux : *Association française, Congrès de Nantes de 1875*), *la somme des carrés des côtés des trois triangles* BOC, AOC, AOB *est la même pour chacun d'eux.*

Dans ce cas l'on a

$$x^2 = \frac{a^6 - (b^2 - c^2)^2(2b^2 + 2c^2 - 3a^2)}{16S^2}$$

et les valeurs analogues pour y^2 et z^2, S désignant la surface du triangle ABC.

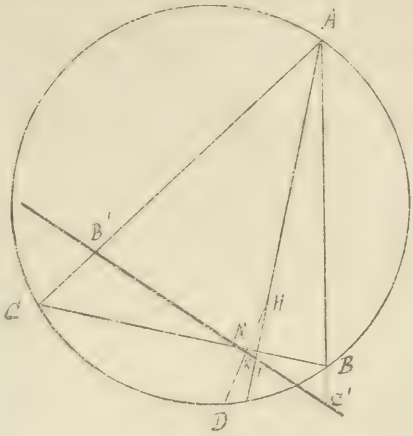
XII

Trouver sur la circonférence circonscrite à un triangle ABC *un point* D *tel que la droite de Simson correspondant à ce point soit parallèle à une direction donnée.*

Supposons le problème résolu : soient A′, B′, C′ les pieds des perpendiculaires abaissées de D sur les trois côtés (la droite de Simson est la droite A′B′C′), soit H le point de concours des hauteurs du triangle ABC. Soit I le point d'intersection de AH avec A′B′C′ et K le point d'intersection de DH avec A′B′C′.

On sait que KD = KH. Donc K appartient au lieu des

points qui divisent en deux parties égales les rayons vecteurs allant de H à la circonférence circonscrite. Ce lieu est le cercle des neuf points du triangle ABC.



On sait aussi que K est le milieu de A'I, donc K appartient à la droite lieu des milieux des parties des parallèles à la direction donnée comprise entre les deux droites BC et AH.

Le point K de la droite cherchée est donc déterminé par l'intersection de ces deux lieux, et le problème est résolu.

XIII

On donne deux circonférences de centre O *et de rayon* R *et* r *et une droite fixe* JM', *dont la distance* JO *au centre des circonférences est* l ; *on construit les cercles ayant leur centre en* M, *point quelconque de la circonférence de rayon* R, *et tangente à* JM' *en* M'. *Trouver le lieu des centres de similitude de ces cercles et du cercle de rayon* r.

Soient O' et O'_1 les points d'intersection de OJ avec la circonférence de rayon r;

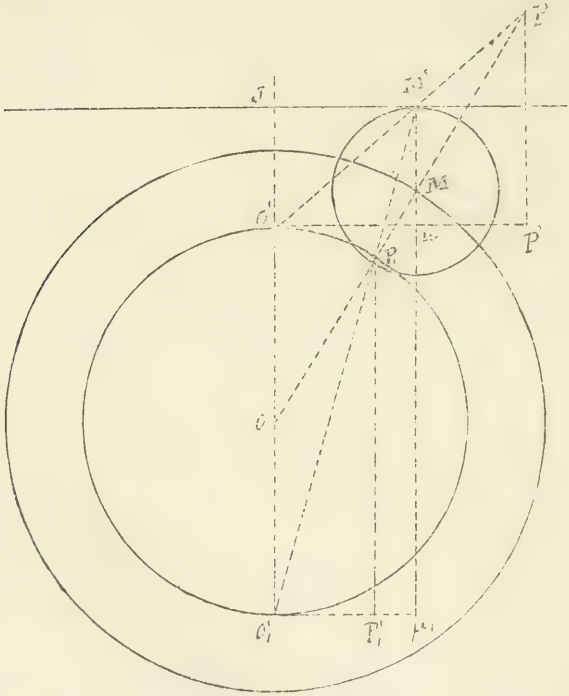
O'M' et OM se coupent en P, qui est le centre de similitude directe considéré ;

O'_1M' et OM se coupent en P_1 qui est le centre de similitude inverse considéré ;

Soient P' et p les pieds des perpendiculaires abaissées de P et de M sur la tangente menée en O' au cercle de rayon r; soient P'_1 et p_1 les pieds des perpendiculaires abaissées de P_1 et M sur la tangente menée en O'_1 au cercle de rayon r.

On a
$$\frac{PP'}{M'\mu} = \frac{O'P}{O'M'} = \frac{OP}{OM}$$
ou
$$\frac{PP'}{l-r} = \frac{OP}{R}.$$

Le rapport $\frac{PP'}{OP}$ est donc constamment égal à $\frac{l-r}{R}$ et le



lieu de P est une conique qui a O pour foyer et O'P' pour directrice.

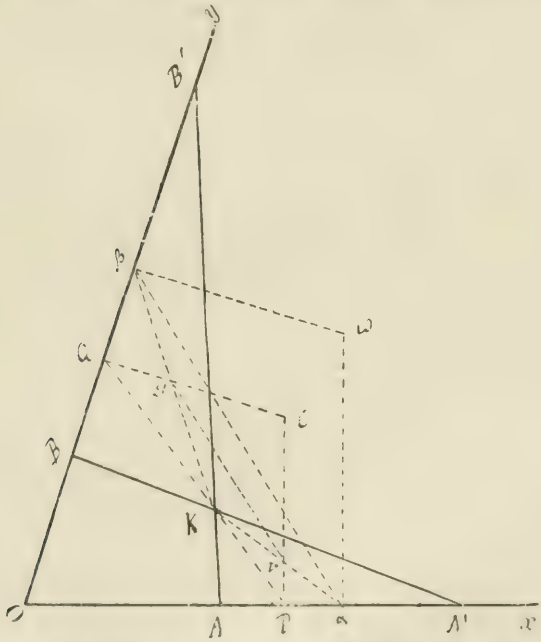
On aurait de même
$$\frac{P_1P'_1}{OP_1} = \frac{l+r}{R}$$
et le lieu de P_1 est une conique qui a O pour foyer et $O'_1P'_1$ pour directrice.

La discussion est fort simple : car ces coniques sont des

ellipses, des paraboles ou des hyperboles suivant que les rapports $\frac{l-r}{R}$, $\frac{l+r}{R}$ sont plus grands que l'unité, égaux à l'unité, ou plus petits que l'unité.

XIV

Par un point K *fixe, on mène deux droites variables* BA′, AB′, *qui coupent deux droites fixes* Ox, Oy, *en quatre points* AA′,



B,B′, *tels que le quadrilatère* AA′BB′ *soit inscriptible. Trouver le lieu des centres* ω *des circonférences circonscrites à ces quadrilatères.*

Par K menons la droite PQ perpendiculaire à la bissectrice de l'angle yOx, P étant sur Ox, Q sur Oy.

En P et en Q menons des perpendiculaires respectivement à Ox et à Oy, perpendiculaires se coupant en O′; soit α le milieu de AA′, soit β le milieu de BB′.

Les perpendiculaires menées en α et β respectivement à Ox, Oy se coupent en ω, point du lieu.

Soit V le point où $K\alpha$ et PO' se coupent.

Soit S — $K\beta$ et QO' —

Les deux triangles AKA', BKB' sont semblables; dans ces triangles α et β sont des points homologues ainsi que V et S; on a donc $\frac{KV}{KS} = \frac{K\alpha}{K\beta}$.

Les deux droites VS et $\alpha\beta$ sont donc parallèles, par suite les deux triangles $VO'S$, $\alpha\omega\beta$ ont leurs côtés parallèles deux à deux et sont homothétiques; par suite les trois points K, O', ω, sont en ligne droite.

Le lieu cherché est donc la droite KO'.

Cette question que j'avais proposée dans la *Nouvelle Correspondance de Mathématiques*, y a été résolue analytiquement.

XV

1° *Si deux triangles* $AB''C'$, $A'BC''$ *ont deux centres d'homologie* O *et* O', *ils en ont un troisième* ω; *autrement dit : deux triangles doublement homologiques le sont triplement.*

2° *Soit* C *l'intersection de* AB *et de* $C'C''$,

— B' — $A'C'$ — BB'',

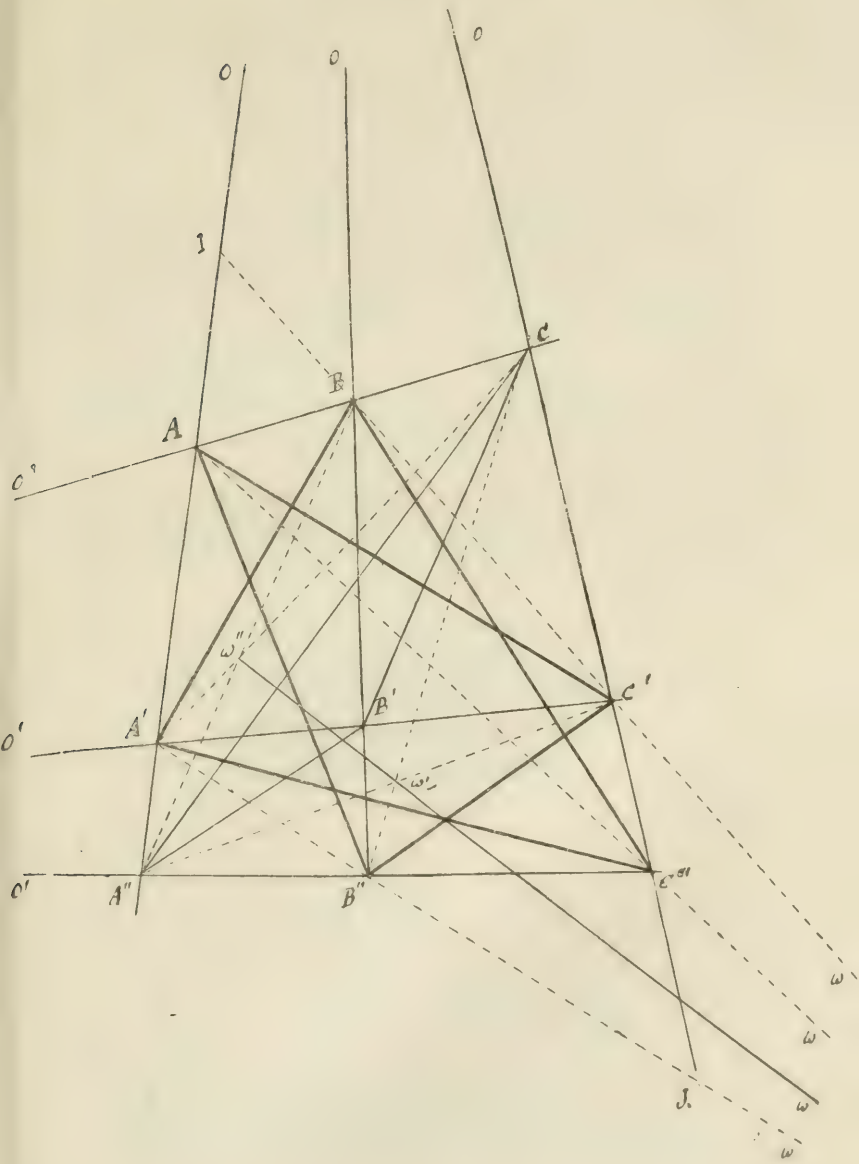
— A'' — AA' — $B''C''$,

il est évident que les trois triangles $AB''C'$, $A'BC''$, $CB'A''$ *sont deux à deux doublement homologiques, avec* O *et* O' *pour centres d'homologie, et par suite ils le sont triplement : démontrer que les trois troisièmes centres d'homologie sont en ligne droite.*

Pour démontrer la première partie, il suffit de faire voir que les trois droites BC', AC'', $A'B''$ se coupent en un même point ω ou que, si I est le point où BC' coupe OA et J le point où $A'B''$ coupe OC, les deux rapports anharmoniques $(OIAA')$, $(OC'C''J)$ sont égaux : car, le point O étant commun, les droites joignant les autres points se couperont au même point.

Or le faisceau $(C', OIAA')$ coupé par OA et CO' donne $(OIAA') = (CBAO')$

et le faisceau $(A', OC'C''J)$ coupé par OJ et par $O'C''$


O
O
O
I
C
B
A
O''
ω''
C'
B'
A'
O'
ω'
O'''
A''
B''
C'''
ω
ω
J.
ω
ω

donne $(OC'C''J) = (A''O'C''B'')$;
mais en intervertissant les deux premières lettres avec les deux dernières $(A''O'C''B'')$ peut s'écrire $(C''B''A''O')$,
et remarquant que le faisceau $(O, C''B''A''O')$ coupé par $O'C$ et par $O'C''$ donne $(CBAO') = (C''B''A''O')$,
il vient $(OIAA') = (OC'C''J)$.

Démontrons la seconde partie.

Le centre ω d'homologie de $AC'B''$ et de $BA'C''$ est l'intersection de $A'B''$ et de BC'.

Le centre ω' d'homologie de $AC'B''$ et de $A''B'C$ est l'intersection de $A''C'$ et de CB''.

Le centre ω'' d'homologie de $BA'C''$ et de $A''B'C$ est l'intersection de $A'C$ et de $A''B$.

Les deux triangles $A'B''C$, $A''C'B$ sont doublement homologiques avec O et O' comme centres d'homologie, ils en ont donc un troisième ω_1.

Or les points ω, ω', ω'' sont respectivement les points de rencontre des côtés homologues des deux triangles $A'B''C$, $A''C'B$, ω_1 étant considéré comme centre ; donc ω, ω', ω'' sont en ligne droite.

NOUVELLES PROPRIÉTÉS DU TRIANGLE

Par M. H. **Brocard**, capitaine du génie.

(*Suite et fin*, voir page 248.)

VI

Appliquons la méthode précédente aux systèmes de trois points en ligne droite que nous avons indiqués (*).

1. — O, *centre du cercle circonscrit;*
E, *centre de gravité;*
H, *point de concours des hauteurs.*

On trouve facilement

(*) Nous indiquerons les distances au côté a par la lettre qui désigne le point, accompagné d'un indice ; la distance de O au côté a sera O_a.

$$O_a = \frac{2T}{2n^4 - p^4}\, a(b^2 + c^2 - a^2)$$

$$E_a = \frac{2T}{3a}$$

$$H_a = \frac{2T}{2n^4 - p^4}\, \frac{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)}{a}$$

et l'on a

$$\frac{O_a - E_a}{E_a - H_a} = \frac{p^4 + n^4 - 3b^2c^2 - 3a^4}{2p^4 + 2n^4 - 6b^2c^2 - 6a^4} = \frac{1}{2}$$

ce qui montre, en outre, que HE = 2EO, relation connue.

2. — D, *centre d'homologie des triangles* ABC *et* $A_1B_1C_1$;
E, *centre de gravité ;*
S, *milieu de* $\omega\omega'$.

On trouve facilement

$$D_a = \frac{2Ta^2b^2c^2}{n^4}\, \frac{1}{a^3} ;$$

$$E_a = \frac{2T}{3a} ;$$

$$S_a = \frac{T}{n^4} \,.\, a(b^2 + c^2)$$

et l'on a $\dfrac{D_a - E_a}{E_a - S_a} = \dfrac{2(3b^2c^2 - n^4)}{2n^4 - 3a^2(b^2 + c^2)} = 2,$

ce qui établit en outre que DE = 2ES.

3. — D', *point correspondant à* D ;
K, *centre des médianes antiparallèles :*
O, *centre du cercle circonscrit, ou, ce qui revient au même,* S *milieu de* $\omega\omega'$.

On a alors $$S_a = \frac{T}{n^4}\, a(b^2 + c^2) ;$$

$$K_a = \frac{2T}{m^2} \,.\, a ;$$

$$D'_a = \frac{2T}{p^4} \,.\, a^3 ;$$

et l'on en tire

$$\frac{S_a - K_a}{K_a - D'_a} = \frac{(b^2 + c^2)m^2 - 2n^4}{(b^2 + c^2)p^4 - 2a^2n^4} \,.\, \frac{p^4}{m^2} = \frac{p^4}{m^4}.$$

Pour prouver que D′ est, en même temps, le pôle de $\omega\omega$, il suffit d'établir que le rapport de OS à SD′ est bien celui qui résulterait de la situation du pôle de la corde $\omega\omega'$. Or on a dans cette hypothèse

$$OS = \frac{OK}{2}(1 + \cos 2\alpha) = OK \cos^2 \alpha;$$

$$SD' = \frac{\omega\omega'}{2} \operatorname{tg} 2\alpha;$$

donc $$\frac{OS}{SD'} = \frac{OK(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{\omega\omega' \operatorname{tg} \alpha(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)} = \frac{m^2 \,.\, OK \,.\, p^4}{2\omega\omega' \,.\, n^4\sqrt{2n^4 - p^4}}.$$

Mais

$$OK = \frac{2abc\sqrt{p^4 - n^4}}{m^2\sqrt{2n^4 - p^4}}; \qquad \omega\omega' = \frac{abc\sqrt{p^4 - n^4}}{p^4}.$$

Donc après réduction on trouve

$$\frac{OS}{SD'} = \frac{p^4}{2n^4 - p^4};$$

d'autre part on a

$$\frac{O_a - S_a}{S - D'_a} = \frac{p^4[2n^4(b^2 + c^2 - a^2) - (b^2 + c^2)(2n^4 - p^4)]}{(2n^4 - p^4)[(b^2 + c^2)p^4 - 2a^2n^4]}$$
$$= \frac{p^4}{2n^4 - p^4}.$$

Donc le point D′ est bien le pôle de $\omega\omega'$.

Remarque. — Par construction, $\omega S\omega'$ est la corde commune au cercle de Brocard et à la circonférence décrite sur ZD comme diamètre. Ainsi

$$S\omega^2 = SO.SK = SZ.SD',$$

on en déduit $$SO = \frac{m^2abc\sqrt{p^4 - n^4}}{2n^4\sqrt{2n^4 - p^4}};$$

$$SZ = \frac{p^4abc\sqrt{p^4 - n^4}}{2n^4m^2\sqrt{2n^4 - p^4}};$$

$$SK = \frac{abc\sqrt{p^4 - n^4}\sqrt{2n^4 - p^4}}{2n^4m^2};$$

$$SD' = \frac{m^2abc\sqrt{p^4 - n^4}\sqrt{2n^4 - p^4}}{2n^4p^4}.$$

4. — S′, *point correspondant à* S ;
E, *centre de gravité ;*
D′, *pôle de* ωω′.

On a les formules

$$S'_a = \frac{2T}{p^4 + 3n^4} \cdot \frac{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}{a};$$

$$E_a = \frac{2T}{3a};$$

$$D' = \frac{2T}{p^4} a^3.$$

On en tire alors

$$\frac{D'_a - E_a}{S'_a - E_a} = \frac{(3a^4 - p^4)(p^4 + 3n^4)}{p^4(3a^4 + 3n^4 - p^4 - 3n^4)} = \frac{p^4 + 3n^4}{p^4} = \text{const.}$$

5. — H, *point de rencontre des hauteurs ;*
S, *milieu de* ωω′ ;
Z′, *point correspondant au centre* Z *du cercle de Brocard.*

Le point Z étant le milieu de OK, les distances de Z s'obtiendront par le même moyen que celles du point S, milieu de ωω′. On trouve ainsi

$$Z_a = \frac{2T(2n^4 - a^2m^2)}{m^2(2n^4 - p^4)};$$

$$Z'_a = \frac{2T(2n^4a^2m^2 + m^4b^2c^2 - 2n^4p^4)}{3an^4(2n^4 - p^4)}.$$

A cette dernière expression il faut joindre les formules

$$H_a = \frac{2T}{a(2n^4 - p^4)}(2a^4 + 2b^2c^2 - p^4);$$

$$S_a = \frac{Ta(m^2 - a^2)}{n^4}.$$

On trouve ainsi $\dfrac{H_a - Z'_a}{Z'_a - S_a} = 2,$

ou encore $3Z'_a = H'_a + 2S_a.$

A l'inspection des formules, on reconnaîtrait les indices de l'existence d'une relation de ce genre.

Le reste du calcul s'achève facilement et on vérifie l'identité

$$2n^4a^2m^2 + b^2c^2m^4 - 2n^4p^4$$
$$= n^4(2a^4 + 2b^2c^2 - p^4) + a^2(m^2 - a^2)(2n^4 - p^4).$$

Le rapport des segments déterminés sur les droites SD, OH, par le point E, et sur la droite SH par le point Z′ montre que les lignes DH, OSD′, EZ′ sont parallèles.

Cette propriété nous servira dans la suite, et nous permettra d'établir facilement les autres propositions qu'il nous reste à démontrer.

6. — O, *centre du cercle circonscrit;*
S′, *point correspondant à* S ;
Z′, *point correspondant à* Z.

Le fait de la situation de ces trois points en ligne droite sera établi, si l'on prouve que $\frac{Z'S'}{S'O}$, ou, ce qui revient au même, $\frac{S'_a - Z'_a}{O_a - S'_a}$ est égal au rapport $\frac{EZ'}{OD'}$, déduit des expressions de EZ′ et de OD′.

Or on a

$$\frac{EZ'}{OD'} = \frac{\frac{2}{3}\,OS}{OD'} = \frac{2OS}{3(OS + SD')} = \frac{p^4}{3n^4}.$$

D'autre part :

$$O_a = \frac{2T}{2n^4 - p^4}\,a(m^2 - 2a^2);$$
$$S'_a = \frac{2T}{p^4 + 3n^4} \cdot \frac{(m^2 - b^2)(m^2 - c^2)}{a};$$
$$Z'_a = \frac{2T(2n^4a^2m^2 + m^4b^2c^2 - 2n^4p^4)}{3an^4(2n^4 - p^4)}.$$

Réduisant au même dénominateur, et supprimant, pour simplifier, ce dénominateur commun, il vient

$$\frac{S'_a - O_a}{Z'_a - S'_a} = \frac{3n^4(n^4 + a^4)(2n^4 - p^4) - 3n^4a^2m^2 - 2a^2(p^4 + 3n^4)}{(3n^4 + p^4)(2n^4a^2m^2 + b^2c^2m^4 - 2n^4p^4) - 3n^4(n^4 + a^4)(2n^4 - p^4)}$$

Cette expression se réduit à

$$\frac{3n^4}{p^4},$$

ce qui établit la proportion.

7. — K, *centre des médianes antiparallèles ;*
S′, *point correspondant à* S ;
D, *centre d'homologie des triangles* ABC, $A_1B_1C_1$.

On a
$$K_a = \frac{2T}{m^2}a;$$
$$S = \frac{2T}{p^4 + 3n^4}\,\frac{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}{a};$$
$$D_a = \frac{2Ta^2b^2c^2}{n^4}\cdot\frac{1}{a^3}.$$

Alors on trouve
$$\frac{S'_a - D_a}{K_a - D_a} = \frac{m^4[m^2n^4 - n^4(b^2+c^2) - m^2b^2c^2]}{n^4(p^4+3n^4)(n^4a^2 - m^2b^2c^2)} = \frac{m^4}{n^4(p^4+3n^4)} = \text{const.}$$

8. — Z, *centre du cercle de Brocard ;*
S′, *point correspondant à* S ;
H, *point de concours des hauteurs.*

Pour démontrer que ces trois points sont en ligne droite, il suffit d'établir que
$$\frac{HS'}{S'Z} = \frac{AD}{ZK} = \frac{2\,OS}{OZ} = \frac{m^4}{n^4}.$$

Or, on a
$$Z_a = \frac{2T}{m^2(2n^4 - p^4)}a(2n^4 - a^2m^2);$$
$$S'_a = \frac{2T}{p^4 + 3n^4}\,\frac{(a^4 + n^4)}{a};$$
$$H_a = \frac{2T}{2n^4 - p^4}\,\frac{2a^4 + 2b^2c^2 - p^4}{a}.$$

On en déduit
$$\frac{H_a - S'_a}{S'_a - Z_a} = \frac{m^2(3a^4p^4 - 2p^4n^4 + 4n^4a^4 - p^8 - 2n^8 + 2p^4b^2c^2 + 6n^4b^2c^2)}{n^4(5a^4m^2 + 2n^4m^2 - 6n^4a^2 - p^4m^2 - 2p^4a^2)}.$$

En remplaçant, au numérateur, $2n^4$ par $m^4 - p^4$, la parenthèse devient
$$m^4(2a^4 - p^4 - n^4 + 3b^2c^2) + p^4(a^4 + n^4 - b^2c^2),$$
ou
$$m^4(2a^4 - p^4 - n^4 + 3b^2c^2) = p^4a^2m^2.$$

Par conséquent, on doit avoir identiquement
$$m^2(2a^4 - p^4 - n^4 + 3b^2c^2) + p^4a^2 = m^2(5a^4 + 2n^4 - p^4) - 6n^4a^2 - 2p^4a^2;$$

en faisant passer tout dans le premier membre, on obtient l'identité $3m^2(a^4 + n^4 - b^2c^2 - a^2m^2) = 0$.

La proposition est donc démontrée.

VII

Intersection commune aux droites OD, EZ, KZ′, HD′.

Nous arrivons maintenant à la notion d'un certain point N du cercle circonscrit, par lequel passent quatre lignes principales, joignant des groupes de points correspondants : OD, EZ, KZ′, HD′.

Cette propriété résulte très simplement de la similitude des triangles déterminés par la ligne EZ′, parallèle à OD′ dans les triangles ayant leurs bases sur OD′, et leurs sommets sur la parallèle DH.

Tout revient à prouver, en premier lieu, que les rapports $\frac{OZ}{YE}$ ou $\frac{ZK}{EZ'}$, et $\frac{KD'}{Z'V}$, Y et V étant les intersections de EZ′ avec OD et HD′, sont égaux.

Or, on a $OZ = ZK = \frac{abc\sqrt{p^4 - n^4}}{m^2\sqrt{2n^4 - p^4}}$;

$$YE = EZ' = \frac{2}{3}\,OS = \frac{m^2abc\sqrt{p^4 - n^4}}{3n^4\sqrt{2n^4 - p^4}};$$

$$KD' = ZD' - ZK = \frac{abc\sqrt{p^4 - n^4}\sqrt{2n^4 - p^4}}{m^2p^4};$$

$$Z'V = \frac{2}{3}\,SD' = \frac{m^2abc\sqrt{p^4 - n^4}\sqrt{2n^4 - p^4}}{3n^4p^4}.$$

et l'on a bien $\frac{OZ}{YE} = \frac{ZK}{EZ'} = \frac{KD'}{Z'V} = \frac{3n^4}{m^4}$.

Mais

$$OD = \frac{abc}{\sqrt{2n^4 - p^4}} \cdot \frac{p^4 - n^4}{n^4}, \text{ et } YO = \frac{1}{3}\,OD;$$

par conséquent

$$NY = NO + \frac{1}{3}\,OD = \frac{abc}{\sqrt{2n^4 - p^4}}\left(1 + \frac{p^4 - n}{3n^4}\right)$$

$$= \frac{abcm^4}{3n^4\sqrt{2n^4 - p^4}},$$

et

$$\frac{\text{NO}}{\text{NY}} = \frac{3n^4}{m^4}.$$

Ainsi, le point N est une des extrémités du diamètre DON du cercle circonscrit.

Incidemment, U désignant l'intersection de EZ′ avec DK on voit facilement que l'on a

$$\text{UZ}' = \frac{abcp^4\sqrt{p^4 - n^4}}{3m^2n^4\sqrt{2n^4 - p^4}}.$$

VIII

Remarques. — La plupart des lignes que nous avons considérées s'expriment en fonction des quantités $\sqrt{p^4 - n^4}$, $\sqrt{2n^4 - p^4}$. La présence de ces deux radicaux montre tout d'abord que si a, b, c désignent les côtés d'un triangle, on a toujours

$$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 < a^4 + b^4 + c^4 < 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2).$$

En outre, le radical $\sqrt{p^4 - n^4}$ ne figure jamais au dénominateur, parce que les lignes considérées peuvent être nulles, sans jamais devenir infinies. Au contraire, le radical $\sqrt{2n^4 - p^4}$, qui représente quatre fois la surface du triangle, figure indifféremment au numérateur ou au dénominateur, parce qu'il ne peut jamais se réduire à zéro.

La méthode que nous avons exposée pour les démonstrations précédentes est presque exclusivement analytique ; elle ne paraît pas offrir, à cet égard, toute la simplicité désirable, et il est à présumer qu'une méthode synthétique s'appliquerait avantageusement à l'étude des propriétés énoncées. Il était utile, cependant, de faire connaître les plus essentielles, et d'en donner, en attendant, une démonstration uniforme.

Les propositions dont il a été question dans cette note conduisent à une série d'intéressantes constructions.

Pour mieux dégager la situation des lignes, il conviendra d'opérer sur un triangle de grandes dimensions. Il y aura

avantage à prendre un triangle de forme obtusangle; l'intervalle des divers points remarquables se dessinera plus nettement.

IX

Pour terminer cette note, nous allons indiquer un certain nombre de relations métriques entre les éléments du triangle donné et le cercle des sept points.

Soit D le diamètre du cercle circonscrit à ABC, δ la ligne $\omega\omega'$; on a

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = D = \frac{\delta}{\sin\alpha\sqrt{1 - 4\sin^2\alpha}}$$
$$= \frac{2abc}{\sqrt{2n^4 - p^4}}.$$

On en déduit $\delta = \frac{abc}{n^4}\sqrt{p^4 - n^4}$.

On trouverait facilement

$$OK = \frac{2abc}{m^2}\frac{\sqrt{p^4 - n^4}}{\sqrt{2n^4 - p^4}};$$
$$A_1B_1 = \frac{c\sqrt{p^4 - n^4}}{m^2},$$

et ainsi de suite.

Par conséquent, le rapport de similitude des triangles $A_1B_1C_1$ et ABC est

$$\frac{A_1B_1}{a} = \frac{D}{OK} = \frac{2}{\sqrt{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{m^2}{\sqrt{p^4 - n^4}};$$

d'où
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2n^4 - p^4}}{m^2}$$
$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{m^2\sqrt{2n^4 - p^4}}{p^4}$$
$$\operatorname{tg}3\alpha = \frac{(p^4 + n^4)\sqrt{2n^4 - p^4}}{m^2(p^4 - n^4)}$$
$$\operatorname{tg}4\alpha = \frac{m^2p^4\sqrt{2n^4 - p^4}}{p^8 - 2n^8}.$$

La distance du centre O du cercle circonscrit à l'axe radi-

cal de ce cercle et du cercle de Brocard a pour expression

$$\frac{D}{2\sqrt{1-3\lg^2\alpha}} = \frac{m^2abc}{4\sqrt{p^4-n^4}\sqrt{2n^4-p^4}}.$$

Enfin on arriverait très simplement à des résultats analogues pour les équations des diverses lignes, et l'on rencontrerait ainsi une foule de relations d'identité entre les côtés ou les lignes trigonométriques du triangle. — C'est un exercice que nous laisserons à la curiosité de nos lecteurs.

NOTE ADDITIONNELLE

Le centre de gravité F du périmètre du triangle est le centre du cercle inscrit au triangle ayant pour sommets les milieux des côtés du premier.

En conséquence, ses distances aux côtés de ce triangle ont pour expression

$$\frac{h}{2} - \frac{\delta_i}{2} = \frac{S(b+c)}{a(a+b+c)}, \text{ etc.}$$

Cela posé, il est facile de vérifier que les points I, E, F sont en ligne droite, et que IE = 2.EF (Euler).

En effet, l'on a

$$\text{I} \qquad \delta = \frac{2S}{a+b+c}$$

$$\text{E} \qquad \delta = \frac{2S}{3a},$$

$$\text{F} \qquad \delta = \frac{S(b+c)}{a(a+b+c)}.$$

Donc $\dfrac{\text{I}-\text{E}}{\text{E}-\text{F}} = \dfrac{2(2a-b-c)}{2a-b-c} = 2 = \text{const.}$

Les propositions relatives à la situation des points O, E, H, avec EH = 2.OE et des points I, E, F avec IE = 2.EF ont été établies pour la première fois par Euler, dans le t. XI des *Mémoires de Pétersbourg*, année 1765.

(H. Brocard.)

EXAMENS ORAUX DE L'ÉCOLE SAINT-CYR (1883)

D'un point A on trace les droites AB, AC, AD, AE faisant entre elles les angles consécutifs α, β, γ. Démontrer la relation

$$\sin\alpha \sin\gamma - \sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma) + \sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta = 0.$$

— On donne un rectangle ABCD. Par un point M, du plan de ce rectangle, on mène quatre droites MA, MB, MC, MD, qui représentent en grandeur et en direction quatre forces appliquées en M. Trouver la résultante de ces forces.

— Étant donnée une sphère, y inscrire un cône dont la surface latérale soit égale à la surface de la calotte sphérique adjacente.

— Étant données les limites de deux progressions décroissantes

$$S = 1 + Q + Q^2 + Q^3 + \ldots\ldots$$
$$s = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots\ldots$$

on forme la nouvelle progression

$$\Sigma = 1 + Qq + Q^2q^2 + \ldots\ldots\ldots;$$

trouver la somme Σ en fonction de S et de s.

— Trouver, pour $x = 1$, la valeur de l'expression

$$\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}.$$

— Trouver deux nombres dont la somme et le produit soient égaux à la différence des carrés.

— D'un point A tombe un mobile pesant, sans vitesse initiale ; n secondes après, on en lance un autre suivant la même verticale et l'on demande quelle vitesse il faut lui imprimer pour qu'il atteigne le premier en un point D, tel que $AD = m$.

Un poids P est sur un plan incliné. Il est soumis à quatre forces : son poids, une force verticale opposée 2P, une force horizontale 2P, dirigée vers l'intérieur du plan, et une force 2P, dirigée dans le sens du plan : quel est l'angle de ce plan avec l'horizon si les quatre forces se font équilibre ?

— Résoudre $\sin 3x = \cos 2x$.

— Former une progression arithmétique telle que la somme des n premiers termes soit égale à $(n+1)$ fois le terme auquel on s'arrête.

— Étant donnés $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{2+1}}{\sqrt{2-1}}$, $\operatorname{tg} y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, prouver que l'on a $x - y = \frac{\pi}{4}$.

— Étant donnée l'équation $x^2 + 9x - 18 = 0$, calculer la valeur de la fonction $5x' + 5x'' - 6x'x''$.

— Si l'on a $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} y = \frac{1}{5}$, $\operatorname{tg} z = \frac{1}{8}$, on a aussi $x + y + z = \frac{\pi}{4}$.

— Quelle est la progression arithmétique telle que la somme de ses termes est toujours égale à quatre fois le carré du nombre des termes ?

— Trouver l'équation qui a pour racines les carrés des inverses des racines de l'équation $x^2 + px + q = 0$. Condition de réalité des racines de cette équation.

— Partager un arc en deux parties telles que la somme de leurs tangentes soit minima.

— Résoudre $\sin 2x = \operatorname{tg} x$.

— On a deux tonneaux dans lesquels il y a du vin. On verse du premier dans le second autant de litres qu'il y en a déjà dans celui-ci ; on verse ensuite du second tonneau dans le premier autant de litres qu'il en reste dans le premier ; puis, du premier dans le second, autant de litres qu'il y en avait déjà dans celui-ci. Il reste alors a litres dans chaque tonneau. Combien y avait-il de litres au début dans chaque tonneau ?

— Déterminer a et b de façon que $3x^4 + ax + b$ soit exactement divisible par $x^2 + 3x - 10$.

— Un plan est incliné d'un angle x sur l'horizon ; un corps est maintenu en équilibre par une force dirigée parallèlement à l'horizon, et égale au poids du corps. Trouver l'angle du plan avec l'horizon. Trouver ce que devient cet angle si l'on tient compte du frottement.

— Si l'on joint le centre de gravité G d'un triangle aux

trois sommets, et que les droites GA, GB, GC représentent des forces en grandeur et en direction, ces forces se font équilibre. Généralisation.

— Un projectile est lancé du point A avec une vitesse donnée v; quel angle la ligne de tir doit-elle faire avec l'horizon pour que le projectile rencontre cet horizon au point B, à la distance a du point A ?

— Construire deux longueurs x et y, sachant que l'on a

$$x + y = a + \frac{b^2}{a}; \quad xy = \frac{b^4}{a^2}.$$

— Déterminer les coefficients p et q de l'équation $x^2 + px + q = 0$, de façon que la différence des racines ait une valeur donnée, ainsi que la différence de leurs carrés.

— Un point matériel assujetti à se mouvoir sur une ellipse est sollicité par deux forces variables représentées à chaque instant, en grandeur et en direction, par les rayons vecteurs de ce point. Trouver la position d'équilibre du point.

— Un point matériel assujetti à se mouvoir sur une demi-circonférence concave, est sollicité par son poids et par l'un des brins de corde d'une poulie fixe, corde qui supporte une force d'intensité f. Trouver les conditions d'équilibre.

— On donne une balance à deux bras inégaux l et l', faisant entre eux un angle de 150°; les deux bras ne sont pas pesants. On met un poids P dans chaque plateau, et on demande la position d'équilibre du système.

— Former l'équation du second degré dont l'une des racines $2 + \sqrt{3}$.

— Étant donné un angle droit xOy, sur Oy les deux longueurs $OA = a$, $AB = b$, on demande en quel point de Ox on doit se placer pour voir ces deux longueurs sous le même angle.

— Dans l'équation $x^2 - 2x - 4 = 0$, calculer la fonction

$$\frac{x_1 - 3}{x_1 + 7} + \frac{x_2 - 3}{x_2 + 7}.$$

— On donne un cercle, un diamètre vertical AOB, et un rayon incliné OC. Déterminer l'angle BOC pour qu'un corps mette le même temps pour parcourir OC qu'un mobile partant de A pour parcourir le diamètre AB.

— Dans un quadrilatère quelconque, on prend le milieu de la ligne qui joint les milieux des diagonales; on joint ce point aux quatre sommets; ces droites représentent des forces en grandeur et en direction; démontrer que le système est en équilibre.

Déterminer les coefficients de l'équation bicarrée de manière que α et α^2 soient racines en même temps.

— Résoudre $\sin x + 1 = \cos 2x$.

— On a $mx + ny + pz = a$; trouver le maximum de $x^m y^n z^p$.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1883

Classe de troisième.

On donne deux points fixes sur une circonférence, et on les joint par deux cordes à un même point de la circonférence. Au milieu de l'une de ces cordes, on mène une droite qui coupe la seconde sous un angle donné (63° par exemple). On demande le lieu du point d'intersection lorsque le troisième point parcourt la circonférence. Discuter le problème.

— Faire voir que l'expression

$$\frac{1.2.3.4\ldots(2m-1)2m}{1.2.3\ldots m.2^{2m}}$$

est égale à $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdots\frac{2m-1}{2}$.

Classe de seconde.

On donne une pyramide régulière à base carrée SABCD dont on suppose les faces latérales indéfiniment prolongées au delà du sommet S et au delà de la base ABCD. On coupe la pyramide par un plan parallèle à la base, et l'on construit un parallélipipède droit ayant pour base la section *abcd* et pour hauteur la distance des deux plans parallèles *abcd* et ABCD. A quelle distance du plan ABCD faut-il mener le plan sécant pour que ce parallélipipède soit un cube?

Discussion du problème, nombre des solutions. (On représentera par a le côté AB de la base de la pyramide donnée, et par h la hauteur de cette pyramide.)

— On donne deux droites A et B quelconques dans l'espace, et un plan P perpendiculaire à la droite A. Par cette droite A on mène un plan quelconque Q, et par la droite B un plan R perpendiculaire au plan Q. Ces deux plans Q et R coupent le plan P suivant deux droites qui se coupent elles-mêmes en un point M. Trouver le lieu que décrit le point M lorsque le plan Q tourne autour de la droite A.

Classe de philosophie.

Étant donné un triangle ABC et un nombre positif m plus petit que l'unité, on prend sur le côté AB un point C_1 tel que AB_1 soit égal à mAB; de même, on prend sur AC un point B_1 tel que CB_1 soit égal à mAC; et sur BC un point A_1 tel que BA_1 soit égal à mBC: 1° Trouver l'aire du triangle $A_1B_1C_1$; — 2° on considère une suite indéfinie de triangles $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \ldots A_pB_pC_p$, dont chacun se déduit du précédent comme le triangle $A_1B_1C_1$ se déduit de ABC; trouver la limite de la somme des aires de ces triangles quand le nombre entier p augmente indéfiniment; — 4° étudier les variations de la limite précédente quand le nombre m varie entre 0 et 1; — 4° déterminer les positions des points de rencontre des médianes de chacun des triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ... $A_pB_pC_p$.

QUESTION 90

Solution par M. Bablon, élève au Collège d'Épinal.

On considère une parabole P *et sur l'axe de cette parabole un point* Q *situé à une distance* 2p *du sommet* O. *Soit* A *un point quelconque de* P; *on projette* A *en* B *sur la tangente au sommet : les droites* QB *et* OA *se coupent en un point* I, *dont on demande le lieu géométrique.* (G. L.)

Le point A étant sur la courbe, on a

$$\overline{AA'}^2 = 2p \,.\, OA'. \quad (1)$$

Par le point A je mène AC parallèle à BQ; on a alors

$$QC = AB = OA'$$

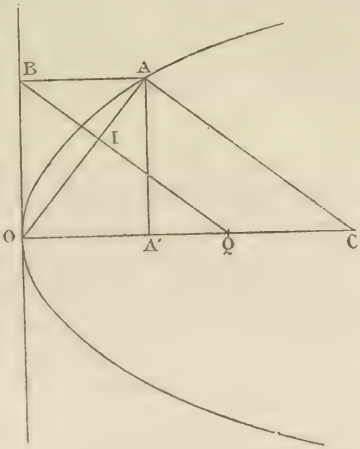
donc

$$QC + A'Q = OA' + A'Q = 2p$$

donc d'après (1), on a

$$\overline{AA'}^2 = OA' \,.\, A'C.$$

Ceci fait voir que le triangle OAC est rectangle en A; donc le triangle OIQ lui étant semblable est rectangle en I; par conséquent le lieu cherché est la circonférence décrite sur OQ comme diamètre.



Nota. — La même question a été résolue par MM. Berdon, Hugon, à Cluny; Aubry, à Charleville; J. Taraite, au lycée Saint-Louis, à Paris; Nobertuo, à Lille; Jung, à Beauvais; de Kerdrel, à Kéruzoret; Gindre, à Pontarlier; Giat, Sauve, à Moulins; Naura, à Vitry-le-François; J. Slabochevitsch, à Saint-Pétersbourg; Poncet, Anstett, à Lyon; Besson, à Nantes; Caronnet, collège Chaptal, à Paris.

QUESTIONS PROPOSÉES

122. — On donne un angle droit yOx, et un point fixe M: autour du point M on fait tourner un angle droit dont les côtés rencontrent Ox en A et Oy en B. — Par les points A et B, on mène des parallèles aux droites Oy, Ox; ces parallèles se coupent en un point I. Démontrer que le lieu du point I est une droite. — 2° La parallèle à Ox menée par B rencontre MA en un point I'. Démontrer que le lieu décrit par I' est une parabole ayant pour sommet le point M et pour axe une parallèle à Ox. (*G. L.*)

123. — On donne trois circonférences C, C', C'', passant par le même point O; on propose de mener par O une trans-

versale qui rencontre les circonférences proposées aux points A, A′, A″, et de telle façon que le rapport $\frac{AA'}{AA''}$ soit égal au rapport de deux lignes données p et q.

(Exam. oraux, Polyt. 1883.)

124. — On donne deux circonférences C et C′, tangentes au point A; soit D la tangente commune en ce point A; soient D′ et D″ les tangentes parallèles à D. Prenons sur D un point mobile M, et menons par M des tangentes à C et C′; ces droites rencontrent D′ en P, et D″ en Q. Les droites qui joignent les points P et Q aux centres respectifs des circonférences C et C′ se coupent en un point I. Démontrer que le lieu de ce point est une droite. *(G. L.)*

125. — On donne une circonférence C, et un point A, extérieur à cette circonférence. De ce point on mène une corde AMN, qui coupe la circonférence aux points M et N, et l'on projette ces points en P et Q sur le diamètre CA. Déterminer l'angle MAC de façon que le trapèze MNQP soit maximum et construire géométriquement cet angle.

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS — 25976-3.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

Pages.

Arithmétique et Algèbre.

Sur un point de la discussion du second degré, par M. *Barrieu*. 78, 103
Théorème d'arithmétique, par M. *G. de Longchamps*. 145

Géométrie.

La Géométrie recurrente, par M. *G. de Longchamps*. 3, 25, 49, 73, 121
Étude sur le cercle de Brocard, par M. *A. Morel*, 10, 33, 62, 97, 169, 193
Quelques théorèmes de géométrie élémentaire, par M. *Catalan* 37, 57
Note sur l'enveloppe d'une droite mobile, par M. *Deville* 67
Note relative à l'ellipse, par M. *de Longchamps*. . . . 193
Propositions relatives au cercle de Brocard. . . . 201
Considérations sur la projection oblique du cercle, par M. *Jullien* 222
Sur des systèmes de points en ligne droite, par M. *Brocard*. 248, 272

Questions diverses.

Exercices divers de mathématiques élémentaires, par M. *E. Lemoine* . 217, 241, 265

Bibliographie.

Traité d'Algèbre élémentaire par M. Collin, compte rendu par M. *Morel*. . . 47
Tables de logarithmes à six décimales, par M. Benoist; compte rendu par M. *de Longchamps*. 261

Pages

Examens et concours.

Concours d'admission à l'École Navale. 135
Concours d'admission à l'École Saint-Cyr . . 147, 282
Concours général de 1883 . 180, 203, 285
Concours de l'École Forestière 180
Concours d'agrégation de l'enseignement spécial . . . 237
Examens oraux pour l'École Navale 70, 233
Examens oraux pour l'École Saint-Cyr . . . 82, 111, 126
Examens oraux pour l'École Forestière. 232

Baccalauréat ès sciences.

Paris 110, 184
Lille 108
Poitiers 108, 186
Bordeaux. 182
Clermont. 185
Toulouse. 186

Mélanges.

Erratum de la question 88, 144
Sur la formation de certains tableaux, par M. *D. André* 139, 163, 187
La chaise de la mariée; le fossé du champ carré; deviner un domino pensé: extraits des Récréations mathématiques de M. *Lucas*. 213
Deux problèmes de géométrie de situation, par M. *Fleury* 257
Rectification pour l'article de M. *Jullien* 264

Pages.

Questions proposées.

Questions 67 à 71. . . . 23
— 72 à 76. . . . 47
— 77 à 80. . . . 72
— 81 à 87. . . . 195
— 88 à 91. . . . 119
— 92 à 95. . . . 143
— 96 à 99. . . . 167
— 100 à 103 . . . 192
— 104 à 107 . . . 216
— 108 à 113 . . . 238
— 114 à 120 . . . 263
— 122 à 125 . . . 287

Solutions de questions d'examen.

Concours pour l'École Saint-Cyr 147
Concours général de 1883, par M. *Hadamard* 203

Questions résolues.

Question 6, par M. *P. Godefroy* . . . 68
— 23. 255
— 32, par M. *Mosnat* 41
— 34, par MM. *Vail* et *Lenoir* . . . 15
— 44, par M. *Berthelot* 87
— 45, par M. *Aubry* 206
— 46, par M. *Mosnat* 88
— 50, par M. *Deville* 89
— 51, par M. *Vazou*. 42
— 52, par M. *Deville* 16
— 53. 91
— 54, par M. *Toussaint* 17
— 55, par M. *Mascart* 43
— 56, par M. *Sagols*. 92
— 56, par Mlle *Lucie J.* 18
— 57, par M. *Jacob* . 45
— 58, par M. *Berthelot* 19
— 59, par M. *Chevalier* 20

Pages.

Question 61, par M. *Bablon* 21
— 62, par M. *Mascart* 93
— 63, par M. *Chollet* 22
— 64, par M. *Aubry*. 207
— 65, par M. *de Kerdrel* 113
— 66, par M. *Aubry*. 210
— 67, par M. *Aubry*. 95
— 68, par M. *Perrin*. 114
— 69, par M. *Aubry*. 117
— 70, par M. *Aubry*. 130
— 71, par M. *Bourgarel* 118
— 73, par M. *de Kerdrel* 132
— 74, par M. *Villademoros* . . . 152
— 75, par M. *Slabochevitsch* . . 133
— 76, par M. *Vialard* 134
— 77, par M. *Voignier* 211
— 78, par M. *Giboudot* 154
— 80, par M. *Naura* 156
— 81, par M. *de Kerdrel* 157
— 82, par M. *Gindre* 158
— 83, par M. *Youssoufian* 159
— 84, par M. *Youssoufian* 176
— 85, par M. *Giboudot* 160
— 86, par M. *Youssoufian* 178
— 86, par M. *Naura*. 226
— 87, par M. *Bablon*. 227
— 89, par M. *Gindre*. 179
— 90, par M. *Bablon*. 286
— 91, par M. *Taratte* 228
— 92, par M. *Naura*. 229
— 93, par M. *de Kerdrel* 229
— 97, par M. *Taratte* 231
— 99, par M. *Giat* . 212

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

ABADIE, *à Mont-de-Marsan*, 119.
ANDRÉ, *professeur à l'école Sainte-Barbe, à Paris*, 24, 139, 163, 187.
AUBRY, *à Charleville*, 95, 117, 119, 130, 133, 134, 135, 153, 157, 206, 207, 210, 226, 229.
BABLON, *à Epinal*, 16, 19, 20, 21, 90, 94, 132, 133, 135, 153, 158, 160, 163, 178, 227, 229.
BARRIEU, *professeur à Mont-de-Marsan*, 78, 103.
BERDON, *au collège de Cluny*, 119, 133, 135, 153, 179, 229.
BERTHELOT, *à Bourges*, 19, 21, 87.
BERTHES (de), *collège Stanislas, à Paris*, 45.
BESSON, *à Nantes*, 89, 133, 160.
BORDIER, *à Blanzac*, 19, 95, 117, 133, 134.
BOUILLON, *à Besançon*, 133, 135.
BOURGAREL, *à Toulon*, 95, 117, 118, 133, 134, 135, 157, 159, 179.
BOURGET (H.), *à Aix*, 89.
BROCARD, *capitaine du génie, à Montpellier*, 10, 33, 62, 97, 168, 169, 195, 201, 248, 272.
CAITUCOLI, *à Draguignan*, 160, 231.
CATALAN, *professeur à l'Université de Liège*, 37, 57.
CHAPRON, *à Vincennes*, 95, 117.
CHEVALIER, *école Sainte-Barbe, à Paris*, 20.
CHOLLET, *à Angers*, 22.
COLLIN, *ancien élève de l'Ecole Polytechnique*, 47.
CORNE, *à Nice*, 94.
CYBARDET, *à Blanzac*, 158.
DESPLANQUES, *à Condé*, 19, 23, 94, 132, 135, 158, 160, 178.
DEVILLE, *brigadier d'artillerie de marine, à Lorient*, 16, 19, 20, 21, 43, 45, 67, 88, 89, 207.
DORET, *à Brest*, 160.
FAUCONNET, *à Besançon*, 133, 135.
FAURE, *à Besançon*, 133.
GAILLARDON, *à Chartres*, 159.
GIAT, *à Moulins*, 20, 21, 117, 119, 133, 135, 155, 158, 159, 160, 163, 179, 212, 229.
GIBOUDOT, *école Sainte-Barbe, à Paris*, 154, 160.
GILLOTEAUX, *lycée Charlemagne, à Paris*, 23.
GINDRE, *à Pontarlier*, 117, 132, 135, 153, 158, 179, 229.
GINO-LORIA, *à Mantoue*, 42.
GODEFROY (P.), *à Lyon*, 68.
GRAND, *à Lons-le-Saulnier*, 133, 135.
GUÉRIN, *à Grandpré*, 134.
GUIGNARD, *à Angoulême*, 94.
GUISEUIL (de), *à Besançon*, 133.
HADAMARD, *lycée Louis-le-Grand, à Paris*, 203.
H. S., *à Toulouse*, 23, 45, 48, 94.
HUGON, *collège de Cluny*, 179, 229.
JACOB, *lieutenant d'artillerie de marine, à Lorient*, 45.
JULIEN SAUVE, *à Moulins*, 19, 20, 21, 45, 46, 117, 119, 133, 135, 153, 179, 229.
JULLIEN, *professeur à l'école Sainte-Barbe, à Paris*, 222.
JUNG, *à Beauvais*, 133, 135.
KERDREL (de), *à Kéruzoret*, 95, 113, 117, 118, 131, 132, 134, 135, 153, 155, 157, 159, 160, 163, 177, 178, 179, 210, 228, 229.
LACHESNAIS, *lycée Saint-Louis, à Paris*, 16, 42, 89, 117, 153.
LAFAY, *à Toulon*, 117, 133, 157.
LEMOINE, *ancien élève de l'Ecole Polytechnique*, 24, 72, 143, 144, 217, 241, 265.
LENOIR, *à Arcueil*, 15, 45.
LÉVY, *professeur au lycée Louis-le-Grand, à Paris*, 192.

LONGCHAMPS (de), *rédacteur*, 3, 23, 25, 48, 49, 73, 96, 120, 121, 143, 145, 192, 193, 238, 239, 240, 264.
LOUVET, *collège Stanislas*, 45.
LUCAS, *professeur au lycée Saint-Louis, à Paris*, 47, 213.
LUCBIELH, *à Pau*, 135, 153.
LUCIE J., *à Liège*, 18.
MAILLARD, *à Beauvais*, 133, 135, 157, 160.
MALCOR, *à Paris*, 132.
MARNY, *à Valenciennes*, 21.
MARSY, *à Lille*, 160.
MARTELLY, *à La Flèche*, 132.
MASCART, *lycée Henri IV, à Paris*, 43, 93.
MÉNAND, *à Cherbourg*, 135.
MILLOT, *à La Flèche*, 119.
MOREL, *rédacteur*, 10, 33, 47, 62, 97, 143, 169, 195.
MOSNAT, *à Thiers*, 17, 18, 20, 41, 88, 90.
MUSY, *à Pontarlier*, 19.
NAURA, *à Vitry-le-François*, 117, 133, 134, 135, 156, 158, 163, 226, 229, 231.
PAYARD, *à Vitry-le-François*, 160.
PERRIN, *lycée Charlemagne, à Paris*, 114, 133, 135.
PLANDÉ, *à Soissons*, 132.
POITRESSE, *à Epinal*, 18.
PRÉMORANT, *à Cherbourg*, 70.
PUIG, *à Marseille*, 17, 19, 21, 88, 207.
RAT, 153.
REALIS, *professeur à Milan*, 120.
REIDT, *professeur à Hamm (Allemagne)*, 72, 168.
RICHELET, *à Pontarlier*, 19.
ROUGELIN, *à Moulins*, 19, 20, 21, 117, 118, 119, 133, 135, 153.
SAGOLS, *à Toulouse*, 92.
SANTOL, *à Toulouse*, 46.
SAVONNET, *à Salins*, 21, 23, 94.
SIMON, *à Salins*, 21, 23, 133, 135.
SLABOCHEVITSCH, *à Saint-Pétersbourg*, 117, 119, 133, 153, 229.
TARATTE, *à Evreux*, 95, 119, 134, 135, 153, 212, 228, 229, 231.
THIÉLOU, *école Lavoisier, à Paris*, 119, 134.
TOUSSAINT, *à Bar-le-Duc*, 17.
TRESSELLE, *à Angers*, 94.
VAIL, *à Arcueil*, 15, 89.
VAZOU, *collège Rollin*, 42.
VIALARD, *à Cluny*, 95, 117, 119, 132, 133, 134, 153.
VILLADEMOROS, *à Paris*, 134, 135, 152, 159, 160.
VOIGNIER, *à Commercy*, 132, 155, 211, 231.
WUTEAU, *à Soissons*, 132.
YOUSSOUFIAN, *à Galata Seraï (Constantinople)*, 159, 176, 178, 231.
YVON, *à Chartres*, 159.
ZULOAGA, *à Paris*, 94.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 25076-3.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

SPÉCIALES

A L'USAGE

DES CANDIDATS AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE, NORMALE ET CENTRALE

PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION

DE MM.

J. BOURGET
Recteur de l'Académie de Clermont.

DE LONGCHAMPS
Professeur de Mathématiques spéciales
au lycée Charlemagne

VAZEILLE
Directeur des études
à l'école préparatoire de Sainte-Barbe

2e SÉRIE

TOME DEUXIÈME

Année 1883.

PARIS

LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE

15, RUE SOUFFLOT, 15

1883

COMITÉ DE RÉDACTION

MM. BOURGET
DE LONGCHAMPS
VAZEILLE
MOREL
BOQUEL
COCHER

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

SPÉCIALES

ÉTUDE

SUR DE NOUVEAUX POINTS REMARQUABLES DU PLAN D'UN TRIANGLE

Par M. Émile **Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

NOTATIONS

A, B, C les sommets du triangle, a, b, c, p ses trois côtés et son demi-périmètre ;

r, r_a, r_b, r_c les rayons des cercles inscrits et ex-inscrits;

A', B', C', les points de contact de BC, AC, AB avec le cercle inscrit;

A'_a, B'_a, C'_a id. avec le cercle ex-inscrit tangent à BC:

A'_b, B', C' id. id. id. AC;

A', B'_c, C' id. id. id. AB;

h_a, h_b, h_c les trois hauteurs;

R, S le rayon du cercle circonscrit au triangle et sa surface.

L'axe des x sera CB et celui des y, CA;

ξ, η seront les coordonnées d'un point Θ du plan ;

La parallèle à CB menée par Θ coupera CA en A_c et BA en A_b

— BC — BC B_c BA B_a

— BA — CA C_a BC C_b

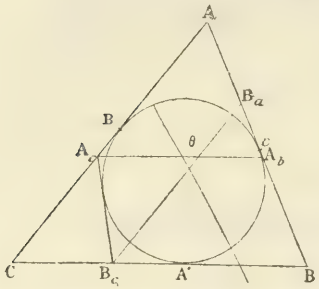
O, o, O_α, O_β, O_γ seront respectivement les centres des cercles circonscrit, inscrit et ex-inscrits au triangle;

G le centre de gravité.

Problème I. — *On sait que les six points* A_c, C_a, B_a, A_b, C_b, B_c, *intersections avec les côtés du triangle des parallèles à ces côtés menées par* Θ, *forment un hexagone circonscriptible à*

une conique; je vais déterminer les points pour lesquels cette conique est un cercle.

Dans ce cas ce cercle sera évidemment l'un des cercles inscrits ou ex-inscrits au triangle; il ne reste qu'à trouver les points Θ correspondants.



Cherchons le point Θ_1, tel que la conique inscrite à l'hexagone soit le cercle inscrit au triangle.

Le point Θ_1 appartient au lieu des points obtenus en menant une tangente quelconque $B_c\ A_c$ au cercle inscrit, puis par B_c une parallèle à AC et par A_c une parallèle à BC. et en prenant l'intersection de ces parallèles on a

$B_cA_c = B_cA' + A_cB' = CA' - x + CB' - y = 2(p-c) - x - y$

mais on a $\overline{A_cB_c}^2 = \overline{CB_c}^2 + \overline{CA_c}^2 - 2CB_cCA_c \cos C.$

L'équation du lieu est donc

$$[2(p-c) - x - y]^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos C.$$

On peut la mettre sous la forme

$$\left(x - \frac{ab}{p}\right)\left(y - \frac{ab}{p}\right) - \frac{(p-a)(p-b)}{p^2} = 0. \quad (1)$$

L'examen de cette équation montre :

1° Que le lieu est une hyperbole;

2° Que le centre de la courbe est le point $\begin{cases} x = \dfrac{ab}{p} \\ y = \dfrac{ab}{p} \end{cases}$ symétrique de C par rapport au centre du cercle inscrit:

3° Que les asymptotes sont les droites $x = \dfrac{ab}{p}$, $y = \dfrac{ab}{p}$ parallèles respectivement à CA et à BC et tangentes au cercle inscrit;

4° Que la bissectrice de l'angle ACB est l'axe transverse de la courbe;

5° Que le lieu passe en A' et en B'.

Le point Θ_1 appartiendra évidemment aussi au lieu analogue construit dans l'angle CBA.

Ce lieu sera une hyperbole qui aura avec la précédente la droite $y = \frac{ab}{p}$ pour asymptote commune et le point A′ pour point commun ; l'autre point commun à ces deux courbes et situé à distance finie sera le point Θ_1 cherché.

On trouve par une transformation facile de coordonnées que cette seconde hyperbole a pour équation

$$\left(y - \frac{ab}{p}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{p-c}{p}\right) + \frac{b(p-a)(p-c)}{p^2} = 0.$$

On peut la mettre sous la forme

$$\left(y - \frac{ab}{p}\right)\left(x - \frac{ab}{p}\right) + \left(y - \frac{ab}{p}\right)\left(\frac{ab}{p} - a + \frac{ac}{p} + \frac{ay}{b}\right) + \frac{ab(p-a)(p-c)}{p^2} = 0. \qquad (2)$$

De (1) et (2) on tire pour coordonnées du point Θ_1

$$\Theta_1 \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{a(2b-p)}{p} = 2\dfrac{ab}{p} - a = \dfrac{a(3b-a-c)}{2p}, \\ y = \dfrac{b(2a-p)}{p} = 2\dfrac{ab}{p} - b = \dfrac{b(3a-b-c)}{2p}. \end{array} \right.$$

Comme $\frac{ab}{2p}$ représente la valeur des coordonnées du centre du cercle inscrit, on conclut de ces valeurs une construction très simple du point Θ_1.

On voit aussi que si un côté égale le quart du périmètre, par exemple $a = \frac{p}{2}$, le point Θ_1 se trouvera en A′.

On a le théorème suivant :

Théorème I. — *Si dans un triangle un côté égale le quart du périmètre et que par le point de contact du cercle inscrit avec ce côté on mène des parallèles aux deux autres côtés, on formera un parallélogramme dont une des diagonales sera tangente au cercle inscrit.*

Des valeurs des coordonnées de Θ_1 on tire par soustraction

$$y - x = a - b,$$

ce qui prouve que le point Θ_1 est sur cette droite de facile construction ; comme il est aussi sur les droites analogues par rapport aux angles B et C, on peut le construire simplement, ce qui fournit le théorème suivant :

Théorème II. — *Soient* a, b, c *les côtés d'un triangle rangés par ordre de grandeur croissante.*

Sur AC *et suivant la direction* AC *je prends* AI $= c - b$;

— CB — — CB — $CI_\gamma = b - a$;

— AB — — AB — $BI_\beta = a - c$.

Les trois droites menées par les points I_α, I_γ, I_β, *respectivement parallèles aux bissectrices des angles* CAB, ACB, ABC, *se coupent au même point.*

On calcule facilement
$$A_cA_b = \frac{2a(p-a)}{p},$$
$$B_cC_b = \frac{a(2a-p)}{p}.$$
$$A_cB_c = \frac{c(p-c)-(a-b)^2}{p}.$$

On voit aussi que pour le point Θ_1 les trois segments CB_c, B_cC_b, C_bB sont respectivement proportionnels à
$$2b-p, \quad 2a-p, \quad 2c-p.$$

(A suivre.)

ÉQUATION

DU SYSTÈME DES TANGENTES MENÉES A UNE CONIQUE PAR UN POINT DONNÉ

Par M. **Poujade**, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Lyon.

$f(x, y, z) = 0$ étant l'équation de la conique, (α, β, γ) le point donné, soit (x', y', z') le point de contact d'une tangente et (x, y, z) un point de cette droite ; désignons par X, Y, Z les demi-dérivées partielles de $f(x, y, z)$, puis par X', Y', Z' et X_1, Y_1, Z_1, ce qu'elles deviennent respectivement quand on y introduit les coordonnées (x', y', z') et (α, β, γ).

On a
$$\begin{cases} Xx' + Yy' + Zz' = 0, \\ X_1x' + Y_1y' + Z_1z' = 0, \\ X'x' + Y'y' + Z'z' = 0; \end{cases} \qquad (1)$$
donc, x' y' z' n'étant pas tous nuls, on a la condition
$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X' & Y' & Z' \end{vmatrix} = 0.$$

Il en résulte que les équations
$$\begin{cases} \lambda X + \mu X_1 + \nu X' = 0, \\ \lambda Y + \mu Y_1 + \nu Y' = 0, \\ \lambda Z + \mu Z_1 + \nu Z' = 0, \end{cases} \qquad (2)$$
sont satisfaites pour des valeurs non toutes nulles de λ, μ, ν. D'ailleurs elles n'admettent pas $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$, si le discriminant de $f(x, y, z)$ est différent de zéro, puisque ces hypothèses les réduisent à $X' = 0$, $Y' = 0$, $Z' = 0$, équations linéaires qui n'auraient pour solution que les valeurs nulles de x', y', z', leur déterminant n'étant pas nul.

Ainsi λ et μ ne sont pas nuls à la fois. Multiplions par x, y, z respectivement les équations (2) et ajoutons membre à membre; puis recommençons la même addition, après avoir multiplié par α, β, γ, il vient, en vertu d'identités connues:
$$\lambda f(x, y, z) + \mu \left[x \frac{1}{2} f'_\alpha + y \frac{1}{2} f'_\beta + z \frac{1}{2} f'_\gamma \right] = 0;$$
$$\lambda \left[x \frac{1}{2} f'_\alpha + y \frac{1}{2} f'_\beta + z \frac{1}{2} f'_\gamma \right] + \mu f(\alpha, \beta, \gamma) = 0;$$
λ et μ n'étant pas nuls à la fois, il faut qu'on ait
$$f(x, y, z) f(\alpha, \beta, \gamma) - \left[x \frac{1}{2} f'_\alpha + y \frac{1}{2} f'_\beta + z \frac{1}{2} f'_\gamma \right]^2 = 0.$$

Réciproquement quand un point (x, y, z) satisfait à cette équation, le point (α, β, γ) est sur l'une des tangentes menées de (x, y, z) à la conique. Elle représente donc le système des deux tangentes menées de (α, β, γ).

Remarque. — Il est aisé d'appliquer la méthode à la recherche de l'équation du cône circonscrit à une quadrique et ayant un sommet donné. C'est un exercice que nous proposons aux jeunes lecteurs du Journal.

QUESTION 5

Solution par M. ALEXANDRE, élève de mathématiques spéciales au Lycée d'Angers.

Appliquer le théorème de Rolle à l'équation

$$nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} \ldots - x - 1 = 0$$

et montrer que cette équation, en dehors de la racine évidente $x = 1$, *n'a aucune racine réelle si* n *est impair et une seule racine négative si* n *est pair.* (G. L.)

En faisant passer dans le second membre tous les termes à partir du second, on a

$$nx^n = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 \qquad (1)$$

ou

$$nx^n = \frac{x^n - 1}{x - 1}. \qquad (2)$$

En multipliant par $x - 1$, ce qui introduit la racine $x = 1$ qui sera alors double, on a

$$nx^{n+1} - (n + 1)\, x^n + 1 = 0. \qquad (3)$$

La dérivée

$$n(n + 1)x^n - n(n + 1)x^{n-1} = 0.$$

a pour racines $x = 1$ et $x = 0$, cette dernière d'ordre de multiplicité $(n - 1)$. L'équation proposée qui n'a pas d'autre racine positive que $x = 1$, aura au plus une racine négative. car si elle en avait deux, la dérivée aurait aussi une racine négative. A la substitution de $-\infty$ et de 0 dans (3) ne donnent des signes contraires que dans le cas où n est pair. Donc dans ce cas seulement (1) a une racine négative en plus de de la racine $x = 1$.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Lachesnais, au lycée Saint-Louis, P. Godefroy, à Lyon ; Mettetal, à Besançon.

QUESTION 7

Solution par M. GRIFFON, commis des bureaux de l'intendance militaire du 16e corps, Montpellier.

Trouver sans appliquer la règle de L'Hopital, la vraie valeur de l'expression

$$(1)\quad y = \frac{\frac{n(n+1)}{2}x^n - nx^{n-1} - (n-1)x^{n-2} \ldots - 2x - 1}{x-1}$$

pour $x = 1$. (G. L.)

Pour $x = 1$. y prend la forme $\frac{0}{0}$. Or le numérateur peut s'écrire

$$\left[n + (n-1) + \ldots + 1\right] x^{n-1}(-x\ 1)$$

$$+ \left[(n-1) + (n-2) + \ldots + 1\right] x^{n-2}(x-1)$$

$$+ (3 + 2 + 1)x^2(x-1) + (2+1)x(x-1) + 1(x-1).$$

On y découvre le facteur $x - 1$: donc la valeur (1) peut s'écrire

$$y = \frac{n(n+1)}{2}x^{n-1} + \frac{(n-1).x}{2}x^{n-2} + \frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

$$x^{n-3} + \ldots + \frac{2.3}{2}x + \frac{1.2}{2}$$

et si on y fait $x = 1$

$$y = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} + \ldots + \frac{1.2}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. P. Godefroy, à Lyon; Mosnat, à Thiers ; Alexandre, à Angers ; Harang, école Saint-Sigisbert, à Nancy.

QUESTION 34

Solution par M. G. Forest, élève en Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne.

On considère deux points fixes O *et* O′ *et une droite* Δ *perpendiculaire à* OO′ *au point* A *; soit* M *un point quelconque de* Δ *; on mène* MO *et* MO′ *; puis à la droite* MO′ *on élève au point* O′ *une perpendiculaire qui rencontre* OM *au point* M′ *; on pose alors* M′O′ = x, MO′ = y, *et l'on considère un point* I *qui a pour coordonnées* x *et* y, *par rapport à un angle droit donné* yOx. *Trouver le lieu décrit par ce point* I *quand* M *se meut sur* Δ, *et discuter les différentes formes du lieu quand on donne à* A *toutes les positions possibles sur* OO′. *Démontrer que la courbe est unicursale.* (G. L.)

1. — Posons-nous un problème plus général. Supposons que le point M décrive une certaine courbe $f(y,\omega) = 0$, donnée en coordonnées polaires et rapportée à l'origine O′. Soient a la distance OO′, x et y les deux distances O′M′ et O′M.

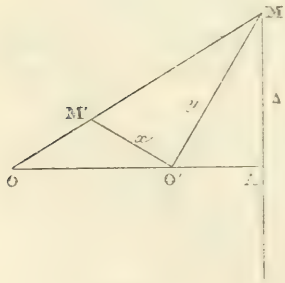


Fig. 1.

Menons par le point M′ une parallèle à O′M, et par M une perpendiculaire à O′M.

Les deux triangles semblables OM′K′ et OMO′ donnent

$$\frac{OM'}{OM} = \frac{a - \dfrac{x}{\sin\omega}}{a}.$$

Les deux triangles semblables OMK et OM′O′ donnent

$$\frac{OM'}{OM} = \frac{a}{a + \dfrac{y}{\cos\omega}}.$$

Egalant les seconds membres des deux égalités

$$\left(\frac{a - \dfrac{x}{\sin\omega}}{a}\right) = \left(\frac{a}{a + \dfrac{y}{\cos\omega}}\right)$$

ou $$a^2 - \frac{ax}{\sin\omega} - \frac{xy}{\sin\omega\cos\omega} + \frac{ay}{\cos\omega} = a^2$$

que l'on peut écrire

$$\frac{\sin\omega}{x} - \frac{\cos\omega}{y} = \frac{1}{a}, \qquad [1]$$

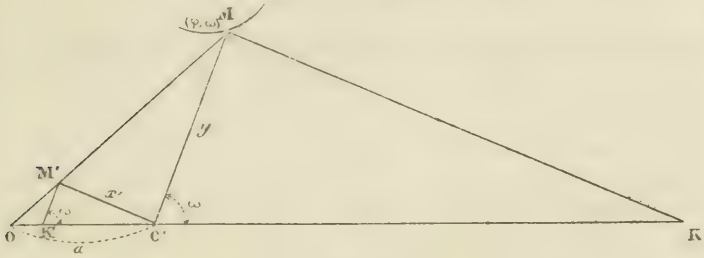


Fig. 2.

cette formule donne une relation entre x, y, ω. Par conséquent, si on suppose que le point M décrive un certain lieu géométrique $f(y, \omega) = 0$ [2], on n'aura pour obtenir une relation entre x et y qu'à éliminer l'angle ω entre les deux équations [1] et [2], et la relation $f(x,y) = 0$ représentera l'équation du lieu décrit par le point dont les coordonnées sont x et y.

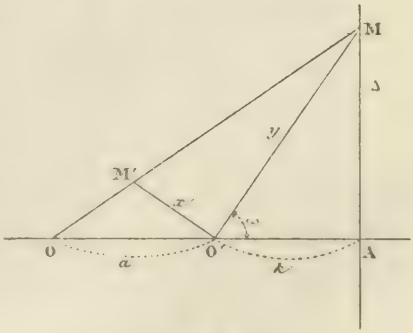


Fig. 3.

2.— Dans le cas du problème que nous avons à résoudre, le lieu du point M est une droite perpendiculaire au point A à la droite OO'.

Soit k la distance O'A, l'équation $f(y, \omega) = 0$ est ici

$$k = y\cos\omega \quad [2].$$

Il faut donc éliminer l'angle ω entre les deux équations [1] et [2']. On a d'abord $\cos\omega = \frac{k}{y}$. [3]

Transportant cette valeur dans l'équation [1], celle-ci devient résoluble par rapport à $\sin\omega$:

$$\sin\omega = x\left(\frac{1}{a} + \frac{k}{y^2}\right). \qquad [4]$$

La relation demandée est donc

$$\frac{k^2}{y^2} + x^2\left(\frac{1}{a} + \frac{k}{y^2}\right)^2 = 1.$$

3. — Discussion. — Cette équation est résoluble par rapport à x^2, et l'on a $x^2 = \frac{a^2y^2(y^2 - k^2)}{(y^2 + ak)^2}$.

C'est une courbe du 6me degré, symétrique par rapport à l'origine et par rapport aux deux axes. L'origine est un point double isolé. La courbe est tout entière extérieure aux parallèles $y = +k$, $y = -k$.

On peut supposer que le point A se meut de la droite OO' vers la gauche, et nous allons montrer qu'il existe cinq formes différentes pour la courbe.

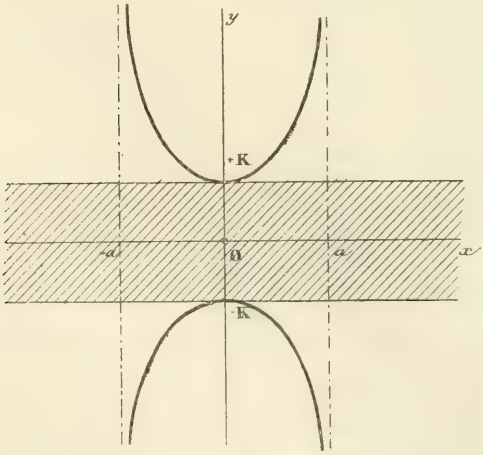


Fig. 4.

1° Supposons le point A à droite de O'; k est compté positivement.

L'équation révèle qu'il n'y a que deux asymptotes parallèles à l'axe des y, données par le coefficient de y^4, $(x^2 - a^2)$. La courbe ne rencontre pas ces asymptotes lorsque k est positif, car on trouve pour les ordonnées des points communs

$y = \pm \sqrt{-\frac{a^2k^2}{k(a+k)}}$, quantités imaginaires si k est positif. Les points $(-k)$ et $(+k)$ sur l'axe des y font partie de la courbe qui est tangente en ces points aux deux horizontales $y = k$, $y = -k$ (fig. 4).

2° Le point A est en O'. Alors $k = 0$. L'équation devient

$$x^2 = \frac{a^2y^4}{y^4} \text{ ou } x = \pm a.$$

Le lieu se compose des deux verticales $x = +a$, $x = -a$.

3° Le point A est situé entre O et O', par conséquent, k est négatif. Les deux asymptotes $x = \pm a$ sont conservées; on a deux autres asymptotes parallèles à l'axe des x, données par le coefficient de x^2, $y = \pm\sqrt{-ak}$. Ces asymptotes horizontales sont doubles. La figure 2 indique la construction des valeurs OA et OA'.

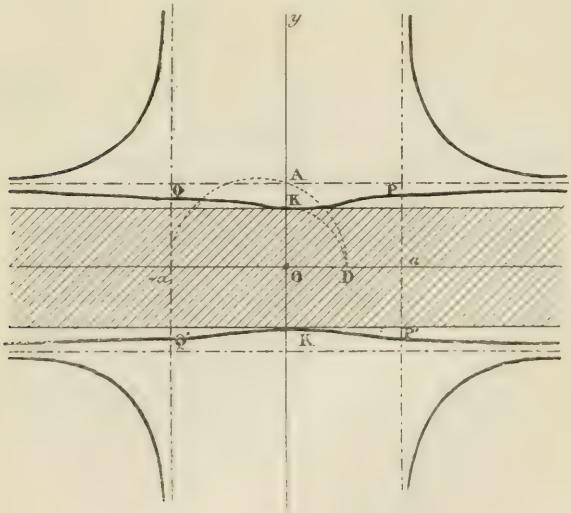


Fig. 5.

La courbe rencontre les asymptotes $x = \pm a$ en quatre points P, P', Q, Q' donnés par l'équation $y = \frac{\pm a\sqrt{-k}}{\sqrt{2a+k}}$.

La figure 5 représente la courbe dans ce cas.

Le point A peut occuper la position particulière du milieu de OO'. Alors $k = -\frac{a}{2}$, l'équation se simplifie:

$$x^2 = \frac{a^2y^2(4y^2 - a^2)}{(2y^2 - a^2)^2}.$$

Les asymptotes doubles A et A' ont dans ce cas pour équation $y = \pm\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Les droites de séparation en régions deviennent

$$y = \pm\frac{a}{2}.$$

Les ordonnées des points P, P', Q, Q' sont $y = \pm\frac{a\sqrt{3}}{3}$, va-

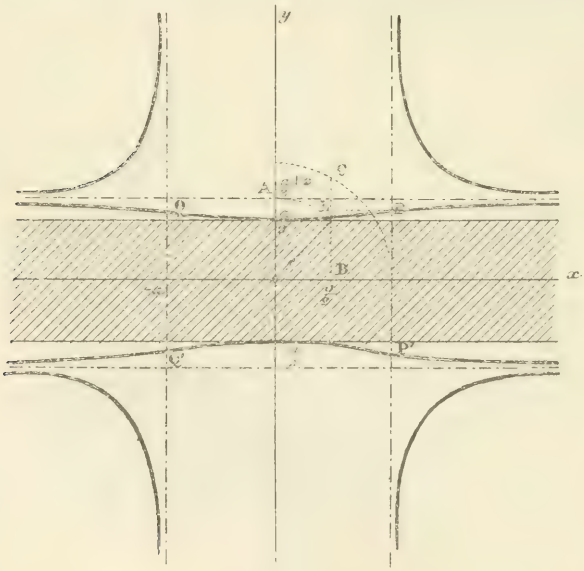


Fig. 6.

leur que l'on peut construire ainsi que l'indique la figure 6 en prenant $LD = \frac{2}{3}\,CD$.

4° Le point A est arrivé en O. Alors $k = -a$. L'équation de la courbe est $x^2 = \frac{a^2y^2(y^2 - a^2)}{(y^2 - a^2)^2}$.

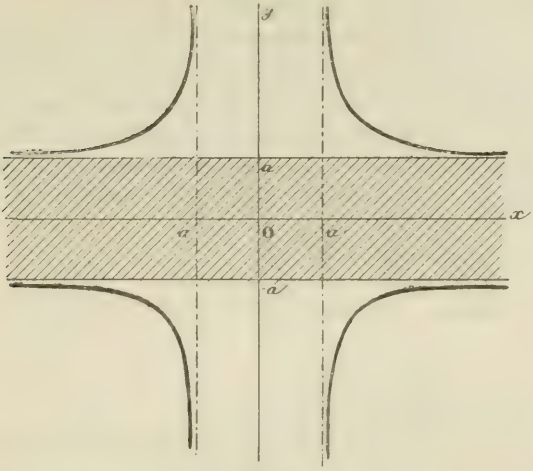


Fig. 7.

On aperçoit le facteur $y^2 - a^2$ qui représente les deux horizontales $y = \pm a$. Les branches de courbe PkQ, P'($-k$)Q

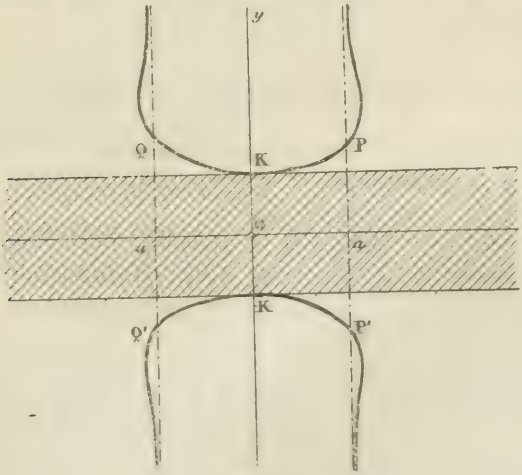


Fig. 8.

se confondent avec ces droites qui font partie du lieu. Les quatre autres branches sont conservées. La courbe est dans ce cas symétrique par rapport aux bissectrices des axes. La figure 7 en indique la forme.

5° H est à gauche de O. Alors $-a > -k < 0$.

Les asymptotes doubles horizontales $y = \pm\sqrt{-ak}$ sont comprises dans la région où il n'y a pas de points de la courbe; elles sont donc imaginaires. Les deux autres asymtotes existent toujours. La courbe rencontre ces deux asymptotes en quatre points P, P', Q, Q', donnés par l'équation $y = \dfrac{\pm a\sqrt{-K}}{\sqrt{2a+K}}$ *(fig. 8)*.

On peut encore considérer le cas où le point H est à l'infini. Alors K est infini. On a $x^2 = \dfrac{a^2y^2}{a^2}$ ou $x^2 \times y^2 = 0$. On trouve le point double isolé à l'origine.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE FERMAT

A MERSENNE [1]

. . . . . .

Je reprends le style géométrique après vous avoir parlé d'affaires.

Premièrement, je vous renvoie le sentiment de M. Descartes sur la géostatique et vous conjure de me faire part de tout ce que vous avez de lui.

Après cela, je satisferai à la question de la tangente du galand [2] parallèle à l'axe, c'est-à-dire qui fasse un angle de 45 degrés avec la droite donnée de position [3].

---

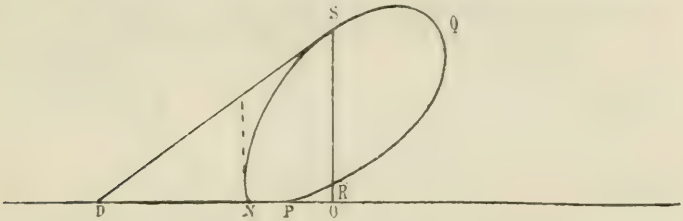
[1] Cette lettre si curieuse et si précieuse pour l'histoire des sciences mathématiques nous a été communiquée par M. Ed. Lucas. Elle lui a été confiée, avec d'autres manuscrits inédits, par le prince Boncompagni, qui l'a autorisé à les publier. La science sera reconnaissante au prince Boncompagni du dévouement constant et désintéressé qu'il ne cesse de lui témoigner. *(G. L.)*

[2] Fermat appelle ainsi la courbe que nous appelons le *folium de Descartes*.

[3] L'axe des x.

Pour satisfaire à cette question, qui semble d'abord malaisée, et qui l'a paru à M. de Roberval (car je n'ai pas encore vu la solution de M. Descartes), je me suis servi de la méthode de mon *Appendix ad Locos* (1), de laquelle l'usage en plusieurs rencontres est miraculeux pour éviter les asymétries (2), et ces longueurs d'équation qui semblent ne devoir jamais prendre fin.

Soit donné le galand NSQR, la droite donnée de position DNOP, et la ligne z donnée de grandeur. La propriété du



galand est que, quelque point que vous preniez, comme S ou R, le solide sous *z in NO in OS* est égal aux deux cubes NO et OS, ou bien le solide sous *z in ON in OR* est égal aux deux cubes NO et OR. Il faut trouver la tangente SD, par exemple, du côté d'en haut, qui fasse l'angle SDO égal à la moitié d'un droit. Soit fait.

Par ma méthode des tangentes, si NO est appelé d, et OS, b, la ligne OS sera égale à

$$\frac{b \text{ cub. bis} - d \text{ cub.}}{z \text{ in } b - d. \text{ q ter}}.$$ (3)

et si la tangente était du côté d'en bas, la ligne OD serait

$$\frac{d \text{ cub.} - b \text{ cub. bis}}{d \text{ q. ter} - z \text{ in } b}.$$

Mais nous n'avons besoin que de la première équation, puisque nous ne travaillons qu'au premier cas. Supposons que NO, inconnu, s'appelle a, et que OS s'appelle e, nous

(1) *Varia opera math.*, p. 9.

(2) Irrationnelles ou radicaux.

(3) Cette expression, avec nos notations actuelles, s'écrirait $\frac{2b^3 - d^3}{zb - 3d^2}$.

aurons pour la ligne OD :

$$\frac{e \text{ cub. bis} - a \text{ cub}}{z \text{ in } e - a \text{ q. ter}}.$$

Or, puisque l'angle D est demi-droit, et que l'angle O est droit, les lignes OD et OS seront égales; il faudra donc que

$$\frac{e \text{ cub. bis} - a \text{ cub.}}{z \text{ in } e - a \text{ q. ter}} \text{ soit égal à } e,$$

et, par conséquent,

e cub. bis — a cub. sera égal à z in e q. — a q. in e ter.

Or, par la propriété de la ligne

a cub. est égal à z in a in e — e cub.

Nous aurons donc

e cub. — z in a in e égal à z in e q. — a q. in e ter [1].

Divisons le tout par e; nous aurons

e q. — z in a égal à z in e — a q. ter

et enfin

e q. — in z égal à z in a — a q. ter;

et partant nous avons un lieu elliptique, et le point S *est ad ellipsim positione datam, sed est etiam ad curvam positione datam, ergo datur* par l'intersection de ces deux lieux, et par ma méthode topique.

On fera avec la même facilité la résolution du second cas. Mais, pour rendre la proposition générale, vous pourrez par la même méthode faire l'angle D égal à tel angle que vous voudrez, ou bien, ce qui est la même chose, faire que la ligne DO soit à la ligne OS en proportion donnée. En voilà, à mon avis, assez pour vous témoigner que je ne tiens pas caché ce que je fais.

Pour la tangente de la roulette, bien loin d'en faire un mystère, je veux vous faire comprendre qu'il n'y a point de question de cette matière qui puisse m'échapper. Vous saurez donc que cette méthode dont je me sers pour les tangentes des lignes courbes, lorsque leurs appliquées [2] ou les portions de leurs diamètres [3] ont relation à des lignes droites,

---

[1] Il faudrait, au premier terme du premier membre e cub. ter; de même, dans les deux égalités suivantes.

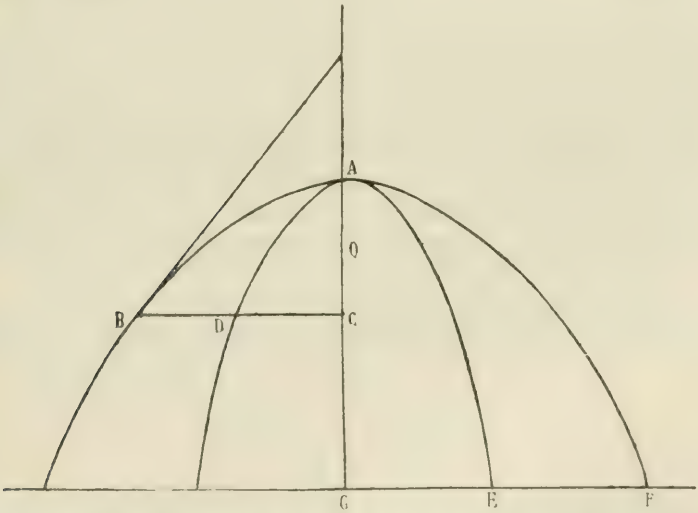
[2] Ordonnées.

[3] Abcisses.

me sert aussi, avec un peu de changement pris de la nature de la chose, à trouver les tangentes des courbes dont les appliquées ou les portions de leurs diamètres ont relation à d'autres courbes. Je vous ai déjà fait voir l'exemple de la roulette.....

En voici un autre exemple.

Soit la parabole EDAG, de laquelle l'axe AG et le sommet A. Soit une autre courbe ABF de mêmes axe et sommet, et que BC, appliquée, soit égale à la portion [1] de parabole DA, et l'appliquée FG égale à la portion de parabole EA, etc., à l'infini. Il faut mener au point B de cette nouvelle courbe une tangente.



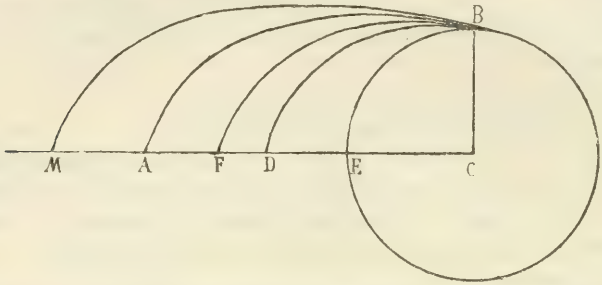
Soit tirée l'appliquée BDC. Soit O le *focus* de la parabole ; faisons comme OA + AC à AC, ainsi du quarré BC au quarré CN; la ligne BN touchera la courbe FBA.

Voilà deux exemples aisés, lesquels vous pourrez proposer à soudre, si vous voulez, avant que d'en faire voir les solutions. Mais pour le suivant je le propose à M. de Roberval, et si j'osais encore, à M. Descartes.

---

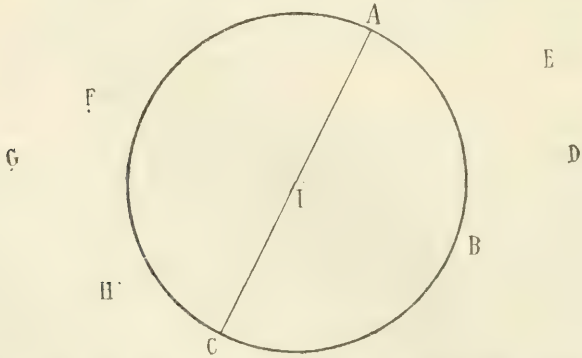
[1] Segment.

Soient autant de courbes qu'on voudra de même sommet B, comme BE, BD, BF. BA, données par position, et soit



imaginée une autre courbe de même sommet comme MB, en sorte que les appliquées de cette dernière, comme MC, soient moyennes proportionnelles entre la somme des portions des autres courbes AB, BF, BD, BE, et la somme des appliquées AC, FC, DC, EC ; il faut trouver une tangente à un point donné de cette dernière courbe. Si vous voulez que les quatre courbes de mon exemple soient un cercle, une parabole, une hyperbole et une ellipse, j'y consens, à la charge que vous croyiez que je donnerai la solution en tout nombre et en toute espèce de courbes données, et ce, sans aucune asymétrie, ce qui semble merveilleux.

Avant de quitter la Géométrie, je vous donne encore une



spéculation, qui est excellente et qui allonge infiniment l'affinité au lieu plan : *Si a quotcunque punctis*, etc., laquelle

j'ai trouvé en cherchant les lieux *ad superficiem*. C'est que, après avoir trouvé un cercle qui satisfasse à la question d'Apollonius *in plano*, comme par exemple : soient les points donnés D, E, F, G, H et le cercle trouvé ABC, en sorte que quel point vous preniez en sa périphérie comme A, les carrés DA, EA, FA, GA, HA soient égaux à un espace donné ; je dis que, si autour du point I comme centre, vous décrivez une sphère de laquelle le cercle ABC soit un des grands, que, quel point vous prendrez en la superficie de la sphère, il satisfera à la question du lieu.

J'ai trouvé ensuite beaucoup de choses merveilleuses sur le sujet des lieux *ad superficiem*, mais je ne puis vous dire tout à la fois.

Le quadrilatère de M. de Roberval que je n'ai pas cru si pressé que la tangente du galand sera différé au premier voyage.

Il faut que je vous dise encore qu'on peut mener la tangente de 45°, au galand, par une voie qui semble plus géométrique ; car là où ma précédente solution a employé la ligne courbe du galand pour trouver le point cherché, par l'intersection du galand et d'une ellipse, cette autre voie n'emploie que les sections coniques.

Supposons que z le côté droit [1] du galand est inconnu, et que AD est une ligne donnée nommée b, que DB est inconnue nommée a.

Donc le côté droit sera

$$\frac{a \text{ cub.} + b \text{ cub.}}{b \text{ in } a}.$$

Par ma méthode des tangentes, la ligne DN qui concourt avec la tangente sera

$$\frac{b \text{ in } a \text{ cub. bis} - b \text{ qq.}}{a \text{ cub} - b \text{ cub. bis}},$$

laquelle il faut faire égale à a.

Nous aurons donc

a qq. — b cub. in a bis égal à b in a cub. bis — b qq.,

---

[1] Côté droit, *latus rectum*, paramètre.

et enfin

b in a cub. bis $+$ b cub. in a bis $-$ a qq. égal à b qq.,

laquelle équation (pour trouver la valeur de a) se peut résoudre ou par ma méthode topique ou par telle autre qu'on voudra.

Or a étant connu, le côté droit z sera connu. Et si le galand donné est différent de celui-ci, il faudra faire : comme le côté droit de celui-ci à la ligne AD ou b donnée, ainsi le côté droit du galand donné à une autre ligne qui déterminera un point semblable au point D et la question est faite. Si j'ai manqué ici la supputation, vous la corrigerez, car je n'ai pas seulement le loisir de relire ma lettre.

Pour Galilée j'avais commencé de l'examiner par le menu, et si j'ai du loisir assez je continuerai. Lorsqu'il parle de la proportion de la vitesse en la descente qui se fait en un même ou divers milieux par des corps différents, vous trouvez que son expérience qui précède contredit sa règle qui suit.

Je vous entretiendrai une autre fois plus à loisir, bien que l'oisiveté de la campagne vous ait présentement fait voir une lettre plus longue que je n'avais dessein. Je suis, mon révérend Père, votre, etc..

22 octobre 1638.

FERMAT.

QUESTIONS PROPOSÉES

44. — On considère des coniques inscrites dans un carré dont les diagonales sont prises comme axes de coordonnées. D'un point P, dont les coordonnées sont $(\alpha\beta)$ on abaisse des normales sur ces coniques. Trouver le lieu décrit par les pieds de ces normales. En désignant par $2a$ la longueur de la diagonale du carré proposé, on fera voir que ce lieu est une quartique ayant un point double en P, et que l'équation de cette courbe est

$$(\beta x + \alpha y - 2xy)(\alpha x + \beta y - x^2 - y^2) = a^2(\alpha - x)(\beta - y)$$

ou encore

$$(x^2 + y^2 - a^2)(\alpha - x)(\beta - y) + xy\{(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2\} = 0$$

On construira cette courbe, et on distinguera les différentes formes, suivant que le point P est situé dans l'une ou l'autre des régions du plan définies par les quatre côtés du carré supposés prolongés indéfiniment.

Enfin, on distinguera sur le lieu les points qui proviennent des ellipses de ceux qui proviennent des hyperboles du faisceau considéré. *(G. L.)*

45. — On considère un point m dont les coordonnées sont x et y ; à ce point on fait correspondre un point M dont les coordonnées X et Y sont liées à x et y par les formules

$$x = X; \; yY = a^2.$$

On propose d'étudier cette transformation ; on établira en particulier les points suivants :

1. A une courbe f, d'ordre p, correspond également une courbe F, d'ordre $2p$; mais si f possède à l'infini, dans la direction Oy, un point de multiplicité k, l'ordre de F n'est plus que $2p - k$.

2. Les tangentes aux courbes f et F aux points correspondants m et M rencontrent Ox en deux points équidistants du pied de l'ordonnée.

3. Appliquer cette remarque à l'hyperbole considérée comme transformée de la droite par ce procédé et retrouver ainsi une construction bien connue.

4. Étudier les cubiques de la troisième classe,

$$x^2y = m^3,$$

en les considérant comme des transformées de la parabole ; montrer en particulier que, si l'on appelle P le pied de l'ordonnée en un point M de cette cubique, et T le point de rencontre de la tangente en M avec Ox, on a

$$OT = \frac{3}{2} OP .$$

5. Déduire de cette transformation et de la théorie des asymptotes qu'une courbe algébrique ne peut pas avoir de point d'arrêt. *(G. L.)*

46. — Lorsque les trois premiers coefficients d'une équa-

tion de degré m sont $1, p, \frac{p(p+1)}{2}$,

l'équation a des racines imaginaires. *(G. L.)*

47. — Lorsque cinq coefficients consécutifs d'une équation sont $A, B, C, 2B - A, 2C - B$,

l'équation a des racines imaginaires. *(G. L.)*

48. — Lorsque quatre coefficients consécutifs d'une équation sont $+3A, -A, -A, +3A$.

l'équation a des racines imaginaires. *(G. L.)*

49. — On donne un cercle Δ, et un diamètre OC de ce cercle ; d'un point A, pris sur la circonférence, on abaisse sur OC la perpendiculaire AB, et l'on considère le triangle OAB ;

1° On demande le lieu des centres des cercles tangents aux droites OA, AB, OB ; 2° ce lieu se compose de deux quartiques unicursales ; considérant l'une d'entre elles, on demande de distinguer sur cette courbe, formée de deux boucles égales, les points qui appartiennent au cercle inscrit et aux cercles ex-inscrits du triangle AOB ; 3° déterminer le cercle qui ayant pour centre le point O, est bitangent à la courbe ; 4° trouver l'aire totale de la courbe.

(G. L.)

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 286-3.

NOTE SUR LE THÉORÈME DE DESCARTES

Par M. **Walecki**, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Fontanes.

Soit $P = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a$ un polynôme réel. Je suppose que la relation linéaire

$$\alpha a_p + \beta a_{p-1} + \gamma a_{p-2} + \ldots + \delta a_{p-r} = 0$$

soit vérifiée pour deux valeurs consécutives de p; p et $p-1$. Si l'équation $Q = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots + \delta x^r = 0$ a toutes ses racines réelles, l'équation $P = 0$ a deux racines imaginaires au moins.

En effet, en multipliant P par Q, on obtient un polynôme présentant une lacune de deux termes, les coefficients de x^p et x^{p-1} étant nuls. Le produit PQ a deux racines imaginaires, qui existent donc dans P, puisque φ par hypothèse a ses racines réelles.

Par exemple : 1° si trois termes consécutifs de P sont en progression géométrique de raison r, la relation est à deux termes

$$a_p - r a_{p-1} = 0;$$

le polynôme Q est $1 - rx$. C'est le théorème de M. Hermite.

2° Si quatre termes sont en progression arithmétique dans P, la relation linéaire est

$$a_p - 2a_{p-1} + a_{p-2} = 0;$$

le polynôme Q est $1 - 2x + x^2$, il a ses racines réelles; P en a deux imaginaires.

3° Si quatre coefficients consécutifs sont pris dans la suite de Lamé 1, 2, 3, 5,... la relation linéaire est

$$a_p + a_{p-1} - a_{p-2} = 0;$$

le polynôme Q est $1 + x - x^2$; ses racines sont réelles, l'équation P a deux racines imaginaires.

4° Si quatre termes sont s_p, s_{p+1}, s_{p+2}, s_{p+3} somme des puissances semblables des racines réelles d'une équation du second degré, la relation linéaire a pour coefficients les coefficients de cette équation : P a deux racines imaginaires, etc.

On peut généraliser pour le cas où la relation linéaire a

lieu pour n valeurs de p; la lacune est de n termes et les racines imaginaires du produit signalées par la lacune appartiennent à P ou à Q. Si elles ne peuvent être introduites par le facteur Q, c'est que P en admettait.

ÉTUDE

SUR DE NOUVEAUX POINTS REMARQUABLES DU PLAN D'UN TRIANGLE

Par M. Émile **Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir p. 3).

Soient J_c, J_b, J_a les symétriques de C, de B et de A par rapport au centre du cercle inscrit; J_c et J_b sont les centres des hyperboles (1) et (2) qui passent par A′ et ont pour asymptote commune la droite J_cJ_b tangente au cercle inscrit et parallèle à BC et pour autre asymptote respectivement J_cJ_a et J_bJ_a.

Si l'on joint J_aA' coupant J_bJ_c en T et que l'on prenne dans le sens TA′, $T\Theta_1 = J_aA'$, le point Θ_1, construit ainsi très simplement, sera évidemment le point cherché commun aux deux hyperboles d'après le théorème connu : les segments interceptés sur une droite entre l'hyperbole et ses asymptotes sont égaux.

En construisant par rapport aux autres côtés les droites analogues à J^aA', on a le théorème suivant.

Théorème III. — *Si dans un triangle* ABC *on joint le point symétrique de chaque sommet par rapport au centre du cercle inscrit au point de contact du cercle inscrit sur le côté opposé à ce sommet, on a trois droites qui se coupent en un même point; si par ce point on mène des parallèles aux trois côtés, ces parallèles coupent les côtés en six points qui forment un hexagone circonscrit au cercle inscrit dans le triangle.*

En appelant l_1, l_2, l_3 les longueurs de ces parallèles comprises entre les côtés on peut démontrer que :

L'on peut toujours former un triangle avec les longueurs

l_1, l_2, l_3, et aussi établir les formules

$$a = p - \sqrt{p^2 - 2l_1p}$$

$$p = \frac{1}{4}\frac{(\sqrt{l_1}+\sqrt{l_2}+\sqrt{l_3})^2(\sqrt{l_2}+\sqrt{l_3}-\sqrt{l_1})^2(\sqrt{l_1}+\sqrt{l_3}-\sqrt{l_2})^3(\sqrt{l_1}+\sqrt{l_2}-\sqrt{l_1})^2}{(l_2+l_3-l_1)(l_1+l_3-l_2)(l_1+l_2-l_3)}$$

ce qui donne la solution de ce problème: *Construire un triangle connaissant les trois longueurs* l_1, l_2, l_3.

Les cercles ex-inscrits donnent lieu à des constructions, à des formules, à des théorèmes et à des problèmes tout à fait analogues. On obtient ainsi les points $\Theta_a, \Theta_b, \Theta_c$, analogues à Θ_1.

En calculant leurs coordonnées on trouve

$$\Theta_a \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{a(p+b-c)}{p-a} \\ y = -\dfrac{b(a+p)}{p-a} \end{array} \right. \qquad \Theta_b \left| \begin{array}{l} x = -\dfrac{a(p+b)}{p-b} \\ y = \dfrac{b(p+a-c)}{p-b} \end{array} \right.$$

$$\Theta_c \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{a(p+b-a)}{p-c} \\ y = \dfrac{b(p+a-b)}{p-c} \end{array} \right.$$

on

$$\Theta_1\Theta_a = \frac{4a}{\cos\frac{A}{2}}$$

$$\Theta_b\Theta_c = \frac{4c}{\sin\frac{C}{2}}$$

$$\Theta_1\Theta_a \times \Theta_1\Theta_b \times \Theta_1\Theta_c = 2^{10}R^2r.$$

$$\Theta_b\Theta_c \times \Theta_a\Theta_c \times \Theta_a\Theta_b = 2^{10}R^2p$$

$$\Theta_1\Theta_a \times \Theta_b\Theta_c = 2^8aR$$

La surface de $\Theta_a\Theta_b\Theta_c = 2^5p.R$

Si l'on ajoute les deux égalités qui donnent les coordonnées de Θ_a, on a $x + y = -(a+b)$: le point Θ_a est donc sur cette droite.

Si l'on retranche les deux égalités qui donnent les coordonnées de Θ_c on trouve $y - x = a - b$.

Le point Θ_c est donc sur cette droite qui contient déja le point Θ_1.

Enfin si l'on cherche le coefficient angulaire de $\Theta_a\Theta_b$, on

trouve — 1. Ce qui prouve que cette droite est parallèle à la bissectrice du supplément de l'angle BCA.

Ces dernières remarques permettent d'énoncer le théorème suivant.

Théorème IV. — *Soit un triangle* ABC; *sur* CB *et dans le sens* BC *je prends* $CC_\alpha = a + b$; *sur* CA *et dans le sens* AC *je prends* $CC_\beta = a + b$; *je joins* $C_\alpha C_\beta$ *et je construis les deux droites analogues* $B_\alpha B_\gamma$ $A_\gamma A_\beta$. *Ces trois droites forment un triangle* $\Theta_a\Theta_b\Theta_c$ *dont le point de concours des hauteurs est* Θ_1. *Si par l'un des points* Θ_1, Θ_a, Θ_b, Θ_c, *je mène des parallèles aux trois côtés de* ABC, *ces parallèles couperont ces côtés en six points qui formeront un hexagone circonscrit au cercle inscrit ou à l'un des cercles ex-inscrits du triangle* ABC.

Remarque. — Les trois côtés et les trois hauteurs du triangle $\Theta_a\Theta_b\Theta_c$ sont parallèles aux bissectrices des angles formés par les directions des côtés de ABC.

Le rayon du cercle circonscrit au triangle $\Theta_a\Theta_b\Theta_c$ est 8R.

Le théorème III transformé donne le théorème plus général:

Théorème V. — *Si deux triangles homologiques* ABC, A'B'C' *quelconques sont circonscrits à une même conique, les points de contact de* ABC *avec la conique étant* α, β, γ *et ceux de* A'B'C' *étant* $\alpha'\beta'\gamma'$, *les triangles* A'B'C', $\alpha\beta\gamma$ *sont homologiques ainsi que* ABC *et* $\alpha'\beta'\gamma'$.

Remarquons qu'on pourrait résoudre par une méthode tout à fait analogue le problème suivant plus général que celui que nous venons d'étudier.

Problème II. — *Trouver dans le plan d'un triangle* ABC *un point* Θ *tel que si l'on mène par ce point des parallèles aux trois côtés, l'hexagone formé par les six points où ces parallèles coupent les côtés soit circonscrit à une conique donnée inscrite dans le triangle* ABC.

Problème III. — *Soit* Θ *un point quelconque* (ξ, η) *du plan. On sait que l'hexagone* $B_cA_cC_aB_aA_bC_b$ *(avec les mêmes notations que dans le problème I) est circonscriptible à une conique et inscriptible dans une autre; cherchons l'équation de ces courbes.*

1° La conique inscrite à l'hexagone :

Toute conique tangente à CB, CA a une équation de la forme

$$D^2x^2 + 4FBxy + E^2y^2 + 4FDx + 4FEy + 4F^2 = 0. \quad (3)$$

Exprimons qu'elle est tangente aux droites C_bA_b, C_aB_a, A_cB_c qui ont respectivement pour équations

$$b\eta x + (2a\eta + b\xi - ab)y - \eta(a\eta + b\xi) = 0, \quad (4)$$

$$(a\eta + 2b\xi - ab)x + a\xi y - \xi(a\eta + b\xi) = 0. \quad (5)$$

$$\frac{x}{\xi} + \frac{y}{\eta} - 1 = 0. \quad (6)$$

Or si la droite $mx + ny + p = 0$ est tangente à la conique $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, on a

$$\begin{vmatrix} 2A, & B, & D, & m \\ B, & 2C, & E, & n \\ D, & E, & 2F, & p \\ m, & n, & p, & o \end{vmatrix} = 0.$$

Ce qui donne pour la conique (3)

$$p^2(E^2D^2 - 4F^2B^2) + 4pnFD(2FB - ED) + 4pmFE(2FB - ED) - 8mnF^2(2FB - ED) = 0$$

ou en enlevant le facteur $2FB - ED$, divisant par F^2p^2 et posant $\frac{E}{F} = X$, $\frac{D}{F} = Y$, $\frac{E}{F} \times \frac{D}{F} + 2\frac{B}{F} = Z$, on a

$$4\frac{m}{p}X + 4\frac{n}{p}Y - Z = 8\frac{m}{p}\frac{n}{p}.$$

Si dans cette équation on remplace $\frac{m}{p}$ et $\frac{n}{p}$ par leurs valeurs tirées respectivement des équations (4), (5), (6), il vient :

$$\frac{4b}{a\eta + b\xi}X + \frac{4(2a\eta + b\xi - ab)}{\eta.(a\eta + b\xi)}Y + Z = \frac{-8b(2a\eta + b\xi - ab)}{\eta.(a\eta + b\xi)}$$

$$\frac{4(a\eta + 2b\xi - ab)}{\xi(a\eta + b\xi)}X + \frac{4a}{a\eta + b\xi}Y + Z = \frac{-8a(a\eta + 2b\xi - ab)}{\xi(a\eta + b\xi)}$$

$$\frac{4}{\xi}X + \frac{4}{\eta}Y + Z = -\frac{8}{\xi.\eta}.$$

De ces trois équations on déduit

$$\frac{E}{F} = X = -\frac{2(\xi + a)}{a\eta + b\xi}$$

$$\frac{D}{F} = Y = -\frac{2(\eta + b)}{a\eta + b\xi}$$

$$\frac{E}{F} \cdot \frac{D}{F} + 2\frac{B}{F} = Z = \frac{16}{a\eta + b\xi},$$

d'où
$$\frac{B}{F} = \frac{6a\eta + 6b\xi - 2ab - 2\eta\xi}{(a\eta + b\xi)^2}.$$

Substituons ces valeurs dans l'équation (3) préalablement divisée par F^2.

On a

$$(\eta + b)^2x^2 + 2(3a\eta + 3b\xi - ab - \xi\eta)xy + (\xi + a)^2y^2$$
$$-2(\eta + b)(a\eta + b\xi)x - 2(\xi + a)(a\eta + b\xi)y + (a\eta + b\xi)^2 = 0 \quad (7)$$

qui est l'équation cherchée de la conique inscrite dans l'hexagone.

Si l'on détermine le centre de cette conique on reconnaît qu'il est donné par

les équations
$$\begin{cases} x = \dfrac{a + \xi}{4} \\ y = \dfrac{b + \eta}{4}. \end{cases}$$

Ce qui conduit au remarquable théorème suivant :

Théorème VI. — *Si dans le plan d'un triangle* ABC *un point* Θ *décrit une courbe quelconque, le centre de la conique inscrite dans l'hexagone formé par les intersections des côtés avec les parallèles aux côtés menées par* Θ *décrit une courbe homothétique et le rapport d'homothétie est* $\frac{1}{4}$.

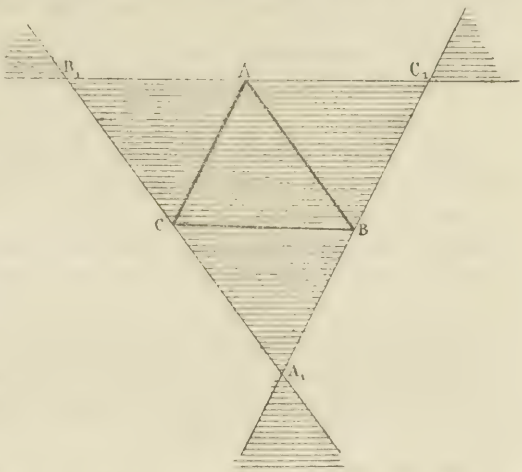
Remarque I. — Ces valeurs des coordonnées du centre nous indiquent une nouvelle solution très simple du problème I car nous connaissons dans ce problème les centres des coniques inscrites qui sont les centres des cercles inscrits et ex-inscrits au triangle ABC. En remplaçant x et y par les coordonnées de ces points nous aurons les coordonnées ξ, η des points Θ_1, Θ_a, Θ_b, Θ_c par les formules

$$\xi = 4x - a$$
$$\eta = 4y - b$$

et nous retrouvons ainsi les résultats obtenus par une voie toute différente.

Remarque II. — La courbe (7) ne représente jamais une hyperbole équilatère.

Remarque III. — Si nous cherchons le genre de la courbe, nous voyons qu'elle représente une hyperbole ou une ellipse suivant que l'on a $(\eta - b)(a - \xi)(a\eta + b\xi)$, positif ou négatif. Si l'on mène par A, B, C des parallèles aux côtés opposés, on forme un triangle $A_1 B_1 C_1$ et il est facile de voir que l'invariant $(\eta - b)(a - \xi)(a\eta + b\xi)$ est négatif ou positif suivant que le point (ξ, η) est ou n'est pas dans les parties hachurées de la figure ci-contre. Si le point (ξ, η) se trouve sur un des côtés du triangle $A_1 B_1 C_1$, la courbe (7) se réduit à une droite double.



2° La conique circonscrite à l'hexagone :

On exprime facilement que la conique passe par les quatre points B_c, C_b, A_c, C_a situés sur les axes de coordonnées, puis par l'un des points A_b, B_a qui ont pour coordonnées :

$$A_b \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{a}{b}(b - \eta) \\ y = \eta \end{array} \right. \qquad B \left| \begin{array}{l} y = \xi \\ x = \dfrac{b}{a}(a - \xi) \end{array} \right.$$

on trouve

$$b\eta x^2 + (2a\eta + 2b\xi - ab)xy + a\xi y^2 - \eta(2b\xi + a\eta)x$$
$$-\xi(2a\eta + b\xi)y + \eta\xi(a\eta + b\xi) = 0. \qquad (8)$$

a. Cette équation représente une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que le point (ξ, η) est à l'intérieur de l'ellipse maxima inscrite au triangle, sur cette ellipse ou à l'extérieur de cette ellipse. On sait que cette ellipse maxima

est tangente aux trois côtés en leurs milieux et a pour centre le centre de gravité du triangle ; son équation est

$$b^2x^2 + abxy + a^2y^3 - ab^2x^2 - a^2by + \frac{a^2b^2}{4} = 0. \quad (9)$$

b. La conique circonscrite à l'hexagone sera un système de deux droites si le point (ξ, η) est sur l'ellipse minima circonscrite à ABC. Cette ellipse minima, qui a son centre au centre de gravité de ABC et dont les normales aux points A, B, C sont les hauteurs du triangle, a pour équation

$$abxy - (ay + bx)(ay + bx - ab) = 0. \quad (10)$$

L'ellipse (9) et l'ellipse (10) sont homothétiques, leur centre d'homothétie est le centre de gravité G de ABC.

Le lieu d'intersection des deux droites qui, dans ce cas, forment la conique circonscrite à l'hexagone, est

$$[(ay + bx)(ay + bx - ab) + abxy]^2$$
$$= 4abxy\ (ay + bx - ab)^2.$$

c. La conique circonscrite est un cercle lorsque le point (ξ, η) est le centre des médianes antiparallèles. *(Voir la note sur quelques propriétés d'un point remarquable du plan d'un triangle, Congrès de Lyon, 1873.)*

Théorème VII. — *Soit un triangle fixe* ABC *et un triangle variable* A'B'C', *homothétique à* ABC, ω *étant le centre fixe d'homothétie, on sait que les côtés de* A'B'C' *coupent ceux de* ABC *en six points qui forment un hexagone inscriptible à une conique.* (Voir Congrès de Lyon, 1873.)

1° Le lieu du centre de cette conique est une droite qui passe par ω ; *si* ω *est le centre des médianes antiparallèles de* ABC, *la droite passe aussi par le centre du cercle circonscrit.*

2° Les côtés de cet hexagone qui sont situés sur les côtés du triangle ABC *coupent (d'après le théorème de Pascal) les côtés opposés en trois points situés en ligne droite : cette droite passe par un point fixe.*

La conique circonscrite à l'hexagone est une hyperbole équilatère si le point (ξ, η) appartient à la droite :

$$2a\eta\,(c^2 - a^2) + 2b\xi\,(c^2 - b^2) + ab\,(a^2 - b^2 - c^2) = 0.$$

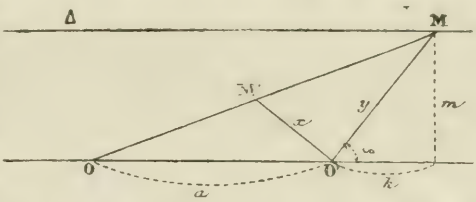
Il est facile de voir que cette droite est l'axe d'homologie du triangle ABC et du triangle formé en joignant les pieds

des hauteurs, c'est-à-dire l'axe radical du cercle circonscrit et du cercle des neuf points; on a donc le théorème suivant :

Théorème VIII. — *Si par un point quelconque de l'axe d'homologie d'un triangle* ABC *et du triangle formé par les pieds des hauteurs, on mène des parallèles aux trois côtés, ces parallèles rencontrent les côtés en six points qui sont sur une hyperbole équilatère.* *(A suivre.)*

QUESTION 35

La question étant posée dans les mêmes termes que dans la question 34, mais en supposant cette fois que Δ *est parallèle à* OO′, *trouver le lieu du point* I *; on distinguera les différentes formes du lieu suivant que le cercle décrit sur* OO′ *comme diamètre est extérieur, tangent ou sécant à la droite* Δ. *On propose aussi de reconnaître que la courbe trouvée est une courbe de sixième degré unicursale.*



1. — Supposons maintenant que la droite Δ soit parallèle à OO′. L'équation de cette droite est $m = y \sin\omega$ [1]. La relation précédente est toujours $\frac{\sin\omega}{x} - \frac{\cos\omega}{y} = \frac{1}{a}$ [2]. Éliminant l'angle ω, on a $\sin\omega = \frac{m}{y}$, $\frac{\cos\omega}{y} = \frac{m}{xy} - \frac{1}{a}$,

$$\cos\omega = y\left(\frac{m}{xy} - \frac{1}{a}\right) = \left(\frac{m}{x} - \frac{y}{a}\right).$$

L'équation de la courbe est donc

$$\frac{m^2}{y^2} + \left(\frac{m}{x} - \frac{y}{a}\right)^2 = 1, \qquad [3]$$

équation que l'on peut écrire $a^2x^2(y^2 - m^2) = y^2(am - xy)^2$.

2. — Discussion. — Cette courbe est du sixième degré, elle est symétrique par rapport à l'origine. Elle est tout entière extérieure aux deux droites $\begin{matrix} y = (+m) \\ y = (-m) \end{matrix}$ parallèles à l'axe des x, et auxquelles elle est tangente aux points M et M′ donnés par les coordonnées

$$\mathrm{M}\begin{cases} x = a \\ y = m \end{cases} \quad \mathrm{M}'\begin{cases} x = -a \\ y = -m \end{cases} \qquad [4]$$

L'axe des y est une asymptote double. Les asymptotes horizontales sont données par le coefficient de x^2

$$(y^4 - a^2y^2 + a^2m^2) = 0.$$

qui représente quatre asymptotes réelles ou imaginaires suivant le signe de $(a^2 - 4m^2)$. Nous distinguerons trois cas.

1° $\frac{a^2}{4} - m^2 > 0$. Les quatre asymptotes sont réelles. Elles sont symétriques deux à deux par rapport à l'axe des x. Posant $\frac{a^2}{4} - m^2 = d^2$, on aura $y^2 = a\left(\frac{a}{2} \pm d\right)$, valeurs que l'on peut facilement construire *(fig. 1)*. On obtient les quatre points A A_1 A′ A_1'.

Nous pouvons écrire l'équation en ordonnant par rapport à x^2 : $x^2(y^4 - a^2y^2 + a^2m^2) = 2amy^2\left(xy - \frac{am}{2}\right)$. [5]

Le premier membre contient les quatre asymptotes, le second l'hyperbole $xy = \frac{a}{2}m$, qui séparent le plan en régions *(fig. 1, hachures croisées)*.

Les points d'intersection P, P′, Q, Q′ de l'hyperbole avec les asymptotes font partie de la courbe. L'origine est un point double isolé.

Il y a deux branches de courbe comprises entre les asymptotes AA′ et A_1A_1', et deux branches asymptotes à Oy et aux droites A et A_1.

2° $\frac{a^2}{4} - m^2 = 0$. L'équation se simplifie et devient

$$x^2\left(y^2 - \frac{a^2}{2}\right)^2 - a^2y^2\left(xy - \frac{a^2}{4}\right).$$

Les deux asymptotes horizontales A et A′ sont confondues en une seule A ayant pour équation $y = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

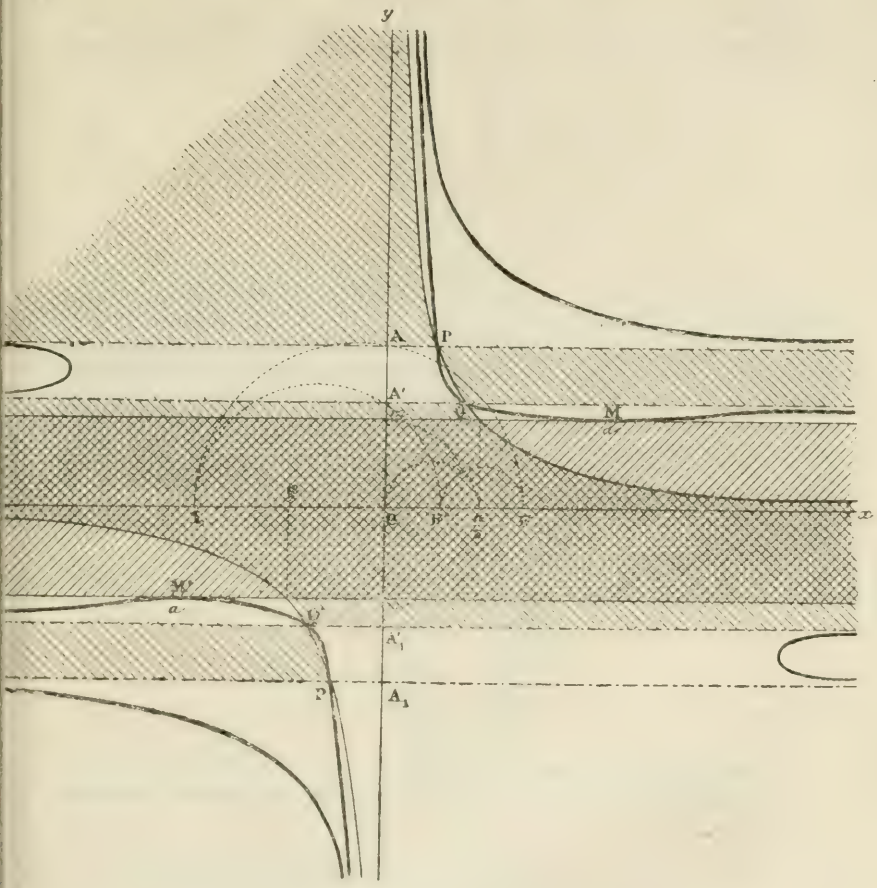


Fig. 1.

L'hyperbole équilatère $xy = \frac{a^2}{4}$ et la courbe coupent les deux asymptotes A et A_1 aux mêmes points P et P′; par conséquent la courbe est tangente en ces points à l'hyperbole équilatère.

Les deux points M $\begin{cases} x = a \\ y = \dfrac{a}{2} \end{cases}$ M′ $\begin{cases} x = -a \\ y = -\dfrac{a}{2} \end{cases}$ sont deux points de tangence horizontale. Il y a quatre branches symétriques deux à deux par rapport à l'origine O, qui est

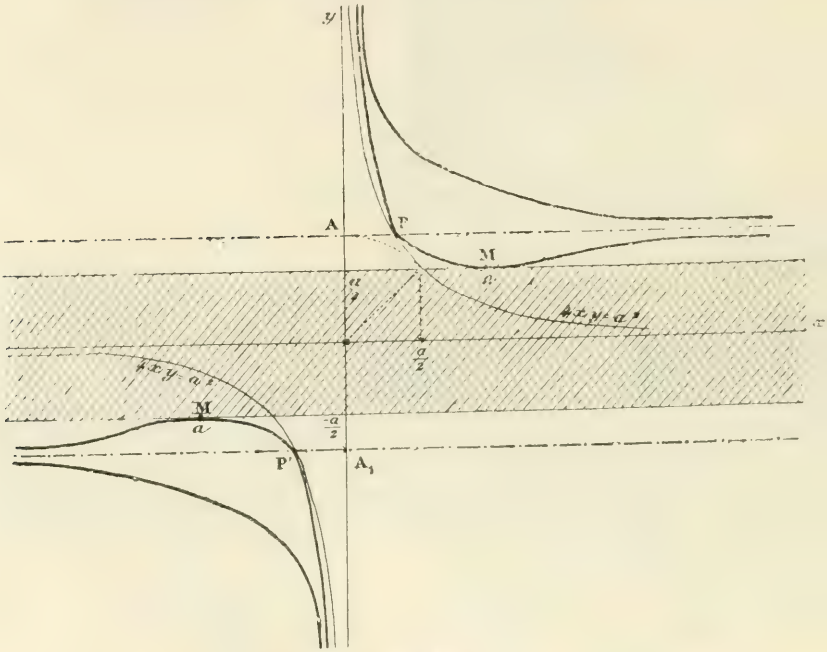


Fig. 2.

un point double isolé. L'axe des y est une asymptote double *(fig. 2)*.

3° $\dfrac{a^2}{2} - m^2 \geq 0$. Les asymptotes horizontales sont toutes imaginaires. Il faut que x et y soient de même signe, donc il n'y a des points que dans ces premier et troisième quadrants.

Les points M et M′ sont toujours deux points de tangence horizontale. L'axe des y est une asymptote double.

La courbe a donc la forme de la figure 3. Il y a un point

d'inflexion dans la partie de courbe qui va de M vers la droite à l'axe Oy et un point N où la tangente est verticale.

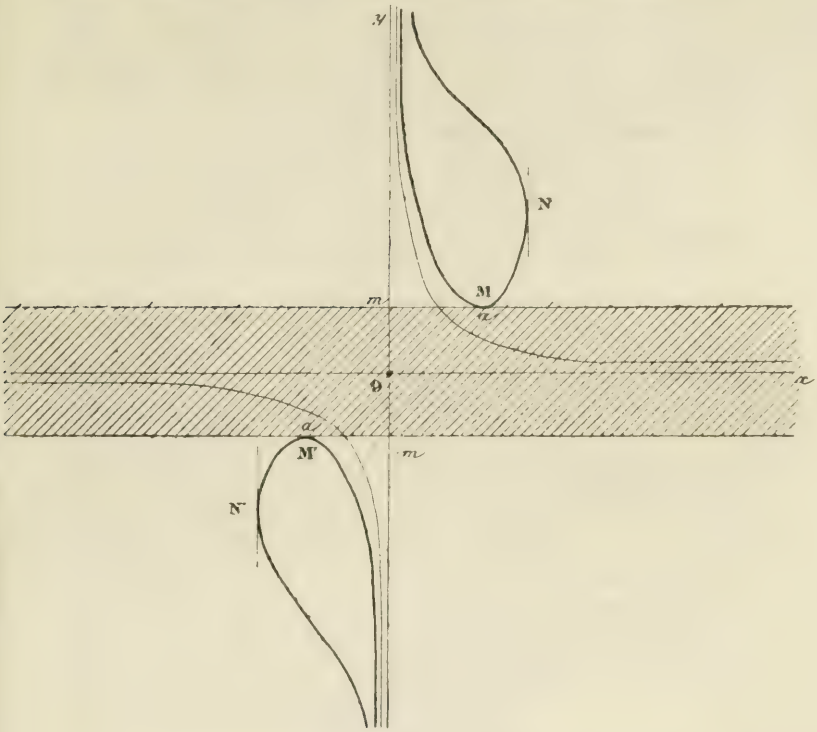


Fig. 3.

3. — 1° Prenons l'équation de la première courbe sous la forme
$$\frac{k^2}{y^2} \times x^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{k}{y^2}\right)^2 = 1.$$

On peut poser $\frac{k}{y} = \cos \varphi = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$

$$x\left(\frac{1}{a} + \frac{k}{y^2}\right) = \sin \varphi = \frac{2t}{t^2 + 1}$$

d'où on aura les formules

$$y = \frac{k\,(t^2 + 1)}{t^2 - 1} \qquad [1]$$

et

$$x = \frac{2t}{(t^2+1)\left[\frac{1}{a} + \frac{(t^2-1)^2}{k(t^2+1)^2}\right]} = \frac{2tak(t^2+1)}{k(t^2+1)^2 + a(t^2-1)^2}. \qquad [2]$$

Ces deux formules prouvent que la première courbe est unicursale.

2° Prenons la deuxième sous la forme

$$1 = \left(\frac{m}{y}\right)^2 + \left(\frac{m}{x} - \frac{y}{a}\right)^2$$

et posant $\frac{m}{y} = \cos\varphi = \frac{t^2-1}{t^2+1}$

$$\frac{m}{x} - \frac{y}{a} = \sin\varphi = \frac{2t}{t^2+1},$$

On aura $y = m\,\frac{t^2+1}{t^2-1}$ [1]

et

$$\frac{m}{x} = \frac{2t}{t^2+1} + \frac{m}{a}\cdot\frac{t^2+1}{t^2-1} = \frac{2at(t^2-1)+m(t^2-1)^2}{a(t^2-1)}$$

d'où $x = \frac{am(t^2-1)}{2at(t^2-1)+m(t^2+1)^2}$. [2]

La courbe est donc unicursale.

Cette remarque s'applique d'ailleurs à la courbe traitée précédemment quand nous avons résolu la question n° 34. On peut observer qu'en général, si

$$x = f(\sin\omega, \cos\omega),$$
$$y = \varphi(\sin\omega, \cos\omega);$$

comme on a toujours

$$\cos\omega = \frac{t^2-1}{t^2+1},$$

$$\sin\omega = \frac{2t}{t^2+1}.$$

x et y sont données par des formules

$$x = \frac{F(t)}{F_1(t)} \quad y = \frac{F_2(t)}{F_1(t)}$$

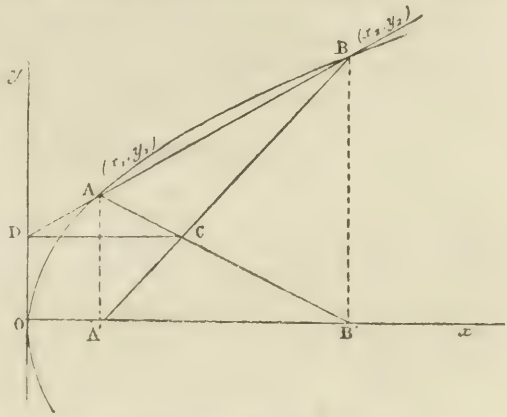
et par conséquent ces courbes sont unicursales.

QUESTION 13

Solution par M. E. Gaullaider, élève au Lycée Saint-Louis.

Étant donnés deux points A *et* B *d'une parabole inconnue et la droite* Δ *axe de cette courbe, on abaisse sur* Δ *les perpendiculaires* AA′, BB′, *puis on trace les droites* AB′ *et* BA′ *qui se coupent en* C.

Démontrer que si par le point C *on mène une parallèle à l'axe* Δ, *cette droite rencontre* AB *en un point qui appartient à la tangente au sommet, ce qui permet de déterminer simplement ce sommet.*



(G. L.)

Équation de AB′ : $\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_1}{x_1 - x_2}$.

ou $y(x_1 - x_2) - xy_1 + x_2y_1 = 0$.

Équation de BA′ : $y(x_1 - x_2) + xy_2 - x_1y_2 = 0$.

L'équation d'une droite passant par C est

$y(x_1 - x_2)(\lambda + 1) - x(y_1 - \lambda y_2) + y_1x_2 - \lambda x_1y_3 = 0$ (1)

Si cette droite est parallèle à Ox, on a $y_1 - \lambda y_2 = 0$.

d'où $$\lambda = \frac{x_1}{y_2},$$

et (1) devient $y(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + y_2y_1x_2 - x_1y_2y_1 = 0$

ou $$y = \frac{y_1y_2}{y_1 + y_2};$$

cherchons son point d'intersection avec AB dont l'équation est $$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_3}{x - x_3}.$$

nous avons

$$(x - x_1)(y_1^2 - y_2^2) + (x_1 - x_2)\, y_1^2 = 0$$

ou

$$x(y_1^2 - y_2^2) + x_1 y_2^2 - x_2 y_1^2 = 0 : \qquad (2)$$

mais

$$y_1^2 = 2p\, x_1 .\ y_2^2 = 2p x_2 .$$

donc (2) devient

$$x(2px_1 - 2px_2) + 2px_1x_2 - 2px_1x_2 = 0$$

$$x = 0 .$$

Donc le point D d'intersection avec AB est sur la tangente au sommet; le sommet est donc le pied de la perpendiculaire abaissée du point D sur l'axe.

QUESTION 30

On considère l'équation du quatrième degré,

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0 .$$

Soient x_1, x_2, x_3, x_4 *les racines de cette équation :* 1° *on propose de démontrer que si l'on pose*

$$z = \frac{x_1x_2 + x_3x_4}{(x_1 + x_2)(x_3 + x_4)} ,$$

l'équation transformée est

$$Pz^3 + Qz^2 + Rz + S = 0 :$$

en posant

$$P = CBD - B^2E - D^2A ,$$
$$Q = 2BCD + 4ACE - 3B^2E - 3D^2A - C^3 ,$$
$$R = BCD + 8ACE - 3B^2E - 3D^2A ,$$
$$S = 4ACE - B^2E - D^2A .$$

2° *Expliquer le résultat qu'on obtient quand on suppose* $C = 0$.

3° *Démontrer que si l'on considère le faisceau quartique*

$$Ax^4 + Bx^3y + Cx^2y^2 + Dxy^3 + Ey^4 = 0 ,$$

ces quatre droites formeront un faisceau harmonique si l'on a

$$2C^3 = 9BCD + 72ACE - 27B^2A - 27D^2A .$$

(G. L.)

1. Cherchons d'abord la résolvante qui correspond à l'inconnue y, liée aux racines de l'équation donnée par la condition $\qquad y = x_1x_2 + x_3x_4 .$

L'équation étant

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0.$$

la résolvante sera

$$y^3 + py^2 + qy + r = 0,$$

et nous allons déterminer p, q et r. On a d'abord

$$-p = \Sigma x_1 x_2$$

ou

$$-p = \frac{C}{A}. \qquad (1)$$

Le coefficient q est donné par la relation

$$q = \Sigma(x_1x_2 + x_3x_4)(x_1x_3 + x_2x_4)$$

ou

$$\begin{aligned} q = {} & x_1^2x_2x_3 + x_1^2x_3x_4 + x_1^2x_2x_4 \\ & + x_2^2x_1x_3 + x_2^2x_1x_4 + x_2^2x_3x_4 \\ & + x_3^2x_1x_2 + x_3^2x_1x_4 + x_3^2x_2x_4 \\ & + x_4^2x_1x_2 + x_4^2x_1x_3 + x_4^2x_2x_8 \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire

$$q = \Sigma x_1^2(x_2x_3 + x_3x_4 + x_2x_4);$$

mais on a d'autre part

$$x_2x_3 + x_3x_4 + x_2x_4 + x_1(x_2 + x_3 + x_4) = \frac{C}{A}$$

ou

$$x_2x_3 + x_3x_4 + x_2x_4 - x_1\left(x_1 + \frac{B}{A}\right) = \frac{C}{A}.$$

Ainsi

$$q = \sum x_1^2\left[\frac{C}{A} + x_1\left(x_1 + \frac{B}{A}\right)\right]$$

ou encore

$$Aq = \Sigma\,(Ax_1^4 + Bx_1^3 + Cx_1^2)$$

d'ailleurs

$$\Sigma(Ax_1^4 + Bx_1^3 + Cx_1^2 + Dx_1 + E) = 0.$$

On trouve ainsi

$$Aq = -\Sigma\,(Dx_1 + E)$$

ou enfin

$$A^2q = BD - 4AE. \qquad (2)$$

Cherchons enfin le coefficient r. On a

$$-r = (x_1x_2 + x_3x_4)\,(x_1x_3 + x_2x_4)\,(x_1x_4 + x_2x_3).$$

En développant les calculs

$$-r = x_1x_2x_3x_4\Sigma x_1^2 + \Sigma x_1^2x_2^2x_3^2,$$

ou

$$-r = \frac{E}{A}\,\Sigma x_1^2 + \frac{E^2}{A^2}\,\Sigma\,\frac{1}{x_1^2}.$$

D'ailleurs

$$\Sigma x_1^2 = \frac{B^2 - 2AC}{A^2}$$

et

$$\Sigma\,\frac{1}{x_1^2} = \frac{D^2 - 2CE}{E^2}.$$

On a donc enfin

$$-A^3 r = B^2E + D^2A - 4ACE. \qquad (3)$$

La résolvante est donc

$$A^3y^3 - A^2Cy^2 + A(BD - 4AE)y + 4ACE - B^2E - D^2A = 0. \qquad (4)$$

2. — Cherchons maintenant la relation qui existe entre y et z.

On a
$$z = \frac{x_1x_2 + x_3x_4}{(x_1 + x_2)(x_3 + x_4)};$$

par suite

$$1 + \frac{1}{z} = \frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4}{x_1x_2 + x_3x_4}$$

ou
$$Ay = \frac{Cz}{1 + z}.$$

L'équation (4) devient donc

$$C^3z^3 - C^3z^2(1 + z) + Cz(1 + z)^2(BD - 4AE)$$
$$+ (1 + z)^3(4ACE - B^2E - D^2A) = 0.$$

En développant les calculs indiqués on a

$$z^3(BCD - B^2E - D^2A) + z^2(2BCD + 4ACE - 3B^2E - 3D^2A - C^3)$$
$$+ z(BCD + 8ACE - 3B^2E - 3D^2A)$$
$$+ 4ACE - B^2E - D^2A = 0. \qquad (5)$$

C'est bien l'équation indiquée.

3. — On sait que l'on peut toujours, par la résolution d'une équation qui est du second degré, faire disparaître le terme du milieu d'une équation du quatrième degré. Supposons donc $C = 0$, c'est-à-dire

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 0 \qquad (A)$$

ou
$$x_1x_2 + x_3x_4 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = 0.$$

Ainsi, dans cette hypothèse $C = 0$ on a

$$z + 1 = 0.$$

Mais la relation (A) est symétrique, et l'on peut déduire de cette remarque que les trois racines de l'équation en z sont toutes les trois égales à -1. C'est ce qu'il est facile de vérifier puisqu'elle devient, en supposant $C = 0$,

$$(B^2E + D^2A)(z + 1)^3 = 0:$$

elle n'admet pas d'autre racine que $z = -1$.

4. — Considérons maintenant le faisceau quartique

$$Ax^4 + Bx^3y + Cx^2y^2 + Dxy^3 + Ey^4 = 0.$$

Si l'on coupe ce faisceau par la droite $y = 1$, on obtient l'équation

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0.$$

Le faisceau sera harmonique si les points A_1, A_3, A_2, A_4, qui sont situés sur la droite $y = 1$, donnent la relation

$$\frac{A_1A_3}{A_1A_4} = \frac{A_2A_3}{A_2A_4}$$

ou

$$\frac{x_3 - x_1}{x_4 - x_1} = \frac{x_2 - x_3}{x_4 - x_2}$$

$$2(x_3x_4 + x_1x_2) = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4). \quad (6)$$

Il résulte de là que $z = \frac{1}{2}$ est une racine de l'équation (5) et en remplaçant z par $\frac{1}{2}$ dans celle-ci on obtient

$$2C^3 = 9BCD + 72ACE - 27B^2A - 27D^2A. \quad (7)$$

C'est bien la relation indiquée.

5. — On peut encore déduire cette condition de l'équation (4), équation à laquelle on est conduit par la méthode de Ferrari.

En effet, pour exprimer que les racines $x_1x_2x_3x_4$ satisfont à la condition (6), on peut observer que celle-ci peut s'écrire

$$3(x_1x_2 + x_3x_4) = \Sigma x_1x_2 = \frac{C}{A}.$$

On a donc $\qquad 3Ay = C$

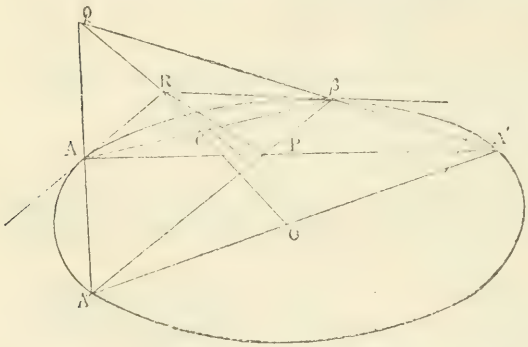
et l'équation (4) donne, en remplaçant Ay par $\frac{C}{3}$, la relation (7) qui se trouve ainsi établie par ces deux procédés.

QUESTION 25

Solution par M. Griffon, commis d'Intendance militaire à Montpellier.

On considère une ellipse E, *un diamètre* A'A'' *et deux points quelconques* A *et* B. *Les droites* AA', BB'' *se coupent en un point* P; AA'' *et* BA' *en un point* Q. *Le pôle de* AB *est évidemment situé sur* PQ. *On propose de démontrer qu'il est placé au milieu de* PQ. (G. L.)

Soit R le pôle de AB; C le milieu de la corde AB. La droite qui va du centre O de la conique E au milieu C de la corde polaire AB passe par le pôle R. Mais dans le quadrilatère complet PQAB A' A'' le milieu des diagonales sont trois points en ligne droite; donc la droite OC, qui joint les milieux de deux diagonales A'A'' et AB, passe par le milieu de la troisième diagonale PQ. Et comme OC rencontre PQ au pôle R de AB, on voit que R est bien le milieu de PQ.



Nota. — Ont résolu la même question : MM. P. Godefroy, à Lyon; Alexandre, à Angers; H. Bourget, à Aix; Hellot, à Rouen; Cadot, Lycée Saint-Louis, à Paris.

QUESTION 36

Solution par M. ALEXANDRE, élève de Mathématiques spéciales au Lycée d'Angers.

On considère les ellipses E, *ayant le même centre, leurs axes de direction fixes et homothétiques ; par deux points fixes, l'un* A *pris sur* Ox, *l'autre* B *sur* Oy, *de telle sorte que* OA = a, OB = b, *on fait passer des cercles* C *tangents à* E *au point* I. *Trouver le lieu de ce point. Ce lieu est une cubique. On propose de la construire dans le cas particulier où les courbes* E *sont des cercles.* (G. L.)

L'équation de l'une quelconque des ellipses sera

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\mu^2} - K = 0 ; \qquad (1)$$

soit

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \beta^2 + (\alpha - a)^2 \qquad (2)$$

un cercle passant par A ; en exprimant qu'il passe par B on a

$$(2\beta - b)\, b - (2\alpha - a)\, a = 0. \qquad (3)$$

Soit $x_1\ y_1$ un point qui est sur le cercle ; il se trouve forcément sur l'une des ellipses (1) ; il suffit donc d'exprimer que la tangente en ce point au cercle est parallèle à la polaire de ce point par rapport à l'une quelconque des ellipses, ce qui donne

$$\frac{\mu^2}{\lambda^2}\ \frac{x_1}{y_1} = \frac{\alpha - x_1}{\beta - y_1}. \qquad (4)$$

On aura le lieu cherché en éliminant α, β, entre

$$(x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 = \beta^2 + (\alpha - a)^2 \qquad (5)$$

et les équations (3) et (4). — Ces deux dernières donnent α et β, qui portées dans (5) donnent le lieu cherché

$$(x^2 + y^2 - a^2)(a\mu^2 x - b\lambda^2 y) - 2xy(\lambda^2 - \mu^2)(bx + ay - ab)$$
$$+ (a^2 - b^2)(\mu^2 x^2 + \lambda^2 y^2 - \mu^2 ax) = 0.$$

Si on suppose que les courbes données E sont des cercles, $\lambda = \mu$, et le lieu devient

$$(x^2 + y^2 - a^2)(ax - by) + (a^2 - b^2)(x^2 + y^2 - ax) = 0.$$

C'est cette courbe qu'il faut construire.

Nous supposerons $a > b$. On voit aisément que la courbe passe par l'origine où sa tangente est

$$y = \frac{2a^2 - b^2}{ab} x$$

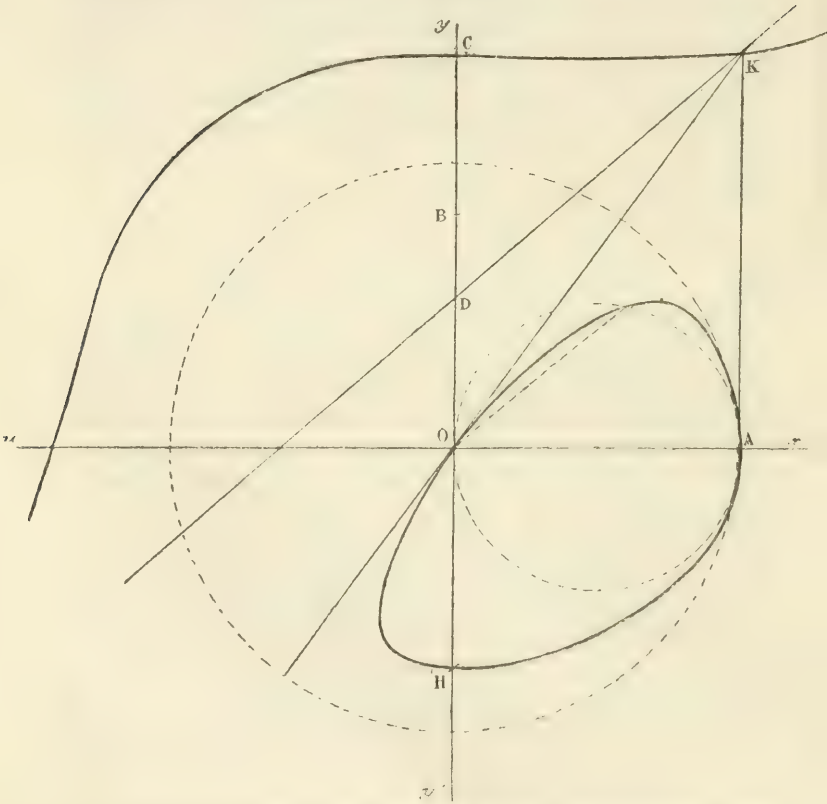
et par le point d'intersection du cercle

$$x^2 + y^2 - ax = 0.$$

Elle est tangente aux deux cercles

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0$$
$$x^2 + y^2 - ax = 0$$

au point $x = a$ où ils sont tangents.



La courbe coupe sa tangente à l'origine au point où celle-ci rencontre la droite $x = a$.

On a une asymptote

$$ax - by + a^2 - b^2 = 0$$

qui passe aussi par le point de rencontre de la tangente à l'origine et de $x = a$.

La courbe a donc la forme de la figure ci-contre. On a

$$OH = -b,\ OC = \frac{a^2}{b},\ OD = \frac{a^2 - b^2}{b}.$$

Si $a = b$, la courbe se réduit à un cercle et une droite

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0$$
$$ax - by = 0.$$

Pour étudier le cas de $a < b$, il suffirait de prendre pour axe des x l'axe des y et inversement ; on aurait une courbe ayant une disposition analogue par rapport aux nouveaux axes de coordonnées.

QUESTIONS PROPOSÉES

50. — Si par un point de la courbe ayant pour équation

$$x^3 + y^3 = A,$$

on mène les tangentes, démontrer que, des quatre autres points de contact, deux sont réels et deux sont imaginaires. Démontrer que les points de contact réels ne peuvent avoir en même temps leurs coordonnées commensurables.

(Ed. Lucas.)

51. — On considère une conique à centre Δ ; soit S l'un des sommets de cette courbe, et AB une corde principale. On trace une parabole P passant par les points A et B, et ayant, elle aussi, le point S pour sommet. Soit I le point de contact de la parabole P avec une droite à la fois tangente à Δ et à P. Lieu de ce point I, quand la corde AB se meut parallèlement à elle-même. *(G. L.)*

52. — L'ellipse qui touche les côtés d'un triangle ABC aux pieds des médianes antiparallèles a pour foyer les point segmentaux de Brocard. Ces points O et O′ sont définis par la relation

$$OAC = OCB = OBA = O'AB = O'BC = O'CA.$$

(E. Lemoine.)

53. — Soient a, b, c, d, quatre coefficients consécutifs d'une équation algébrique réelle. Si l'équation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ n'a pas ses trois racines réelles et distinctes, l'équation proposée a au moins deux racines imaginaires.

(Walecki.)

54. — On suppose que l'équation $U = 0$ a toutes ses racines réelles; démontrer que les équations

$$f_1 = U + (x - a)U' = 0$$
$$f_2 = U + 3(x - a)U' + (x - a)^2U'' = 0$$
$$f_3 = U + 7(x - a)U' + 6(x - a)^2U'' + (x - a)^3U''' = 0$$

ont aussi, quel que soit a, toutes leurs racines réelles (a est réel, bien entendu, et U', U'', U''' sont les dérivées successives de U).

Donner l'expression générale de $f_n = 0$, et montrer que, en posant

$$f_n = \alpha_n^0 U + \alpha_n^1 U' + \alpha_n^2 U'' + \ldots$$

on a

$$\alpha^0 = 1,$$
$$\alpha_n^1 = \frac{2^n - 1}{1}$$
$$\alpha_n^2 = \frac{3^n - 2.2^n - 1}{1.2}$$
$$\alpha_n^3 = \frac{4^n - 3.3^n + 3.2^n - 1}{1.2.3}$$

et ainsi de suite. *(G. L.)*

55. — On fait passer par 6 points fixes d'un plan des cubiques ayant chacune un centre ; déterminer le lieu de ces centres.

Le Rédacteur-Gérant,
E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 2610-3.

ÉTUDE

SUR DE NOUVEAUX POINTS REMARQUABLES DU PLAN D'UN TRIANGLE

Par M. Émile **Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir page 26.)

Étudions maintenant les lignes qui joignent les sommets aux points de contact des cercles tangents aux trois côtés du triangle.

Théorème IX. — *Si dans un triangle on joint chaque sommet au point de contact avec le côté opposé du cercle ex-inscrit tangent à ce côté et au prolongement des deux autres, on a trois droites qui se coupent en un même point* ω_1.

C'est-à-dire que les trois droites AA'_a, BB'_b, CC'_c sont concourantes au point ω_1.

Théorème X. — *Si dans un triangle on joint un premier sommet avec le point de contact sur le côté opposé du cercle inscrit à ce triangle; puis un deuxième sommet avec le point de contact sur le côté opposé du cercle ex-inscrit qui est tangent au côté opposé au troisième sommet et au prolongement des deux autres; puis le troisième sommet avec le point de contact sur le côté opposé du cercle ex-inscrit qui est tangent au côté opposé au deuxième sommet et au prolongement des deux autres, on a trois droites qui se coupent en un même point.*

C'est-à-dire que si l'on prend successivement pour premier sommet les points A,B,C, on a trois faisceaux de trois droites se coupant en ω_a, ω_b, ω_c.

$$\text{Ainsi}\begin{cases} AA'\ BB'_c\ CC'_b \text{ se coupent en } \omega_a, \\ AA'_c\ BB'\ CC'_a \quad — \quad — \quad \omega_b, \\ AA'_b\ BB'_a\ CC' \quad — \quad — \quad \omega_c. \end{cases}$$

Les points ω_1, ω_a, ω_b, ω_c ont respectivement pour coordonnées

$$\omega_1 \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{a(p-b)}{p} = (h_b - 2r)\sin C \\ y = \dfrac{b(p-a)}{p} = (h_a - 2r)\sin C \end{array} \right.$$

$$\omega_a \left| \begin{array}{l} x = -\dfrac{a(p-c)}{p-a} = -(2r_a - h_b)\sin C \\ y = \dfrac{pb}{p-a} = (h_a + 2ra)\sin C \end{array} \right.$$

$$\omega_b \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{pa}{p-b} = (h_b + 2r_b)\sin C \\ y = -b\,\dfrac{p-c}{p-b} = -(2r_b - h_a)\sin C \end{array} \right.$$

$$\omega_c \left| \begin{array}{l} x = -\dfrac{a(p-b)}{p-c} = -(2r_c - h_b)\sin C \\ y = -\dfrac{b(p-b)}{p-c} = -(2r_c - h_a)\sin C \end{array} \right.$$

Ces équations permettent de faire les remarques suivantes:

1° ω_1 et ω_c appartiennent à la droite $y - x = -a + b$; nous avons vu que les points Θ_1 et Θ_c appartenaient à la droite $y - x = a - b$ symétrique par rapport à C.

2° Les points ω_a, ω_b sont sur la droite $y + x = a + b$; nous avons vu que les points $\Theta_a \Theta_b$ étaient sur la droite $y + x = -(a + b)$ symétrique par rapport à C.

3° ω_1 et Θ_1 sont symétriques par rapport au centre du cercle inscrit

ω_a et Θ_a	id.	au centre du cercle ex-inscrit de rayon	r_a
ω_b et Θ_b	id.	id.	r_b
ω_c et Θ_c	id.	id.	r_c

4° Les droites $\omega_1\omega_c$ et $\omega_b\omega_a$ sont symétriques de $\Theta_1\Theta_c$ et $\Theta_a\Theta_b$, par rapport au sommet C.

De même pour les autres couples de droites.

$\omega_b\omega_a$ se construit donc en prenant sur CB dans le sens CB et sur CA dans le sens CA une longueur égale à $a + b$ et joignant ces deux points; $\omega_c\omega_a$, $\omega_b\omega_c$ se construisent de même, etc.

5° On peut remarquer que $A\omega_a$, $B\omega_b$, $C\omega_c$, c'est-à-dire AA′, BC′, CC′ se coupent en un même point, tandis qu'il n'en est pas de même de $A\Theta_a$, $B\Theta_b$, $C\Theta_c$.

6° Si l'on calcule $\omega_b\omega_a$, on trouve $\dfrac{2c}{\sin\dfrac{C}{2}}$, ce qui prouve, puisque $\Theta_b\Theta_a = \dfrac{4c}{\sin\dfrac{C}{2}}$, que les deux triangles homothétiques $\omega_a\omega_b\omega_c$ et $\Theta_a\Theta_b\Theta_c$ ont $\dfrac{1}{2}$ pour rapport d'homothétie.

Théorème XI. — *Si par le point ω_1 je mène des parallèles aux trois côtés du triangle* ABC, *chacune de ces parallèles sera à une distance* $2r$ *du sommet opposé au côté auquel elle est parallèle. De même si par ω_a on mène des parallèles aux trois côtés, chacune de ces parallèles sera à une distance* $2r_a$ *du sommet opposé auquel elle est parallèle.*

Cette propriété définit complètement les points ω_1, ω_a, ω_b, ω_c d'une autre manière que celle qui nous les a fait trouver.

On en déduit facilement que : *ces points sont les centres des cercles inscrit et ex-inscrit au triangle formé en menant par chaque sommet de* ABC *une parallèle au côté opposé.*

Ces théorèmes permettent de trouver en nombre indéfini des relations entre les éléments des triangles ABC, $\omega_a\omega_b\omega_c$, $\Theta_a\Theta_b\Theta_c$.

Le théorème XI est un cas particulier du suivant.

Théorème XII. — *D'un point quelconque ρ du plan d'un triangle* ABC *j'abaisse* ρa, ρb, ρc, *perpendiculaires respectivement sur* BC, AC, AB. *Sur les hauteurs* AA', BB', CC' *de ce triangle, je prends les trois points* α, β, γ *tels que* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ *étant de même sens que* ρa, ρb, ρc, *on ait* $A\alpha = 2\rho a$, $B\beta = 2\rho b$, $C\gamma = 2\rho c$.

Par α *je mène une parallèle à* CB,
— β — AC,
— γ — AB.

Ces trois parallèles se coupent en un point ρ' ; si ρ décrit un lieu $\varphi(x, y) = 0$, *ρ' décrira la courbe* $\varphi\left(\dfrac{a-x}{2}, \dfrac{b-y}{2}\right) = 0$, *Courbe semblable à* $\varphi(x, y) = 0$ *et dont la symétrique par rapport à l'origine est homothétique à* $\varphi(x, y) = 0$.

En projetant sur un plan quelconque on aurait un théorème encore plus général ; les hauteurs seraient remplacées par trois droites partant des sommets et se coupant en un même point, puis les perpendiculaires menées de ρ sur les côtés par des parallèles à ces trois droites.

Théorème XIII. — *Le point* ω_1, *le centre de gravité* G, *le centre du cercle inscrit* o *et le point* Θ_1 *sont en ligne droite ; et l'on a* $\frac{\omega_1 G}{2} = Go = \frac{o\Theta_1}{3}$.

Théorème XIV. — *Si par les points* A'_a, B'_b, C'_c, *où les trois cercles ex-inscrits touchent les côtés et non les prolongements de ces côtés, on élève des perpendiculaires à ces côtés, on a trois droites qui se coupent au même point* V ; *les trois points* V, O, o *sont en ligne droite et l'on a* $VO = Oo$.

La somme des perpendiculaires abaissées de V *sur les trois côtés du triangle est* $2R - r$.

De même si par C'_c, B'_a, A'_b, *on élève des perpendiculaires respectivement aux côtés* AB, AC, BC, *elles se couperont en un point* V_c.

V_c, O *et* o_c *seront en ligne droite et* $Oo_c = OV_c$.

En somme les points V, V_a, V_b, V_c *seront les symétriques de* o, o_a, o_b, o_c *par rapport au centre du cercle circonscrit.*

Théorème XV. — *Soit*

T_1 *l'axe d'homologie des triangles* ABC *et* A'B'C' ;
T_a — — $A'_aB'_aC'_a$:
T_b — — $A'_bB'_bC'_b$:
T_c — — $A'_cB'_cC'_c$.

1° *Le triangle formé par les trois lignes* T_a, T_b, T_c, *a ses sommets sur les bissectrices de* ABC ;

2° T_1 *coupe respectivement* T^a, T^b, T^c *sur la bissectrice du supplément de* A, *de* B, *de* C.

SUR UNE NOUVELLE APPROXIMATION

DES RACINES INCOMMENSURABLES

Par M. **J. Collin**,, professeur de Mathématiques, ancien élève de l'École Polytechnique.

Soit $f(x) = 0$ une équation quelconque, et supposons que l'on ait reconnu que cette équation admet une racine simple incommensurable, comprise entre deux nombres déjà bien rapprochés α et β, $\alpha < \beta$.

On peut trouver pour cette racine, par la géométrie, une approximation qui est intéressante à plusieurs points de vue: car 1° elle s'obtient immédiatement lorsqu'on a déjà effectué les calculs nécessaires pour la méthode de Newton et la méthode des parties proportionnelles; 2° elle donne une valeur plus approchée que ces deux méthodes ; 3° elle peut se représenter graphiquement.

Considérons en effet la courbe $y = f(x)$, et appelons A et B les points de cette courbe qui ont pour abscisses respectives α et β. (*). Désignons aussi par A′, B′,D les points où l'axe des x rencontre la tangente en A, la tangente en B, et la corde AB, et par α', β', δ les abscisses de ces points, de sorte que l'on a

$$\alpha' = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}, \quad \beta' = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}, \quad \delta = \alpha - \frac{(\beta - \alpha)f(\alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)}.$$

Nous supposons d'ailleurs que la courbe n'offre aucun point d'inflexion entre A et B, d'où il résulte, en particulier, que les deux valeurs α' et β' sont approchées dans le même sens, et δ en sens contraire.

Cela étant,

Parmi toutes les coniques qui touchent la courbe $y = f(x)$ en A et B, se trouve une hyperbole ayant une asymptote parallèle à l'axe des x, et qui, par conséquent, rencontre

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

cet axe en un point unique C. D'après le théorème de Desargues, C est le point central de l'involution dont A′ et B′ sont deux points conjugués, et D un point double ; donc C est compris entre A′ ou B′ d'une part, et D d'autre part, et son abscisse γ est donnée par la relation

$$(\gamma - \delta)^2 = (\alpha' - \gamma)(\beta' - \gamma),$$

d'où

$$\gamma = \frac{\alpha'\beta' - \delta^2}{\alpha + \beta' - 2\delta}$$

et cette valeur γ est ainsi une valeur plus rapprochée de la racine que ne le sont α', β' ou δ.

Dans quel sens cette valeur γ est-elle approchée ? — Elle est approchée dans le même sens que α' et β', si l'hyperbole est extérieure à la courbe $y = f(x)$; elle est approchée en sens contraire si l'hyperbole est intérieure à cette même courbe. Or, puisqu'il n'y a pas de points d'inflexion entre A et B, l'hyperbole est extérieure ou intérieure à la courbe suivant que le rayon de courbure ρ_2 de l'hyperbole en A (ou en B) est plus grand ou plus petit que le rayon de courbure ρ_1 de la courbe au même point ; mais

$$\rho_1 = \frac{\{1 + f'^2(\alpha)\}^{\frac{3}{2}}}{f''(\alpha)}, \quad \rho_2 = \frac{\{1 + f'^2(\alpha)\}^{\frac{3}{2}}}{y''_\alpha},$$

y'' étant la dérivée de y empruntée à l'équation de l'hyperbole.

Donc, γ est approchée dans le même sens que α' et β' ou en sens contraire, suivant que l'on a

$$y''_\alpha < f''(\alpha) \text{ ou } y''_\alpha > f''(\alpha)$$

c'est-à-dire, ainsi qu'il est facile de s'en rendre compte en calculant y''_α,

$$\frac{2\{(\beta - \alpha)f'(\alpha) + f(\alpha) - f(\beta)\}^2 f'(\alpha)f'(\beta)}{\{(\beta - \alpha)f'(\beta) + f(\alpha) - f(\beta)\}\{f(\beta) - f(\alpha)\}^2} - f''(\alpha) < 0 \text{ ou } > 0.$$

Cette expression semble, à première vue, bien compliquée ; mais il faut remarquer que les valeurs numériques de tous ses éléments sont déjà connues.

Observation. — Il n'y a peut-être guère lieu d'employer cette nouvelle approximation, que nous proposons, pour les équations trinômes ou quadrinômes ; mais elle devient réel-

lement avantageuse pour les équations qui contiennent cinq ou un plus grand nombre de termes.

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Par M. **Henry Bouget**.

LIEU GÉOMÉTRIQUE DU SOMMET DE L'ANGLE DE GRANDEUR CONSTANTE CIRCONSCRIT A UNE COURBE DE LA CLASSE n.

1. — *Historique.* — Ce fut Steiner qui, le premier, énonça cette question d'une façon générale et en donna une solution, sans démonstration, dans le *Bulletin mensuel de l'Académie de Berlin* (1858). Peu après, dans les *N. Annales de Mathématiques* (1859, p. 179), M. Devulf publia une démonstration analytique de la solution de Steiner.

Dans le même recueil (1859 ; p. 314), M. G. Salmon fit paraître une note ayant pour but de rectifier les assertions de M. Steiner et Devulf.

Enfin en 1861 (*N. Ann.* p. 206), M. E. de Jonquières généralisa cette question, et en donnant une solution entièrement géométrique, il montra que les dissidences de ses prédécesseurs n'étaient qu'apparentes.

Des cas particuliers de ce problème se présentant assez souvent, nous avons cru utile de faire connaître aux lecteurs de ce journal l'article remarquable de M. de Jonquières. C'est le but de cette note, dans laquelle nous trouvons un peu plus simplement que dans l'article précité, tous les résultats obtenus par l'éminent géomètre.

2. — Nous savons, et il est facile de le démontrer, que lorsque les côtés d'un angle de grandeur constante enveloppent une courbe, ils tracent sur la droite de l'infini du plan de la courbe deux divisions homographiques à points doubles imaginaires. D'après cette remarque, il est aisé de voir que le lieu géométrique peut être ramené à celui-ci :

Étant données sur la droite de l'infini d'un plan deux divisions

homographiques à points doubles imaginaires, trouver le lieu des points de rencontre des tangentes menées à une courbe fixe du plan, par les points homologues des deux divisions.

C'est ce problème que nous allons résoudre. Sa solution est évidemment la même que celle du problème qui fait l'objet de cet article.

3. — Soit une courbe C_n de la classe n et appelons *tangentes correspondantes* des tangentes menées des points homologues des divisions homographiques données.

Pour trouver le degré du lieu des points de rencontre des tangentes correspondantes, il nous suffit de chercher le nombre des points de ce lieu qui se trouvent sur la droite de l'infini.

Or, des tangentes correspondantes ne peuvent se couper sur la droite de l'infini qu'en deux points distincts imaginaires, qui sont les points e et f des deux divisions homographiques tracées sur cette droite. Le degré du lieu cherché sera donc la somme des degrés de multiplicité de ces points.

Au point e se trouvent deux faisceaux de n tangentes à la courbe Cn; ces droites se coupent en n^2 points. De même au point f se trouvent deux faisceaux qui se coupent en n^2 autres points. Ces deux groupes de points sont respectivement en e et en f, par suite ces points sont chacun de multiplicité n^2.

Le degré du lieu cherché est donc généralement $2n^2$.

4. — Mais remarquons que, parmi les diverses branches de la courbe, il y a $2n$ droites dont il faut faire abstraction ; le degré du lieu est alors

$$2n^2 - 2n = 2n\,(n - 1).$$

En effet, puisque le point e est double, il y a en ce point n tangentes à la courbe C_n qui coïncident et qui par suite font partie du lieu. Il en est de même au point f. Il y a donc bien en tout $2n$ droites imaginaires qui font partie du lieu.

On peut donc finalement énoncer le théorème suivant, qui est la solution générale du problème cherché :

Le lieu géométrique du sommet d'un angle de grandeur constante circonscrit à une courbe de classe n, *est généralement une courbe fermée de degré* 2n (n — 1).

5. — Dans le cas particulier où la courbe C_n est du genre *parabolique*, c'est-à-dire a pour tangente la droite de l'infini de son plan, cette droite fait $2(n-1)$ fois partie du lieu, et par suite le degré du lieu est seulement

$$2(n^2 - 2n + 1) = 2(n-1)^2.$$

En effet, il suffit de montrer que chaque point de la droite de l'infini est de multiplicité $2(n-1)$.

Or, prenons deux points homologues a et a' des divisions homographiques tracées sur cette droite. Par chacun des deux points a et a' passent un faisceau de $(n-1)$ tangentes à la courbe C_n, plus la droite de l'infini qui fait la n^{me} tangente. La droite de l'infini du faisceau de centre a' coupe le faisceau de centre a en un point a de multiplicité $(n-1)$: ces $(n-1)$ points font partie du lieu.

La droite de l'infini ayant une direction indéterminée, celle du faisceau du centre a pourra être considérée comme faisant avec chacune des $(n-1)$ droites de ce même faisceau un angle égal à l'angle donné : il s'ensuit que chacun des points d'intersection des $(n-1)$ droites du faisceau de centre a avec la droite de l'infini de ce faisceau donnera un point du lieu, ce qui fait $(n-1)$ points du lieu confondus au point a.

Le point a est donc un point de multiplicité $2(n-1)$, et comme il en est de même pour tout autre point de la droite de l'infini, cette droite fait $2(n-1)$ fois partie du lieu ; donc finalement, dans le cas particulier dont il s'agit, le degré du lieu est seulement $2n(n-1) - 2(n-1) = 2(n-1)^2$.

6. — Dans le cas du numéro (4) la courbe fermée est composée de deux branches, chacune de degré $n(n-1)$:

L'une engendrée par le sommet d'un angle égal à l'angle donné ;

L'autre, engendrée par le sommet d'un angle égal au supplément de l'angle donné.

A mesure que l'angle donné se rapproche d'un angle droit,

les points de ces courbes se rapprochent deux à deux, et lorsque l'angle donné est égal à un angle droit, le lieu se compose de deux courbes de degré $n(n-1)$ superposées.

On peut aisément vérifier ces résultats pour les coniques.

QUESTION 1

Solution par M. Griffon, commis d'intendance à Montpellier.

On considère un cercle M, *un diamètre fixe* AB, *et la tangente* CC' *à l'extrémité* B *de ce diamètre : par le point* A *on mène une transversale qui rencontre le cercle en* D, *et la bissectrice de l'angle* DAB *qui rencontre en* H *la tangente* CC' : *soit* O *le centre du cercle inscrit au triangle* ADB, *et* Δ *une droite perpendiculaire à* AO *par ce point* O. *Cette droite* Δ *rencontre le cercle décrit de* B *comme centre et avec* BH *comme rayon en deux points. Démontrer que le lieu géométrique décrit par l'un de ces points est une droite, le diamètre* AB : *l'autre point décrit une strophoïde. On démontrera cette double propriété par le calcul et la géométrie.*

SOLUTION ANALYTIQUE

Prenons l'origine au point B, AB pour axe des x, la tangente BH pour axe des y. Soit R le rayon du cercle donné, φ l'angle variable $\mathrm{BAH} = \frac{\mathrm{BAD}}{2}$.

L'équation de AH est $y = m(x + 2\mathrm{R})$, en posant

$$m = \operatorname{tg} \varphi.$$

On peut remarquer que $\mathrm{DBA} = 90 - 2\varphi$. Si on considère la bissectrice de l'angle DBA, qui donnera par son intersection avec AH le centre ω du cercle inscrit au triangle ADB, on a $\omega\mathrm{BA} = 45 - \varphi$, et $\omega\mathrm{B}x = \frac{3\pi}{4} + \varphi$.

L'équation de Bω est donc

$$y = x \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} + \varphi\right) = x\,\frac{-1 + \operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}\varphi} = x\,\frac{m-1}{m+1}.$$

Les coordonnées de ω sont donc données par

$$\begin{cases} y = m(x + 2R) \\ y = \dfrac{m-1}{m+1}\,x \end{cases}, \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} x' = -\dfrac{2Rm(m+1)}{m^2+1} \\ y' = -\dfrac{2Rm(m-1)}{m^2+1} \end{cases}$$

Par suite, l'équation de la droite Δ est

$$y + \frac{2Rm(m-1)}{m^2+1} = -\frac{1}{m}\left(x + \frac{2Rm(m+1)}{m^2+1}\right)$$

$$y + \frac{x}{m} = -\frac{2R(m+1)}{m^2+1} - \frac{2Rm(m-1)}{m^2+1}$$

$$= -\frac{2R}{m^2+1}(m + 1 + m^2 - m) = -2R$$

$$my + x + 2Rm = 0. \qquad (1)$$

On a $BH = 2Rm$. L'équation du cercle décrit de B comme centre avec BH pour rayon est donc

$$x^2 + y^2 = 4R^2m^2. \qquad (2)$$

En éliminant m entre (1) et (2), on a

$$x^2 + y^2 = \frac{4R^2x^2}{(y+2R)^2},$$

ou $$(x^2 + y^2)(y + 2R)^2 - 4R^2x^2 = 0.$$

C'est le lieu des points d'intersection de la droite Δ avec le cercle B.

En simplifiant, l'équation précédente devient

$$y^2(y + 2x)^2 + x^2y^2 + 4Rx^2y = 0;$$

d'où $$y = 0,$$

c'est la droite AB, et

$$x^2 = -\frac{y(y+2R)^2}{y+4R}.$$

c'est l'équation d'une strophoïde droite ayant pour sommet le point B, origine des coordonnées, pour point double le point $x = 0$, $y = -2R$ (c'est le point E de la figure), et pour asymptote la droite $y = -4R$.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

Soit M le point où la droite Δ rencontre le diamètre AB.

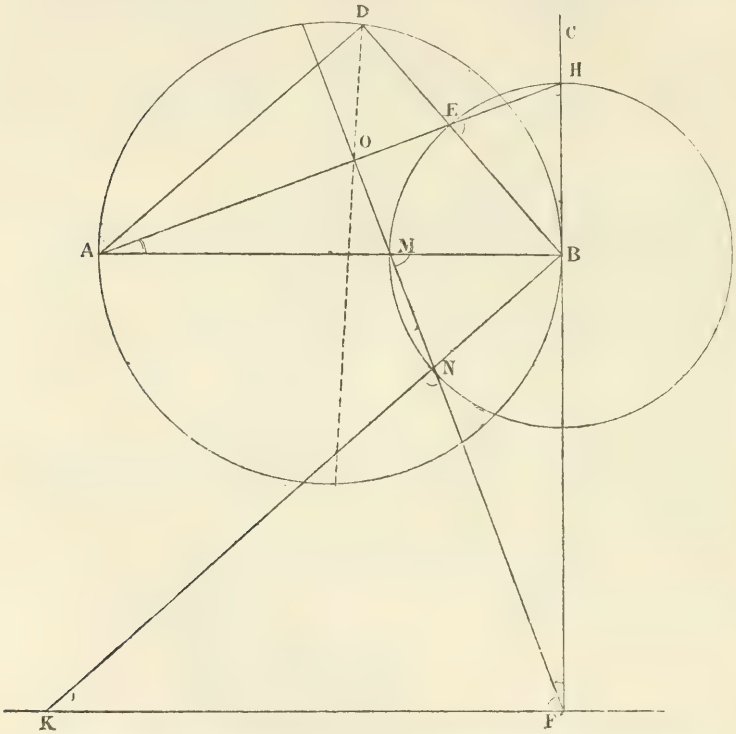
1° *Le lieu de* P *est la droite* AB. — Soit φ l'angle BAH; on

a déjà vu que $OBA = \frac{1}{2}(90 - 2\varphi) = 45 - \varphi$. Dans le triangle OMA, l'angle extérieur OMB est égal à $90 + \varphi$.

Il en résulte que dans le triangle OMB

$$OMB = 180 - (90 + \varphi) - (45 - \varphi) = 45^\circ.$$

Comme HOM est rectangle, OB est la bissectrice de l'angle MOH.



Si alors on considère le cercle circonscrit au quadrilatère MOHB (qui est évidemment inscriptible, puisque deux angles opposés sont droits), OB passe par le milieu du demi-cercle décrit sur MH comme diamètre, et BH = MB.

Donc M est sur le cercle B; c'est bien le point d'intersection de Δ avec ce cercle; comme c'est aussi le point d'intersection de Δ avec AB, le lieu de ce point est le diamètre AB.

2° *Le lieu de N est une strophoïde.* — Soit N le deuxième point de rencontre de Δ avec le cercle B. — Δ passe par un point fixe situé sur la tangente CC'. — Soit, en effet, F le point d'intersection de Δ et de CC'. Abaissons OI perpendiculaire sur AB; les triangles OPI, BPF sont semblables et donnent

$$\frac{BF}{OI} = \frac{BM}{IM} = \frac{BH}{FP},$$

puisque BM = BH.

Mais, dans le triangle BHA, on a $BH = 2R \operatorname{tg} \varphi$, et dans le triangle MOI, $MI = OI \operatorname{tg} \varphi$. Donc $\frac{BF}{OI} = \frac{2R \operatorname{tg} \varphi}{OI \operatorname{tg} \varphi}$, d'où BE = 2R, le point F est donc fixe sur CC'.

Cela posé, menons par F une parallèle à AB, et menons BN jusqu'à sa rencontre en K avec cette parallèle.

Il est évident que $OFH = \varphi$; donc $KFN = 90 - \varphi$.

Le triangle MBN est isoscèle et les angles à la base sont égaux à $90 - \varphi$; l'angle KNF opposé par le sommet à l'angle à la base MBN du triangle MNB, est lui aussi égal à $90 - \varphi$. Donc le triangle QKF est isoscèle, et KQ = KF.

Le lieu du point Q est donc, d'après une génération connue de la strophoïde, une strophoïde droite ayant le point B pour sommet et le point E pour point double.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Oger, à Saint-Servan; Mayon, lycée Henri IV, à Paris; Vazou, collège Rollin; Robillard, lycée Saint-Louis.

QUESTION 10

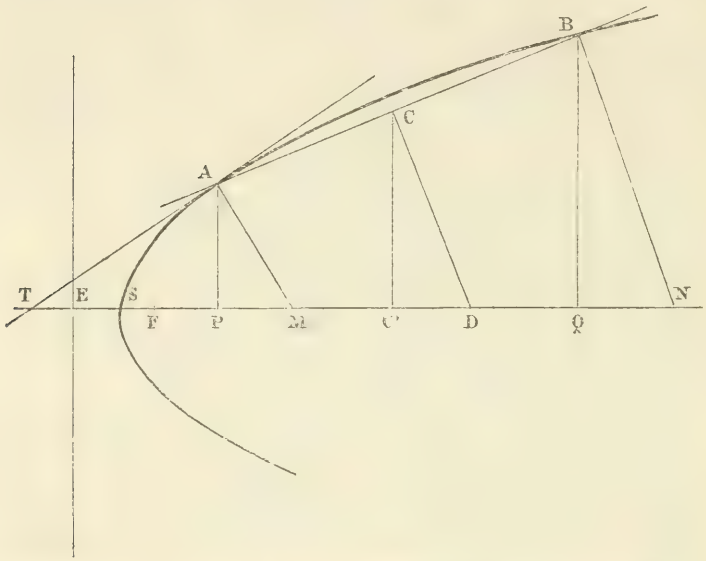
Solution par M. E GAULLAIDER, élève de mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis

Soit AB *une corde dans une parabole* C *le milieu de* AB. *On projette le point* C *en* C' *sur l'axe et on mène par ce point* C *une perpendiculaire à* AB, *perpendiculaire qui rencontre l'axe en* D.

Démontrer que quel que soit AB, CD *est constamment égal à* p. *Déduire de ce théorème une solution du problème qui consiste à trouver le sommet d'une parabole, connaissant deux points et l'axe de la courbe.*

Déduire aussi de la propriété précédente ce théorème connu que les normales A *et* B *coupent l'axe en des points équidistants du point* D.

L'équation de la parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet est $y^2 = 2px$.



Les coordonnées de A et de B étant respectivement (x_1, y_1), (x_2, y_2), on a

$$y_1^2 = 2px_1$$
$$y_2^2 = 2px_2.$$

L'équation de la droite CD perpendiculaire à AB est

$$\frac{y - \dfrac{y_1 + y_2}{2}}{x - \dfrac{x_1 + x_2}{2}} = \frac{x_2 - x_1}{y_1 - y_2};$$

en y faisant $y = 0$, on a

$$\frac{y_1 + y_2}{2x - x_1 - x_2} = \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}:$$

d'où $x = \dfrac{2px_1 - 2px_2 + x_1^2 - x_2^2}{2(x_1 - x_2)} = p + \dfrac{x_1 + x_2}{2}.$

C'est l'abscisse du point D. Alors

$$CD' = p + \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{x_1 + x_2}{2} = p.$$

C. Q. F. D.

Connaissant deux points A et B de la parabole on peut trouver le sommet. Pour cela soit CD perpendiculaire au milieu de AB et d'après ce qui précède $CD = p$. On abaisse AP perpendiculaire sur l'axe et on prend $PM = CD = p$. La droite AM est normale en A, la droite AT perpendiculaire à AM est la tangente en A qui rencontre l'axe en T, on prend le milieu S de la longueur TP, le point S est le sommet.

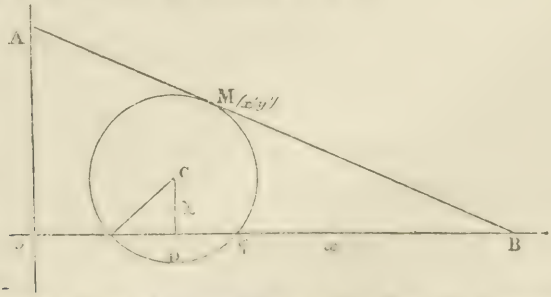
Puisque $PC' = C'Q$ et puisque $PM = CD = QN = p$. on en déduit $MD = DN$.

Nota. — La même question a été résolue par M. Th. Alexandre, élève de mathématiques spéciales au lycée d'Angers.

QUESTION 31

Solution par M. Griffon, commis d'intendance militaire à Montpellier.

On donne deux droites rectangulaires Ox, Oy ; *sur* Ox *deux points fixes* P *et* Q : *par ces points* P *et* Q *on fait passer une infinité de cercles* C *et on imagine les hyperboles* H, *qui ont pour asymptotes* Ox, Oy *et sont tangentes à* C. *Trouver le lieu des points de contact des courbes* H *et* C.



Soient p et q les abscisses des points P et Q. Posons

$$\frac{p+q}{2} = d = OD.$$

L'équation d'un cercle passant par P et Q est

$$(x-d)^2+(y-\lambda)^2=\lambda^2+(d-p)^2$$

ou $$x^2+y^2-2dx-2\lambda y+2pd-p^2=0. \qquad (1)$$

Soit M un point du lieu. La tangente commune en M à l'hyperbole H et au cercle C est partagée en deux parties égales par les asymptotes Ox, Oy et le point de contact. Si x', y' sont les coordonnées de M, on a

$$x'=\frac{OB}{2},\ y'=\frac{OA}{2}.$$

La tangente en x', y' au cercle (1) a pour équation

$$x(x'-d)+y(y'-\lambda)-dx'-\lambda y'+2pd-p^2=0.$$

Pour $y=0$ on a

$$OB=\frac{dx'+\lambda y'+p^2-2pd}{x'-d}=2x';$$

pour $x=0$ on a

$$\frac{OA=dx'+\lambda y'+p^2-2pd}{y'-\lambda}=2y'.$$

Ces deux équations donnent en rendant x', y' coordonnées courantes

$$2x^2-3dx-p^2+2pd=\lambda y$$
$$2y^2-dx-p^2+2pd=3\lambda y$$

et en éliminant λ on a pour l'équation du lieu

$$y^2-3x^2+4dx+p^2-2pd=0. \qquad (2)$$

C'est une hyperbole ayant ses axes parallèles aux axes de coordonnées.

L'équation (2) peut s'écrire

$$y^2-3\left(x-\frac{2d}{3}\right)^2+p^2-2pd+\frac{4d^2}{3}=0.$$

Transportons les axes de coordonnées parallèlement à eux-mêmes au point $y=0$, $x=\frac{2d}{3}$ par les formules

$$y=Y;\ x-\frac{2d}{3}=X.$$

L'équation (3) devient

$$3X^2-Y^2=(d-p)^2+\frac{d^2}{3}=K^2$$

et l'équation réduite est

$$\frac{X^2}{\left(\frac{K^2}{3}\right)}-\frac{Y^2}{K^2}=1.$$

L'hyperbole, lieu du point M est facile à construire. Elle a son centre sur Ox, en un point E, tel que $OE = \frac{2}{3}$ OD. On a aisément la longueur K, hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés sont $PD = d - p$ et $\frac{OD\sqrt{3}}{3} = \frac{d\sqrt{3}}{3}$. Les demi-axes de la conique ont alors pour longueur l'un l'axe transverse, dirigé suivant Ox, $\frac{K\sqrt{3}}{3}$, et l'autre, l'axe imaginaire, K. Le demi-angle des asymptotes a pour tangente

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3}$$
$$\varphi = 60^\circ.$$

On voit facilement que la branche de droite de l'hyperbole est la seule qui satisfasse réellement à la question.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Alexandre, d'Angers; Hellot, Lelieuvre, à Rouen.

QUESTION 32

Solution par M. Jaggi, élève de mathématiques spéciales au Lycée de Besançon.

On considère des cercles C *passant par le sommet d'une parabole* P *et tangents à cette courbe en un point différent du sommet.*

1° *Trouver l'équation générale des cercles* C;

2° *Trouver le lieu* U *des centres.*

Ce lieu est une parabole cubique ayant un point de rebroussement dont les coordonnées sont (p, o); *on demande de déterminer l'intersection de* U *et de* P. (G. L.)

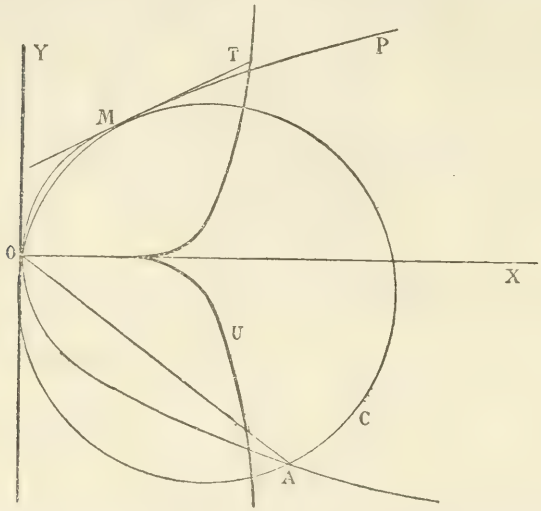
Soit $y^2 - 2px = 0$ l'équation de la parabole rapportée à son axe et à sa tangente au sommet.

Soit C un cercle passant par O et tangent à la parabole en M. Menons la tangente MT et joignons OA.

Les deux droites MT et OA, sécantes communes à un cercle et à une conique sont également inclinées sur les axes.

Soit $y - mx - \frac{p}{2m} = 0$ l'équation de la tangente MT; l'équation de OA sera

$$y + mx = 0.$$



L'équation du cercle cherché sera alors de la forme

$$y^2 - 2px + \lambda\left(y - mx - \frac{p}{2m}\right)(y + mx) = 0.$$

Exprimons que cette équation représente un cercle, on a

$$1 + \gamma = -\lambda m^2$$

$$\lambda = -\frac{1}{1 + m^2}.$$

L'équation cherchée est donc

$$(1 + m^2)(y^2 - 2px) - \left(y - mx - \frac{p}{2m}\right)(y + mx) = 0.$$

2° Le centre est donné par les équations

$$f'_x = 0$$

$$f'_y = 0$$

$f = 0$ représentant l'équation précédente. Ces équations se réduisent à

$$4m^3y + p = 0$$

$$4m^2(x - p) - 3p = 0.$$

Pour avoir le lieu du centre, éliminons m entre ces deux équations, on a

$$(4p - x)^3 + 27py^2 = 0.$$

Cette courbe est une parabole cubique dont le point de rebroussement est $x = p, \quad y = 0.$

3° Intersection de U et de P.

Il s'agit de résoudre le système

$$y^2 - 2px = 0,$$
$$4\,(p - x)^3 + 27py^2 = 0.$$

Remplaçons y^2 par $2px$ dans la seconde, on a

$$2x^3 - 6px^2 = 21p^2x - 2p^3 = 0,$$

équation qui n'a qu'une racine positive.

La courbe ne rencontre donc la parabole qu'en deux points réels, symétriques par rapport à Ox.

Pour trouver cette racine écrivons l'équation précédente sous la forme

$$2\,\frac{x^3}{p^3} - 6\,\frac{x^2}{p^2} - 21\,\frac{x}{p} - 2 = 0$$

et posons $\dfrac{x}{p} = x'$;

il vient $2x'^3 - 6x'^2 - 21x' - 2 = 0.$

La racine positive est 5,0985, racine approchée à 1/2 unité près du quatrième ordre décimal.

Donc $x = px' = 5{,}0985\,.p.$

Par suite les coordonnées des deux points d'intersection cherchés sont

$$x = 5{,}0985\ p \text{ et} \pm p\sqrt{5{,}0985 \times 2} = \pm\, 3{,}19\ p.$$

Note de la rédaction. — L'intersection de la parabole P et du lieu U n'est pas déterminée avec précision dans cette solution, et dans celles que nous avons reçues et que nous signalons plus loin.

L'équation qu'il faut résoudre est

$$27p^2.x = 2\,(x - p)^3$$

ou $54p^2.2x = 8\,(x - p)^3.$

Il est naturel de poser $\dfrac{2\,(x - p)}{p} = X$ pour ramener cette équation à la forme normale. On obtient ainsi l'équation

$$X^3 - 54X - 108 = 0$$

Cette équation admet la racine $X' = -6$, et l'on a

$$X^3 - 54X - 108 = (X + 6)(X^2 - 6X - 18).$$

La racine demandée est la racine positive de l'équation

$$X^2 - 6X - 18 = 0,$$

c'est-à-dire $$X'' = 3 + \sqrt{27}.$$

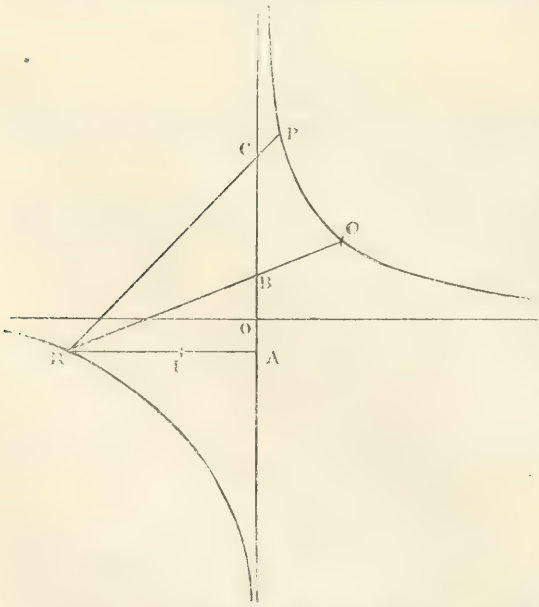
On a finalement $$x = p\,\frac{5 + \sqrt{27}}{2}.$$

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Percerau, à Besançon Alexandre, à Angers.

QUESTION 41

Solution par M. KAUFFMANN, élève au Lycée de Bordeaux.

On considère une hyperbole équilatère et une des asymptotes D *de cette courbe. Soient* P *et* Q *deux points fixes de l'hyperbole,* R *un point mobile sur cette hyperbole. 1° On demande le lieu des centres des cercles* C *circonscrits au triangle formé par les droites* RP, RQ *et* D; *2° ayant mené par* R *une perpendiculaire à* D, *cette droite rencontre* C *en un point* I, *autre que* R. *Trouver le lieu du point* I.



(G. L.)

Soit $xy = k^2$ l'équation de l'hyperbole équilatère. Je vais

d'abord chercher le lieu du point I. Soit A le point où la droite RI coupe l'asymptote D. Je désigne par α l'y du point P et par β l'y du point Q. En vertu d'une propriété de l'hyperbole $AB = \beta$, $AC = \alpha$.

Si donc je désigne par x et y les coordonnées du point I, $AI = x$, $AR = \frac{k^2}{y}$ et puisque $AI \,.\, AR = AB \,.\, AC$:

$$\alpha\beta = x \,.\, \frac{k^2}{y}$$

Équation d'une droite.

Je vais chercher maintenant le lieu des centres.

Soit y_1, l'y du point I. J'aurai

$$AI = \frac{\alpha\beta y_1}{k^2}, \quad AR = \frac{k^2}{y_1}.$$

Le centre se trouve sur une perpendiculaire élevée au milieu de RI. Je désigne par x, y les coordonnées de ce point.

J'aurai $$2x = \frac{\alpha\beta y_1}{k^2} + \frac{k^2}{y_1}.$$

De même $OB = \beta + y_1$ puisque y_1 est négatif.

$OA = \alpha + y_1$

J'aurai alors $2y = \alpha + \beta + 2y_1$.

L'équation du lieu sera alors

$$2k^2x\left(y - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) = k^4 + \alpha\beta\left(y - \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2.$$

En transportant les axes au point $x = 0, y = \frac{\alpha + \beta}{2}$, l'équation devient $2k^2 xy = k^4 + \alpha\beta y^2$.

Équation d'une hyperbole rapportée à son centre et ayant pour asymptotes les droites $y = 0$, $\alpha\beta y - 2k^2 x = 0$.

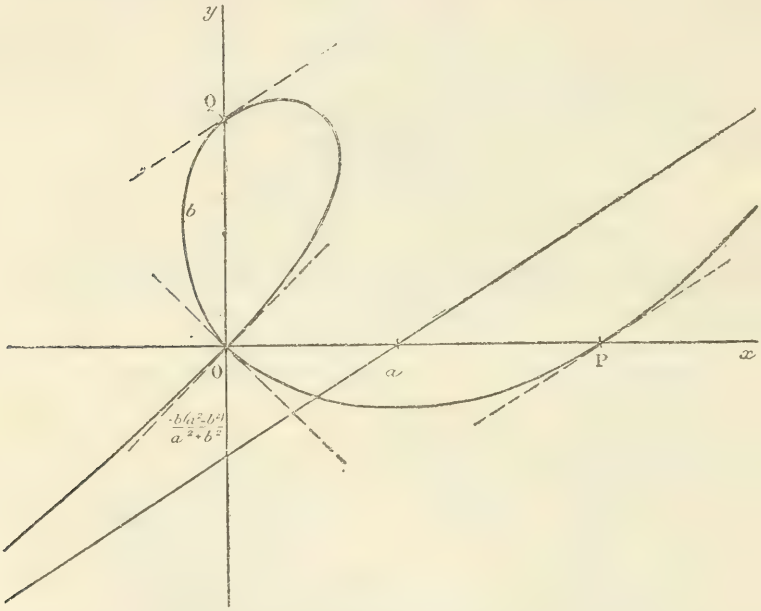
QUESTION 42

Solution par M. Pornay, élève au Lycée de Toulouse.

On considère deux droites rectangulaires Ox, Oy; *sur* Ox *un point fixe* P; *sur* Oy *un autre point fixe* Q. *Du point* O *comme*

centre avec un rayon supposé variable, on décrit un cercle C, *et des points* P *et* Q *on mène des tangentes au cercle* C; *ces tangentes se coupent en des points dont on demande le lieu géométrique.*

Prenons pour axes les deux droites données; soit a l'abscisse du point P, b l'ordonnée du point Q, r le rayon d'un cercle quelconque décrit du point O comme centre.



L'ensemble des tangentes menées du point P à ce cercle a pour équation $a^2y^2 = r^2[(x-a)^2 + y^2]$;
celui du point Q,

$$b^2x^2 = r^2[x^2 + (y-b)^2].$$

Éliminons r^2 entre ces deux équations; l'équation du lieu se présente sous la forme

$$\frac{a^2y^2}{b^2x^2} = \frac{(x-a)^2 + y^2}{x^2 + (y-b)^2}$$

qui devient après simplifications

$$b^2x^4 - a^2y^4 - (a^2 - b^2)x^2y^2 - 2ab^2x^3 + 2a^2by^3 + a^2b^2x^2 - a^2b^2y^2 = 0. \qquad (1)$$

Si nous considérons en particulier le cercle décrit du point O comme centre et tangent à la droite PQ, nous voyons que deux des tangentes menées des points P et Q se confondent suivant la droite PQ; cette droite fait donc partie du lieu et nous pouvons mettre le premier membre de son équation en facteur dans (1) qui devient alors

$$(bx + ay - ab)[(bx - ay)(x^2 + y^2) - ab(x^2 - y^2)] = 0. \quad (2)$$

Le lieu se compose donc de la droite PQ et de la cubique

$$(bx - ay)(x^2 + y^2) - ab(x^2 - y^2) = 0.$$

Cette cubique présente un point double à l'origine et les tangentes en ce point sont les bissectrices des angles des axes.

Elle passe par les points P et Q.

Au point Q la tangente a pour coefficient angulaire $\frac{b}{a}$. Elle est parallèle à la diagonale du rectangle construit sur OP, OM qui aboutit en O.

Au point P la tangente est parallèle à la même droite.

Enfin la seule direction asymptotique réelle est

$$bx - ay = 0.$$

A cette direction asymptotique correspond une asymptote dont l'ordonnée à l'origine est

$$-\frac{b(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2};$$

et cette ordonnée sera négative si nous supposons $a > b$.

Ces différentes remarques permettent de construire la courbe représentée par la figure.

Le cas où $a = b$ est remarquable. La cubique devient alors

$$(x - y)[x^2 + y^2 - a(x + y)] = 0$$

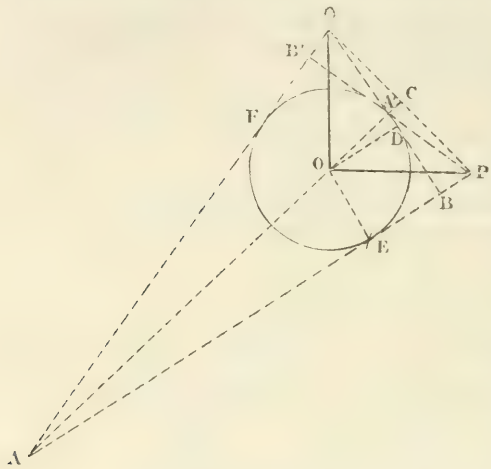
et se compose de la droite $x = y$ et du cercle qui a pour centre le centre du carré que l'on peut construire sur OP, OQ et passe par les sommets de ce carré.

Ce résultat pouvait se prévoir géométriquement.

1° Considérons le point A intersection des deux tangentes QF et PE ; joignons AO. La droite AO est bissectrice de l'angle QAP du triangle QAP. Or il est facile de voir que ce triangle est isoscèle ; donc cette droite est perpendiculaire à QP et par conséquent c'est la bissectrice de l'angle QOP.

Donc le lieu des points tels que A est la bissectrice de l'angle droit QOP. De même pour A'.

2° Considérons le point B intersection des deux tangentes PE et QB. Le quadrilatère ODBE est inscriptible, car les angles D et E sont droits. D'autre part, les deux angles DOQ et POE sont égaux dans les deux triangles égaux ODQ et POE. Donc POE est complémentaire de l'angle DOP. Donc l'angle DOE est droit et par conséquent l'angle DBE. Le lieu du point B est donc la circonférence décrite sur PQ comme diamètre. De même pour B'.



ERRATUM

La question 53, proposée dans le numéro de février doit être rétablie comme il suit :

Soient a, b, c, d, quatre coefficients consécutifs d'une équation algébrique réelle ; si l'équation

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$$

n'a pas ses trois racines réelles et distinctes, la question proposée a au moins deux racines imaginaires.

Le Rédacteur-Gérant,
E. VAZEILLE.

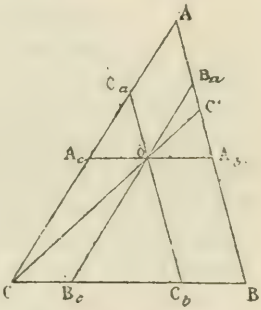
IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 3254-3.

QUELQUES THÉORÈMES

SUR LES DROITES MENÉES PAR UN POINT DU PLAN D'UN TRIANGLE PARALLÈLEMENT A SES COTÉS

Par M. **Émile Lemoine**, ancien élève de l'École polytechnique.

Étant donné un triangle ABC, *trouver un point* O *tel que si l'on mène par ce point des parallèles aux trois côtés, limitées à ces côtés, savoir* A_c A_b *parallèle à* CB, *etc, les parallélogrammes formés par deux de ces droites et par les deux côtés qui leur sont parallèles soient proportionnels aux* m^mes^ *puissances du troisième côté.*



Équation du lieu de O *si* m *varie d'une façon continue.*

En prenant CB pour axe des x, CA pour axe des y, appelant x et y les coordonnées du point O et exprimant les conditions de l'énoncé, on a facilement

$$bc^m x + a(c^m + a^m)y = abc^m \qquad (1)$$
$$b(b^m + c^m)x + ac^m y = abc^m \qquad (2)$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} x &= a\,\frac{a^m c^m}{b^m c^m + a^m c^m + a^m b^m} = a\,\frac{\dfrac{1}{b^m}}{\dfrac{1}{a^m} + \dfrac{1}{b^m} + \dfrac{1}{c^m}} \\ y &= b\,\frac{b^m c^m}{b^m c^m + a^m c^m + a^m b^m} = b\,\frac{\dfrac{1}{a^m}}{\dfrac{1}{a^m} + \dfrac{1}{b^m} + \dfrac{1}{c^m}} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

La remarque que l'on a $\dfrac{x}{y} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{m+1}$ permet de trouver facilement l'équation du lieu; quand m varie elle est

$$\frac{[ay]^{\log\frac{b}{c}}}{[bx]^{\log\frac{a}{c}}} = (ab - ay - bx)^{\log\frac{b}{a}} \qquad (4)$$

Cette remarque montre aussi que les distances du point O aux trois côtés sont proportionnelles aux $m + 1^{\text{mes}}$ puissances de ces côtés

Si donc on cherchait *le lieu du point dont les distances aux trois côtés soient proportionnelles aux* m^{mes} *puissances de ces côtés, on trouverait l'équation* (4).

Si l'on appelle C′ le point où CO coupe AB, on trouve

$$\frac{C'B}{C'A} = \frac{b^m}{a^m}.$$

(Voir Comptes rendus du Congrès d'Alger de l'Association française, Brocard, p. 150.)

D'où, si l'on cherchait

Le lieu du point O tel que si l'on joint ce point aux trois sommets, les côtés opposés sont divisés par ces droites en segments inversement proportionnels aux puissances m^{mes} *des côtés adjacents, on trouverait aussi l'équation* (4).

Pour $m = -2$ les formules (3) donnent pour O le centre des médianes antiparallèles.

Pour $m = -1$ les formules (3) donnent pour O le centre du cercle inscrit.

Pour $m = 0$ les formules (3) donnent pour O le centre de gravité.

Pour $m = 1$ on voit facilement que l'on a

$$B_cC_b = B_aA_b = A_cC_a = \frac{abc}{ab + ac + cb},$$

c'est-à-dire *que O est le point tel que les différences entre un côté et la partie de la parallèle à ce côté comprise entre les deux autres menées par ce point soit la même pour les trois côtés.*

Ce point est celui que l'on obtient par le concours des droites qui joignent à un sommet le point symétrique par rapport au milieu du côté du pied de la bissectrice qui tombe sur ce côté.

Pour $m = 2$ on trouve que l'on a

$$\frac{B_cC_b}{b \times c} = \frac{C_aA_c}{c \times a} = \frac{A_bB_a}{a \times b} = \frac{abc}{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}.$$

C'est-à-dire que les parties des côtés comprises entre deux parallèles sont proportionnelles aux produits des deux autres côtés, etc.

En général, si l'on appelle avec M. de Longchamps *points réciproques* deux points tels, que si on les joint aux sommets d'un triangle ils coupent les côtés opposés en deux points symétriques par rapport au milieu de ce côté, on peut dire: *A tout point* O *du lieu défini par une valeur de* m *dans les équations* (1) *et* (2) *correspond pour la valeur de* m *égale et de signe contraire un point* O′ *défini par les équations*

$$x = a.\frac{b^m}{a^m + b^m + c^m}$$

$$y = b.\frac{a^m}{a^m + b^m + c^m}$$

et tel que O *et* O′ *sont réciproques. Le lieu de* O *et le lieu de* O′ *se confondent. Donc le lieu de* O *défini par* (4) *est aussi le lieu du point tel que si on le joint aux trois sommets, les côtés opposés sont divisés par ces droites en segments proportionnels aux puissances des côtés adjacents.*

On trouve facilement

$$\overline{CC'}^2 = \frac{a^{2m+2} + b^{2m+2} + a^m b^m (a^2 + b^2 - c^2)}{(a^m + b^m)^2}$$

$$\overline{OA}^2 = \frac{a^{2m}\,[b^{2m+2} + c^{2m+2} + c^m b^m (c^2 + b^2 - a^2)]}{[b^m c^m + a^m c^m + a^m b_m]^2}$$

Remarquons que l'on a

$$B_c C_b \times a^{m-1} = C_a A_c \times b^{m-1} = A_b B_a \times c^{m-1}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{a^m} + \frac{1}{b^m} + \frac{1}{c^m}}.$$

Le lieu du point O est donc encore *le lieu du point tel que si par ce point on mène des parallèles aux trois côtés, les portions des côtés comprises entre ces parallèles sont proportionnelles aux inverses de puissances de ces côtés.*

On trouverait le même lieu si avec l'énoncé précédent l'on disait: *sont proportionnelles aux puissances de ces côtés*, au

lieu de : *aux inverses des puissances.* Nous avons établi cette dualité dans les énoncés en considérant les points réciproques O et O'; mais il était évident que, algébriquement, le lieu de O correspondant aux puissances m serait le même lieu que celui qui correspondait aussi aux inverses de ces puissances, puisque nous faisons varier m de $-\infty$ à $+\infty$ et que m passe toujours par deux valeurs égales de signe contraire, ce qui correspond à une puissance et à l'inverse de cette puissance.

On ferait des remarques analogues sur *le lieu des points tels que si l'on mène par ces points des parallèles aux trois côtés d'un triangle, les parties de ces parallèles comprises entre deux des côtés soient proportionnelles aux puissances ou aux inverses des puissances du troisième.*

Voici encore deux théorèmes simples sur les segments déterminés sur les côtés d'un triangle par les trois parallèles aux trois côtés menés par un point O du plan; *ils sont presque évidents;* mais je ne crois point qu'ils aient été énoncés, et comme leurs réciproques peuvent servir dans certains cas à prouver que trois droites concourent ou ne concourent pas en un même point, il me semble utile de les signaler.

Considérons les neuf segments suivants :

Deux segments interceptés sur les deux côtés entre le troisième côté et sa parallèle menée par O, en tout six; un segment intercepté sur chaque côté entre les parallèles aux deux autres, en tout trois.

Théorème I. — *Si l'on numérote 1, 2, 3, 4, 5, 6, en tournant dans le sens* CBA *les six segments de la première espèce, le produit des trois segments de rang pair égale le produit des trois segments de rang impair et égale aussi le produit des trois segments de la seconde espèce.*

Avec les notations déjà adoptées, ce théorème s'écrit ainsi :

$$AC_a \times BA_b \times CB_c = AB_a \times BC_b \times CA_c$$
$$= B_cC_b \times A_cC_a \times B_aA_b.$$

Théorème II. — *Sur chaque côté il y a trois de ces neuf segments; on peut les ranger, quel que soit* O, *de façon que les longueurs des trois segments soient — mais les segments n'étant*

pas pris dans le même ordre sur chaque côté — proportionnelles aux longueurs des trois segments d'un quelconque des deux autres côtés.

Avec les notations adoptées, CB_c, B_cC_b, C_bB, sont proportionnels à C_aA_c, A_cC, AC_a et à B_aA, BA_b, A_bB_a.

Ces deux théorèmes sont presque évidents en observant que les longueurs des segments considérés sont celles des côtés des trois triangles semblables OB_cC_b, OC_aA_c, OA_bB_a.

Le théorème I donne lieu aux remarques suivantes :

1° Les trois segments impairs de première espèce sont égaux entre eux, pour le point

$$S\begin{cases} x = \dfrac{abc}{bc + ac + ab}, \\ y = \dfrac{ab^2}{bc + ac + ab} \text{ et égaux à } \dfrac{abc}{bc + ac + ab}. \end{cases}$$

2° Les trois segments pairs de première espèce sont égaux entre eux et ont alors évidemment la même valeur commune que précédemment, pour le point

$$S'\begin{cases} x = \dfrac{a^2b}{bc + ac + ab}, \\ y = \dfrac{abc}{bc + ac + ab}. \end{cases}$$

Si par le pied d'une bissectrice sur un côté on mène des parallèles aux deux autres côtés, ces parallèles coupent les côtés en deux points, en tout six points sur les trois côtés ; si l'on joint ces six points chacun au sommet opposé au côté sur lequel est le point, on a six droites dont trois passent en S et trois en S'.

3° Les trois segments de seconde espèce sont égaux entre eux et ont alors évidemment la même valeur commune que précédemment, pour le point

$$\begin{cases} x = \dfrac{a^2c}{bc + ac + ab}, \\ y = \dfrac{b^2c}{bc + ac + ab}. \end{cases}$$

Ce dernier point est le réciproque (voir plus haut) du centre du cercle inscrit.

4° Si le point O est sur une droite passant par C, le maximum du produit des trois segments aura lieu au point d'intersection avec la parallèle à AB menée par le centre de gravité.

5° Si le point O est sur une droite parallèle à AB, le maximum du produit des trois segments aura lieu au point d'intersection avec la droite joignant C au centre de gravité.

6° Le produit des trois segments sera maximum lorsque O sera au centre de gravité et aura pour valeur $\frac{abc}{27}$.

Pour terminer cette étude, nous énoncerons la propriété suivante :

Dans un triangle, si l'on joint le centre du cercle inscrit aux pieds des trois bissectrices extérieures, on a trois droites telles que si d'un de leurs points on abaisse des perpendiculaires sur les trois côtés, les longueurs de ces trois perpendiculaires forment une progression arithmétique.

UN LIEU GÉOMÉTRIQUE

Le problème que nous nous proposons n'est pas nouveau ; on en a déjà donné la solution par des considérations de simple géométrie; nous n'avons d'autre but que de montrer une fois de plus comment l'emploi raisonné des méthodes de la géométrie cartésienne peut conduire à des constructions géométriques assez élégantes, sans aucun tour de force, en ne se servant que des formules les plus connues.

L'équation générale des coniques (axes rectangulaires) qui ont pour directrice une droite donnée oy est

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+\lambda x^2=0\,;$$

si on assujettit ces courbes à toucher les deux droites

$$px+qy-1=0, \text{ et } p'x+q'y-1=0,$$

on trouve sans peine les deux conditions

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+A)B-C^2&=0\\(\lambda+A')B'-C'^2&=0\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

où l'on a posé $\quad A=p^2(\alpha^2+\beta^2)-2p\alpha+1$

$$B = q^2(\alpha^2 + \beta^2) - 2q\beta + 1$$
$$C = pq(\alpha^2 + \beta^2) - q\alpha - p\beta$$
$$A' = p'^2(\alpha^2 + \beta^2) - 2p'\alpha + 1$$
$$B' = q'^2(\alpha^2 + \beta^2) - 2q'\beta + 1$$
$$C' = p'q'(\alpha^2 + \beta^2) - q'\alpha - p'\beta$$

Or on trouve, en effectuant les opérations, que

$$A \,.\, B - C^2 = (p\alpha + q\beta - 1)^2$$
$$A' \,.\, B' - C'^2 = (p'\alpha + q'\beta - 1)^2$$

de sorte que l'élimination de λ entre les équations (1) nous donne, pour le lieu du foyer conjugué à la directrice donnée, l'équation

$$[q^2(\alpha^2 + \beta^2) - 2q\beta + 1]\,(p'\alpha + q'\beta - 1)^2 -$$
$$[q'^2(\alpha^2 + \beta^2) - 2q'\beta + 1]\,(p\alpha + q\beta - 1)^2 = 0$$

c'est le lieu que nous nous proposons d'étudier d'après son équation.

Pour donner aux diverses lettres une signification uniforme, je veux dire, pour que toutes les lettres indiquent des longueurs, je pose

$$p = \frac{1}{a},\ q = \frac{1}{b},\ p' = \frac{1}{a'},\ q' = \frac{1}{b'},$$

et l'équation du lieu, en reprenant pour les coordonnées mobiles la notation habituelle, sera

$$(U)\ a^2(x^2 + y^2 - 2by + b^2)\,(b'x + a'y - a'b')^2 -$$
$$a'^2(x^2 + y^2 - 2b'y + b'^2)\,(bx + ay - ab)^2 = 0$$

que nous écrirons sommairement

$$a^2 \,.\, C \,.\, T'^2 - a'^2 C' \,.\, T^2 = 0:$$

or, soit

$$C = (y - b)^2 + x^2 = (y - b + ix)\,(y - b - ix) = I \,.\, J$$

et

$$C' = (y - b')^2 + x^2 = (y - b' + ix)\,(y - b' - ix) = I' \,.\, J'$$

et l'équation du lieu devient

$$a^2 . I . J . T'^2 - a'^2 . I' . J' . T^2 = 0$$

ce qui nous montre immédiatement que le point de concours S des deux tangentes fixes est un point double du lieu; mais les deux droites I, J se croisent sur la directrice donnée en son point de rencontre B avec la tangente T; de même les droites I', J' se croisent sur la directrice donnée en son point de rencontre B' avec la tangente T'; d'où l'on con-

clut immédiatement que les points B et B′ sont aussi des points doubles du lieu total.

Mais les directions asymptotiques du lieu total sont fournies par l'équation

$$(x^2 + y^2)\,[a^2\,(b'x + a'y)^2 - a'^2\,(bx + ay)^2] = 0$$

ou bien $$(x^2 + y^2)\,.\,x\left[\frac{bx + ay}{a} + \frac{b'x + a'y}{a'}\right] = 0$$

ou bien

$$(x^2+y^2)\left[\frac{bx+ay}{a} - \frac{b'x + a'y}{a'}\right]\left[\frac{bx + ay}{a} + \frac{b'x + a'y}{a'}\right] = 0$$

ce sont donc : 1° les deux directions asymptotiques de tous les cercles du plan ; 2° la directrice donnée ; 3° la médiane SG du triangle BSB′ ; nous voyons donc que la directrice donnée a cinq points sur le lieu géométrique ; donc elle en constitue une branche séparée, et, après avoir enlevé cette branche, il restera une courbe du troisième degré qui a pour points simples les points B et B′, qui a encore pour point double le point S ; et ses directions asymptotiques sont la médiane SG et les deux directions asymptotiques de toute circonférence.

Voyons à déterminer une construction continue du lieu : soit $T = \lambda T'$, il vient

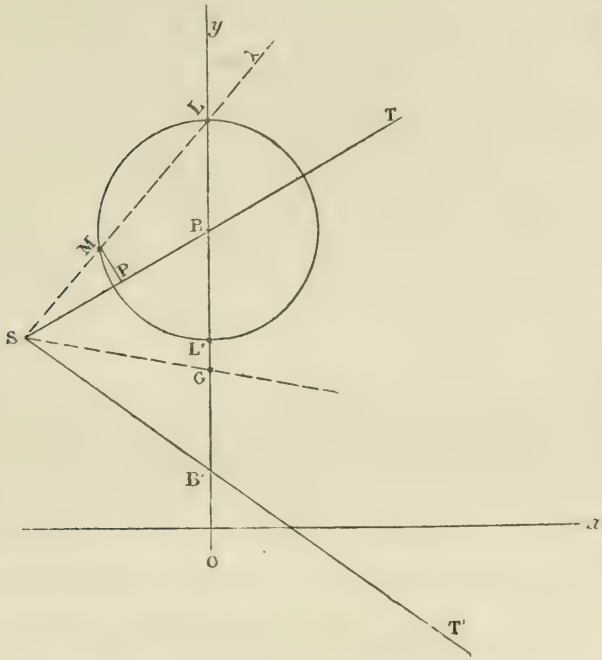
$$a^2(x^2 + y^2 - 2by + b^2) - \lambda^2 a'^2\,(x^2 + y^2 - 2b'y + b'^2) = 0$$

ce qui donne l'intersection d'une droite menée à volonté par le point S avec une circonférence : or on voit sans peine que cette circonférence passe au point L où la droite mobile coupe oy ; si donc on construit L′ conjugué de L relativement au segment BB′, la circonférence est décrite sur LL′ comme diamètre ; on peut donc formuler comme il suit la construction géométrique du lieu total :

Par le point S, menez une transversale à volonté $S\lambda$ qui coupe oy en un point L ; et prenez L′ conjugué de L relativement au segment BB′ ; la circonférence décrite sur LL′ comme diamètre coupera $S\lambda$ en deux points L et M ; le lieu de ces deux points est le lieu total du quatrième ordre, qui se compose de la droite oy et d'une cubique que décrira le point M.

Cette construction donne sans peine les tangentes au point

double S; car lorsque la circonférence mobile passera au point S, Sλ devra être également inclinée sur SB et sur SB′; donc les tangentes au point double S sont deux droites



rectangulaires entre elles, et bissectrices des deux droites fixes SB, SB′; ce nouveau fait, joint à ceux qui sont déjà établis, permet d'affirmer que la cubique actuelle est une *focale à nœud* de Quételet.

Remarque. — L'équation du lieu (U) peut s'écrire :

$$a^2 \,.\, \overline{MB}^2 \,.\, \overline{MP'}^2 \,.\, \overline{A'B'}^2 = a'^2 \,.\, \overline{MB'}^2 \,.\, \overline{MP}^2 \,.\, \overline{AB}^2$$

ou

$$\frac{MB}{MB'} = \frac{MP}{MP'} \cdot \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{a'}{a}.$$

Cette relation conduit, en sens inverse, à la construction du lieu par l'intersection d'une droite et d'un cercle; car se donner arbitrairement $\frac{MP}{MP'}$, c'est se donner une droite

$S\lambda$, d'où résulte le rapport $\frac{MB}{MB'}$ qui détermine la circonférence correspondante.

Autre remarque. — On voit, par l'exemple qui précède, que l'étude d'un lieu géométrique, même décomposable, se peut faire simplement sur le lieu total, plus simplement même que si l'on effectuait d'abord la décomposition; cela tient sans doute à ce que l'équation totale obtenue par des méthodes d'élimination correctes et générales, garde, dans sa forme première, comme l'image algébrique des propriétés et du mode de génération le plus élégant de la courbe.

On rencontre d'ailleurs bien souvent des faits de même nature; c'est ainsi, par exemple, que pour construire les racines d'une équation du troisième degré, on trouve utile de l'élever au quatrième degré par l'introduction d'une racine convenablement choisie; ce qui permet de construire les racines par l'intersection d'une parabole et d'une circonférence; c'est ainsi encore que la détermination des trois sommets du triangle polaire conjugué commun à deux coniques dépend de l'intersection de deux coniques que l'on fait passer chacune par un même quatrième point pris à volonté sur le plan. E. V.

NOTE SUR LA FORMULE DE TAYLOR

Par M. **A. Parpaite.**

Les différentes formes du reste données généralement dans les cours sont des conséquences de la formule

$$R = \frac{(1-\theta)^{n-p}\, h^n}{n-1!\; p}\, f^n(x+\theta h).$$

Il est aisé de faire voir que celle-ci n'est qu'un cas très particulier d'une autre extrêmement générale.

Posons

$$f(x+h) - f(x) - hf'(x \; - \ldots - \frac{h^{n-1}}{n-1!}\, f^{n-1}(x)$$
$$- P\varphi(h) = 0 \qquad (1)$$

x et $x + h$ sont deux valeurs prises entre les limites a, b entre lesquelles $f(x)$ et ses n premières dérivées sont continues ; $\varphi(h)$ est une fonction continue de h ainsi que sa dérivée entre les limites où h se trouve compris, $\varphi(h)$ est en outre assujettie à la condition $\varphi(o) = 0$; P est une certaine fonction de x et de h à déterminer pour que l'égalité (1) ait lieu.

Remplaçons h par $x_1 - x$ dans (1) ; nous avons

$$f(x_1) - f(x) - (x_1 - x) f, (x) - \ldots$$
$$- \frac{(x_1 - x)^{n-1}}{n - 1!} f^{n-1}(x) - P\varphi(x_1 - x) = 0. \quad (2)$$

Mettons partout, *excepté dans* P, z au lieu de x et faisons varier z, la fonction

$$F(z) = f(x_1) - f(z) - (x_1 - z) f'(z) - \ldots$$
$$- \frac{(x_1 - z)^{n-1}}{n - 1!} f^{n-1}(z) - P\varphi(x_1 - z) \quad (3)$$

est nulle pour $z = x$ ainsi que pour $z = x_1$, dans l'intervalle elle est continue; il en est de même de sa dérivée; donc il existe au moins une valeur intermédiaire de z, $x + \theta(x_1 - x)$ qui annule $F'(z)$, θ étant un nombre compris entre 0 et 1. Portons cette valeur de z dans la dérivée:

$$F'(z) = -\frac{(x_1 - z)^{n-1}}{n - 1!} f^n(z) + P\varphi'(x_1 - z);$$

on déduira

$$P = \frac{(1 - \theta)^{n-1}(x_1 - x)^{n-1}}{n - 1!} \quad \frac{f^n[x + \theta(x_1 - x)]}{\varphi,[(1 - \theta)(x_1 - x)]}$$

d'où en remplaçant x_1 par $x + h$

$$R = \frac{(1 - \theta) h^{n-1} \varphi(h)}{n - 1! \varphi'[(1 - \theta) h]} f^n(x + \theta h). \quad (4)$$

C'est la formule que nous voulions établir.

Il est à peine besoin de faire remarquer que si nous posons $\varphi(h) = h^p$

la formule (4) devient

$$R = \frac{(1 - \theta)^{n-p} h^n}{n - 1! p} f^n(x + \theta h)$$

qui est la formule de M. Schlomilch.

Si l'on pose $\varphi(h) = L(1 + h)$ ou $\sin kh$, etc., on déduira autant de formes du reste qu'on voudra.

CONCOURS D'AGRÉGATION 1881

Solution par M. Levavasseur, élève au Lycée Charlemagne.

On donne un ellipsoïde. On considère des droites D *telles que si par chacune d'elles on mène des plans tangents à l'ellipsoïde, les normales aux points de contact,* M *et* M', *soient dans un même plan. 1° Démontrer que la droite* D *et la droite des contacts* MM' *sont rectangulaires. 2° Trouver le lieu des droites* D *qui passent par un point donné* A. *3° Ce lieu est un cône du second degré. Trouver le lieu des positions du point* A *pour lesquelles ce cône est de révolution. 4° Trouver l'enveloppe* C *des droites* D *qui sont contenues dans un plan donné* P, *et trouver la surface* S *engendrée par* C *quand* P *se déplace parallèlement à un plan donné* Q. *5° Trouver pour quelle direction de* Q *la surface* S *est de révolution.*

1° Géométriquement, cette propriété est évidente : considérons en effet le plan des deux normales ; il est perpendiculaire à chacun des plans tangents, donc perpendiculaire à leur intersection, c'est-à-dire à la droite D. La droite MM' qui est dans le plan des deux normales est donc bien perpendiculaire à la droite D.

On peut le démontrer analytiquement de la manière suivante : soient x', y', z' les coordonnées du point M; x'', y'', z'' celles du point M'. La normale au point M à l'ellipsoïde a pour équations $\frac{a^2(x-x')}{x'} = \frac{b^2(y-y')}{y'} = \frac{c^2(z-z')}{z'}$;

ou bien
$$a^2z'x = c^2x'z + (a^2-c^2)z'x';$$
$$b^2z'y = c^2y'z + (b^2-c^2)y'z'.$$

Un plan passant par cette normale aura pour équation
$$a^2z'x - c^2x'z - (a^2-c^2)z'x'$$
$$+ \lambda[b^2z'y - c^2y'z - (b^2-c^2)y'z'] = 0. \qquad (A)$$

Les équations de la normale au point M' sont
$$x = \frac{c^2x''}{a^2z''}z + \frac{(a^2-c^2)x''}{a^2}; \; y = \frac{c^2y''}{b^2z''}z + \frac{(b^2-c^2)}{b^2}y''.$$

Pour qu'un plan $Ax + By + Cz + D = 0$ passe par la droite $x = az + p$, $y = bz + q$, il faut que l'on ait $Aa + Bb + C = 0$ et $Ap + Bq + D = 0$, c'est-à-dire que pour que le plan (A) passe par la normale au point M', on doit avoir

$$x^2z' \frac{c^2x''}{a^2z''} + \lambda b^2z' \frac{c^2y''}{b^2z''} - c^2(x' + \lambda y') = 0$$

ou

$$\lambda = \frac{z'x'' - z''x'}{y'z'' - y''z'} \qquad (1)$$

$$\text{et } a^2z' \frac{(a^2 - c^2)x''}{a^2} + \lambda b^2z' \frac{(b^2 - c^2)y''}{b^2}$$

$$- z'z[(a^2 - c^2)x + \lambda(b^2 - c^2)y'] = 0$$

ou

$$(a^2 - c^2)(x'' - x') + \lambda(b^2 - c^2)(y'' - y') = 0 \qquad (2)$$

En éliminant λ entre les relations (1) et (2), on trouve la condition que doivent remplir les coordonnées des points M et M' pour que les normales en ces points à l'ellipsoïde se rencontrent, savoir :

$$(a^2 - c^2)(x' - x'')(y''z' - y'z'')$$
$$+ (b^2 - c^2)(y' - y'')(z''x' - z'x'') = 0. \qquad (B)$$

Les équations de la droite D sont

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} - 1 = 0;$$

$$\frac{xx''}{a^2} + \frac{yy''}{b^2} + \frac{zz''}{c^2} - 1 = 0,$$

ou, sous forme réduite

$$\frac{x}{a^2}(x'y'' - x''y') + \frac{z}{c^2}(y''z' - z''y') = y'' - y',$$

et

$$\frac{y}{b^2}(x''y' - x'y'') + \frac{z}{c^2}(z'x'' - z''x') = x'' - x'. \qquad (H)$$

Les conditions de perpendicularité de cette droite avec le plan (A) exigent d'abord que l'on ait

$$\lambda \frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} \frac{z'x'' - z''x'}{y'z'' - y''z'}.$$

Ainsi nous retrouvons pour λ la même valeur qu'en exprimant que le plan (A) passe par la normale en M' à l'ellipsoïde. La deuxième condition est satisfaite d'elle-même, car $x'(y'z'' - y''z') + y'(z'x'' - z''x') + z'(x'y'' - x''y')$ est identiquement nul.

2° Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point fixe A. Les équations des droites D sont alors

$$\frac{x-x_0}{a^2}(x'y''-x''y')+\frac{z-z_0}{c^2}(y''z'-z''y')=0;$$

$$\frac{y-y_0}{b^2}(x''y'-x'y'')+\frac{z-z_0}{c^2}(z'x''-z''x')=0$$

ou bien $$\frac{y''z'-z''y'}{\dfrac{x-x_0}{a^2}}=\frac{x''y'-x'y''}{\dfrac{z-z_0}{c^2}}=\frac{z''x'-z'x''}{\dfrac{y-y_0}{b^2}}.$$

On a d'ailleurs d'après les équations (H) de la droite D

$$\frac{x'-x''}{y'-y''}=\frac{\dfrac{x_0}{a^2}(x'y''-x''y')+\dfrac{z_0}{c^2}(y''z'-y'z'')}{\dfrac{y_0}{b^2}(x''y'-x'y'')+\dfrac{z_0}{c^2}(z'x''-z''x')}$$

$$=\frac{b^2}{a^2}\,\frac{z_0x-zx_0}{y_0z-yz_0}.$$

Donc, en tenant compte de la condition (B), le lieu de la droite D est le cône du second degré

$$(a^2-c^2)(x-x_0)(yz_0-zy_0)+(b^2-c^2)(y-y_0)(zx_0-xz_0)=0.$$

On peut écrire l'équation de ce cône comme il suit :

$$(a^2-b^2)z_0(x-x_0)(y-y_0)+(b^2-c^2)x_0(y-y_0)(z-z_0)$$
$$+(c^2-a^2)y_0(z-z_0)(x-x_0)=0.$$

Il en résulte que le lieu est le cône qui passe par les six normales menées du point A à l'ellipsoïde. C'est donc un cône trirectangle passant par l'origine.

3° Pour que ce cône soit de révolution, comme les coefficients des termes en x^2, en y^2 et en z^2 sont nuls, la condition

$$A-\frac{B'B''}{B}=A'-\frac{B''B}{B'}=A''-\frac{BB'}{B''}$$

devient

$$\frac{B'B''}{B}=\frac{B''B}{B'}=\frac{BB'}{B''}$$

ou

$$B^2=B'^2=B''^2.$$

On doit donc avoir

$$(b^2-c^2)^2x^2_0=(c^2-a^2)^2y^2_0=(a^2-b^2)^2z^2_0,$$

ce qui donne, si l'on considère x_0, y_0, z_0 comme des coordonnées courantes, quatre droites issues de l'origine.

4° Soient $Ax+By+Cz+D=0$ l'équation d'un plan quel-

conque P, et x_o, y_o, z_o les coordonnées d'un point de ce plan. On a $Ax_o + By_o + Cz_o + D = 0$. Les droites D du plan P qui passent par un point donné x_o, y_o, z_o de ce plan, sont à l'intersection du plan P avec le cône des six normales issues du point considéré à l'ellipsoïde. L'équation du cône est $(a^2 - c^2)(x - x_o)(yz_o - zy_o) + (b^2 - c^2)(y - y_o)(zx_o - xz_o) = 0$. D'ailleurs

$$z = -\frac{Ax + By + D}{C} \text{ et } z_o = -\frac{Ax_o + By_o + D}{C}.$$

Par conséquent l'équation de la projection du système des deux droites D considérées sur le plan des xy sera

$$(a^2 - c^2)(x - x_o)[y_o(Ax + By + D) - y(Ax_o + By_o + D)]$$
$$+ (b^2 - c^2)(y - y_o)[x(Ax_o + By_o + D) - x_o(Ax + By + D)]$$
$$= 0$$

ou $(a^2 - c^2)(x - x_o)[Ax(y_o - y) + Ay(x - x_o) + D(y_o - y)]$
$+ (b^2 - c^2)[Bx(y_o - y) + By(x - x_o) + D(x - x_o)] = 0$
ou enfin
$(a^2 - c^2)Ay(x - x_o)^2 + (c^2 - b^2)Bx(y - y_o)^2 - [(a^2 - c^2)Ax + (c^2 - b^2)By - (b^2 - a^2)D](x - x_o)(y - y_o) = 0.$

Prenons les dérivées partielles de ces équations par rapport aux binômes $y - y_o$, $x - x_o$:

$$\begin{cases} 2(a^2 - c^2)Ay(x - x_o) \\ = [(a^2 - c^2)Ax + (c^2 - b^2)By - (b^2 - a^2)D](y - y_o); \\ 2(c^2 - b^2)Bx(y - y_o) \\ = [(a^2 - c^2)Ax + (c^2 - b^2)By - (b^2 - a^2)D](x - x_o). \end{cases}$$

Multiplions membre à membre et nous aurons pour les équations de l'enveloppe

$$4(a^2 - c^2)(c^2 - b^2)AB\,xy = [a^2 - c^2)Ax + (c^2 - b^2)By$$
$$- b^2 - a^2)D]^2 \text{ avec } Ax + By + Cz + D = 0.$$

L'enveloppe est donc une parabole. L'équation générale d'un plan parallèle au point Q étant $Ax + By + Cz + \lambda = 0$, pour avoir l'équation de la surface engendrée par la parabole enveloppe des droites D lorsque P se déplace parallèlement au plan Q, il suffira d'éliminer le paramètre variable D entre l'équation de la parabole et du plan P. Cette surface a donc pour équation

$$4(a^2 - c^2)(c^2 - b^2)AB\,xy$$
$$= [(a^2 - c^2)Ax + (c^2 - b^2)By + (b^2 - a^2)(Ax + By + Cz)]^2$$

ou
$$4\,(a^2 - c^2)\,(c^2 - b^2)\,\mathrm{AB}\,xy$$
$$= [(b^2 - c^2)\,\mathrm{A}x + (c^2 - a^2)\,\mathrm{B}y + (b^2 - a^2)\,\mathrm{C}z]^2.$$

Cette équation représente un cône du second degré ayant pour sommet l'origine et tangent aux plans de coordonnées, tout le long des droites

$(c^2 - a^2)\,\mathrm{B}y + (b^2 - a^2)\,\mathrm{C}z = 0$, pour l'un;

$(b^2 - c^2)\,\mathrm{A}x + (b^2 - a^2)\,\mathrm{C}z = 0$, pour l'autre;

$(b^2 - c^2)\,\mathrm{A}x + (c^2 - a^2)\,\mathrm{B}y = 0$, pour le troisième.

5° Enfin les conditions qui doivent exister entre A, B, C pour que le cône soit de révolution sont
$$(b^2 - c^2)^2\,\mathrm{A}^2 = (c^2 - a^2)\,\mathrm{B}^2 = (b^2 - a^2)^2\,\mathrm{C}^2.$$

Remarques. — I. Considérons toutes les droites D qui passent par un point fixe A, et parmi ces droites, situées sur le cône des six normales issues de A, considérons-en une extérieure à l'ellipsoïde. Soit δ sa trace sur le plan polaire du point A par rapport à l'ellipsoïde. Si je joins δ aux points M et M′, les deux droites δM et δM′ seront tangentes à la section faite dans l'ellipsoïde par le plan polaire de A. Donc la droite MM′ ou Δ est la polaire du point δ par rapport à l'ellipse e. Il en résulte que tous les plans passant par D auront leur pôle sur Δ et que tous les plans passant par Δ auront leur pôle sur D (*).

Considérons maintenant une droite (D) passant par le point A, et coupant l'ellipsoïde. La droite Δ est toujours la polaire de δ. Elle est alors extérieure à l'ellipsoïde. Puisque tout plan passant par Δ a son pôle sur D, les plans tangents à l'ellipsoïde menés par Δ auront pour points de contact les points N et N′ où la droite D coupe l'ellipsoïde, de sorte que les rôles sont renversés, que la droite D joue le rôle de Δ et inversement; d'où les conclusions suivantes :

1° Lorsque les droites D sont assujetties à passer par un point fixe A, et à rester, comme nous l'avons montré, sur le cône des six normales correspondant à ce point, les droites Δ sont assujetties à rester dans un plan fixe, le plan polaire de A, et leur enveloppe dans ce plan est une parabole.

2° Lorsque les droites D sont assujetties à rester dans un

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

plan fixe P tangentiellement à la parabole que nous avons déterminée, les droites Δ sont toutes sur le cône des six normales qui a pour sommet le pôle du plan P par rapport à l'ellipsoïde.

II. Si l'ellipsoïde donné était de révolution, si l'on avait $a = b$, ou $b = c$, ou $c = a$, le lieu des droites D passant par un point donné serait un système de deux plans.

Si l'on supposait à la fois $a = b = c$, la condition (B) est remplie quelle que soit la droite D prise dans l'espace. Dans une sphère, en effet, toutes les normales à la surface se rencontrent au même point, le centre.

Dans un ellipsoïde de révolution, toutes les normales rencontrent l'axe. Deux normales ne peuvent se rencontrer qu'en un point de l'axe; les droites Δ et les droites D sont donc assujetties à être dans des plans perpendiculaires à l'axe, ce qui démontre que les droites D passant par un point fixe sont toutes dans le plan perpendiculaire à l'axe et passant par ce point.

NOTA. — Nous avons reçu également une solution de ce même problème par M. Cadot, élève au Lycée Saint-Louis.

QUESTION 2

Solution par M. KŒHLER.

Deux paraboles variables sont assujetties : 1° à avoir leurs axes parallèles et à une distance donnée l'un de l'autre; 2° à se couper orthogonalement en deux points.

Trouver l'aire minima comprise entre les deux courbes.

Soit $y^2 = 2px$ l'une des paraboles; b étant la distance des deux axes, l'autre aura pour équation $(y - b)^2 = 2q(x - \alpha)$. Les ordonnées des points communs sont données par

$$y^2(p - q) - 2bpy + p(b^2 + 2q\alpha) = 0. \qquad (1)$$

Les coefficients angulaires des tangentes en un des points d'intersection sont $\frac{p}{y}$ et $\frac{q}{y - b}$; pour que les paraboles

soient orthogonales, on doit avoir la relation

$$y^2 - by + pq = 0. \qquad (2)$$

La comparaison des équations (1) et (2) qui doivent avoir les mêmes racines donne

$$q = -p.\ \alpha = \frac{b^2 + 2p^2}{2p}.$$

L'équation de la seconde parabole devient alors

$$y^2 - 2by + 2px - 2p^2 = 0\ ;$$

p doit être considéré comme un paramètre variable, et nous allons le déterminer de telle sorte que l'aire comprise entre les deux courbes soit minima.

L'équation de la corde commune est

$$by - 2px + p^2 = 0.$$

Sa longueur se calcule facilement et a pour expression

$$c = \frac{4p^2 + b^2}{2p}.$$

Les pôles de la corde sont

$\alpha_1 = -\frac{p}{2}$, $\beta_1 = \frac{b}{2}$, par rapport à la première parabole.

$\alpha_2 = \frac{b^2 + 3p^2}{2p}$, $\beta_2 = \frac{b}{2}$, par rapport à la deuxième.

Chacun de ces pôles est distant de la corde commune d'une longueur $h = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4p^2}$. On en conclut que l'aire du quadrilatère formé par les quatre tangentes est $\frac{4(p^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}{4p}$, et l'aire comprise entre les deux paraboles est

$$S = \frac{1}{6p}(4p^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Cette expression est minimum quand on prend $p = \frac{b}{2\sqrt{2}}$ et la valeur de S est alors $\frac{b^2\sqrt{3}}{2}$.

QUESTION 15 *bis*.

Solution par M. Toqué, élève du Lycée Charlemagne.

Équation du cône ayant pour sommet le centre d'une surface de deuxième ordre et admettant pour génératrices les trois axes de coordonnées rectangulaires et les trois axes de la surface.

Comme le cône contient les trois axes de coordonnées, son équation est de la forme

$$byz + b'zx + b''xy = 0. \qquad [1]$$

Soient $\frac{x}{\alpha_1} = \frac{y}{\beta_1} = \frac{z}{\gamma_1}$, $\frac{x}{\alpha_2} = \frac{y}{\beta_2} = \frac{z}{\gamma_2}$, $\frac{x}{\alpha_3} = \frac{y}{\beta_3} = \frac{z}{\gamma_3}$ les trois axes de la surface ; pour exprimer qu'ils sont sur le cône, il suffit d'exprimer qu'il y en a deux sur le cône, ce qui donne

$$b\beta_1\gamma_1 + b'\gamma'_2\alpha'_1 + b''\alpha_1\beta_2 = 0 \qquad [2]$$

$$b\beta_2\gamma_2 + b'\gamma_2\alpha_2 + b''\alpha_2\beta_2 = 0 \qquad [3]$$

Soit $Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 1$ l'équation de la surface.

Posant $\lambda = A - \frac{B'B''}{B}$, $\lambda' = A' - \frac{B''B}{B'}$, $\lambda'' = A'' - \frac{BB'}{B''}$, on sait qu'on a

$$\frac{\alpha_1}{\frac{1}{B(\lambda - S_1)}} = \frac{\beta_1}{\frac{1}{B'(\lambda' - S_1)}} = \frac{\gamma_1}{\frac{1}{B''(\lambda'' - S_1)}},$$

en désignant par S_1 la racine de l'équation en S correspondant à $\alpha_1\beta_1\gamma_1$.

Remplaçant dans (2) $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ par ces quantités proportionnelles, on a

$$\frac{b}{B'B''(\lambda' - S_1)(\lambda'' - S_1)} + \frac{b'}{B''B(\lambda'' - S)(\lambda - S_1)} + \frac{b''}{BB'(\lambda - S_1)(\lambda' - S_1)} = 0,$$

ou $\quad Bb(\lambda - S_1) + B'b'(\lambda' - S_1) + B''b''(\lambda'' - S_1) = 0. \quad [4]$

On a de même

$$Bb(\lambda - S_2) + B'b'(\lambda' - S_2) + B''b''(\lambda'' - S_2) = 0. \quad [5]$$

Par soustraction, on déduit $(S_1 - S_2)(Bb + B'b' + B''b'') = 0$. D'ailleurs $S_1 \neq S_2$, sans quoi la surface proposée serait de révolution, ce qu'on ne suppose pas.

On a donc $\quad Bb + B'b' + B''b'' = 0. \qquad [6]$

(4) devient $\quad B\lambda b + B'\lambda' b' + B''\lambda'' b'' = 0. \qquad [7]$

On en déduit

$$\frac{b}{B'B''(\lambda' - \lambda'')} = \frac{b'}{B''B(\lambda'' - \lambda)} = \frac{b''}{BB'(\lambda - \lambda')}.$$

Finalement l'équation demandée est donc

$$\frac{B'B''(\lambda' - \lambda'')}{x} + \frac{B''B(\lambda'' - \lambda)}{y} + \frac{BB'(\lambda - \lambda')}{z} = 0$$

QUESTION 16 *bis*.

Solution par M. Toqué, élève du Lycée Charlemagne.

Ayant posé.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = P_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = P_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = P_3 \end{cases} \begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = Q_1 \\ b_1x + b_2y + b_3z = Q_2 \\ c_1x + c_2y + c_3z = Q_3 \end{cases} \delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

supposant que $\delta \gtrless 0$, *démontrer que les deux ellipsoïdes*

$$\left.\begin{aligned} P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 &= 1 \\ Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \textit{sont égaux.}$$

Il s'agit de démontrer que les axes de ces deux ellipsoïdes sont deux à deux égaux. Or, on sait que a, b, c étant les axes du premier, S_1, S_2, S_3 les racines de l'équation en S_1, on a $\dfrac{a^2}{\frac{1}{S_1}} = \dfrac{b^2}{\frac{1}{S_2}} = \dfrac{c^2}{\frac{1}{S_3}} = 1$. De même, a', b', c' étant les axes du deuxième, S'_1, S'_2, S'_3 les racines de l'équation en S correspondante, on a $\dfrac{a'^2}{\frac{1}{S'_1}} = \dfrac{b'^2}{\frac{1}{S'_2}} = \dfrac{c'^2}{\frac{1}{S'_3}} = 1$.

Si nous pouvons démontrer que les deux équations en S ont les mêmes racines, il en résultera bien que les axes sont égaux. D'ailleurs, le coefficient de S^3 étant 1 pour les deux, il s'agit de montrer que les coefficients sont deux à deux égaux.

Les équations des deux ellipsoïdes sont

$$x^2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + y^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + z^2(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)$$
$$+ 2yz(b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) + 2zx(c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3)$$
$$+ 2xy(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) = 1. \qquad [1]$$
$$x^2(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) + y^2(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) + z^2(a_3^2 + b_3^2 + c_3^2)$$
$$+ 2yz(a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3) + 2zx(a_3a_1 + b_3b_1 + c_3c_1)$$
$$+ 2xy(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2) = 1. \qquad [2]$$

Pour abréger, écrivons ces équations sous la forme

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 1. \quad [1]$$
$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy = 1. \quad [2]$$

Les équations en S correspondantes sont

$$S^3 - (A + A' + A'')S^2 + (A'A'' + A''A + AA' - B^2 - B'^2 - B''^2)$$
$$- \Delta = 0.$$
$$S^3 - (a + a' + a'')S^2 + (a'a'' + a''a + aa' - b^2 - b'^2 - b''^2)$$
$$- \Delta' = 0.$$

On a d'abord $A + A' + A'' = a + a' + a''$.

$$A'A'' + A''A + AA' - B^2 - B'^2 - B''^2 = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$
$$(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) + (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$$
$$+ (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)^2$$
$$- (c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3)^2 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$

Appliquant l'identité de Lagrange, on a

$$A'A'' + A''A + AA' - B^2 - B'^2 - B''^2$$
$$\left.\begin{array}{l} = (b_1c_2 - c_1b_2)^2 + (b_1c_3 - c_1b_3)^2 + b_2c_3 - c_3b_3)^2 \\ + (c_1a_2 - a_1c_2)^2 + (c_2a_3 - a_2c_3)^2 + c_3a_1 - a_2c_1)^2 \\ + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 \end{array}\right\} = \Sigma(a_1b_2 - b_1a_2)^2$$

En calculant $a'a'' + a''a + aa' - b^2 - b'^2 - b''^2 = 0$, on trouve la même valeur $\Sigma(a_1b_2 - b_1a_2)^2$.

Enfin calculons le terme tout connu,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3, & c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3, & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2, & b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 \\ c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3, & b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3, & c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2, & a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2, & a_3a_1 + b_3b_1 + c_3c_1 \\ a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2, & a_2^2 + b_2^2 + c_2^2, & a_3a_2 + b_3b_2 + c_3c_2 \\ a_3a_1 + b_3b_1 + c_3c_1, & a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3, & a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 \end{vmatrix}$$

Δ et Δ' ne sont autre chose que le carré du déterminant δ : donc ils sont égaux. Par suite, les équations en S sont iden-

tiques ; pour les deux surfaces on a

$$S^3 - (\Sigma a_1^2)\ S^2 + \Sigma\,(a_1 b_2 - b_1 a_2)^2\ S - \delta^2 = 0.$$

NOTA. — Les mêmes questions ont été résolues par MM. Griffon, à Montpellier ; Thérel, à Versailles.

QUESTION 355

Solution par M QUIQUET, élève au Lycée de Lille.

Trouver la relation qui doit exister entre les coefficients de l'équation

$$x^6 + Px^5 + Qx^4 + Rx^3 + Sx^2 + Tx + U = 0 \qquad (1)$$

pour que la somme de trois des racines soit égale à la somme des trois autres.

Formons les deux équations du troisième degré qui admettent, pour racines, la première trois racines de (1), la seconde les trois autres, et écrivons-les sous la forme :

$$x^3 + lx^2 + mx + n = 0$$
$$x^3 + \lambda x^2 + \mu x + \nu = 0.$$

On a donc identiquement :

$$x^6 + Px^5 + Qx^4 + Rx^3 + Sx^2 + Tx + U$$
$$= (x^3 + lx^2 + mx + n)(x^3 + \lambda x^2 + \mu x + \nu)$$

d'où les relations

$$P = l + \lambda$$
$$Q = l\lambda + m + \mu$$
$$R = l\mu + m\lambda + n + \nu$$
$$S = l\nu + n\lambda + m\mu$$
$$T = m\nu + n\mu$$
$$U = n\nu.$$

Pour que la somme de trois des racines de (1) soit égale à la somme des trois autres, il faut et il suffit que l'on puisse déterminer l et λ, de telle manière que l'on ait $l = \lambda$.

La condition nécessaire et suffisante cherchée s'obtiendra donc en éliminant $l, m, n, \lambda, \mu, \nu$, entre cette dernière relation et les six précédentes.

Posons : $\qquad l = \lambda = L$

d'où
$$\begin{aligned} P &= 2L \\ Q &= L^2 + m + \mu \\ R &= L(m + \mu) + n + \nu \\ S &= L(n + \nu) + m\mu \\ T &= m\nu + n\mu \\ U &= n\nu \end{aligned}$$
et, en introduisant des fonctions connues des paramètres de (1), M, N, V, on tire de là :
$$\begin{aligned} L &= \frac{P}{2} \\ m + \mu &= Q - L^2 = M \\ n + \nu &= R - LM = N \\ m\mu &= S - LN = V. \end{aligned}$$
Remarquant d'ailleurs l'identité :
$$(m\nu + n\mu)[(m + \mu)(n + \nu) - (m\nu + n\mu)] = n\nu(m + \mu)^2 + m\mu(n + \nu)^2 - 4mn\mu\nu$$
l'élimination se fait immédiatement et donne pour le résultat demandé $T(MN - T) = UM^2 + VN^2 - 4UV$.

On peut remarquer que les quantités $l, m, n, \lambda, \mu, \nu$, s'obtiennent par des équations du premier et du second degré, en fonction des coefficients de (1). Cette remarque peut servir à abaisser le degré d'une équation telle que (1), lorsque la condition ci-dessus est satisfaite.

NOTE SUR LA QUESTION 42

Le problème résolu à la page 69 du numéro de mars 1883, question 42, doit, sans peine, être généralisé de la manière suivante :

D'un point fixe O comme centre, décrivez une circonférence de rayon arbitraire, et menez-lui des tangentes par un point fixe A et par un point fixe B; ces deux couples de tangentes se coupent en quatre points M; le lieu de ces points M, quand varie le rayon de la circonférence, est une courbe bien connue qui se nomme la *Focale à nœud* de Quételet; M. *Chasles* en parle dans un de ses mémoires bien connus; c'est aussi le lieu des points de contact des tangentes menées

d'un point fixe à une série de coniques homofocales, et c'est aussi la podaire d'un point fixe relativement à une parabole.

Cette remarque nous semble utile pour nos lecteurs qui peuvent s'exercer sur le problème ainsi posé, et y trouver l'occasion de développer leur sagacité algébrique ou géométrique. E. V.

QUESTIONS PROPOSÉES

56. — Trouver le lieu des centres des cercles passant par le point de rebroussement d'une cardioïde, et tangente à la courbe en un autre point. Par le second point d'intersection de deux des cercles précédents, on mène une droite quelconque qui rencontre les deux cercles en A et A'. Démontrer que les tangentes aux cercles en A et A' se coupent sur la cardioïde. *(J. Kœhler.)*

57. — Trouver le lieu des points de rebroussement des courbes du troisième ordre qui ont pour asymptotes trois droites données, et l'enveloppe des tangentes de rebroussement. *(J. Kœhler.)*

58. — On donne la courbe dont l'équation est

$$y^4 - x^4 + 2ax^2y = 0.$$

1° On propose d'abord de construire cette courbe C; 2° soit M un point quelconque de C; on joint OM, et on trace une droite Δ symétrique de OM par rapport à la bissectrice de l'angle des axes; cette droite Δ rencontre la perpendiculaire élevée au point M à la droite OM en un point I. Démontrer que le lieu géométrique de ce point I est une hyperbole équilatère; 3° sur OI, on prend OI' = MI. Démontrer que le lieu du point I' est un cercle. *(G. L.)*

Le Rédacteur-Gérant,
E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 7254-3.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE D'ALEMBERT

D'APRÈS M. WALECKI

Par M. **G. de Longchamps**.

1. — M. Walecki a communiqué à l'Académie des sciences, dans la séance du 19 mars dernier, une démonstration du théorème de d'Alembert. Cette démonstration nous paraît à l'abri de toute objection et nous nous proposons de la développer dans cette note. Cette rédaction est faite d'après le résumé très écourté qui a été publié dans les comptes rendus; la démonstration détaillée sera donnée sans doute, ultérieurement, par l'auteur. Il est possible qu'elle s'écarte un peu de celle que nous allons exposer; mais nous pensons être agréable à nos lecteurs en publiant dès aujourd'hui une démonstration qui touche à un point si important de la théorie des équations et qui, jusqu'ici, n'avait été élucidé, du moins élémentairement, que par des raisonnements qui laissaient prise aux objections.

2. — Principe. — *Pour démontrer qu'une équation du degré* p, *à coefficients imaginaires, admet une racine* $\alpha + \beta i$, *il suffit de reconnaître qu'une équation du degré* 2p, *à coefficients réels, admet une racine de cette forme.*

Soit $f(x) = 0$ l'équation proposée. Par un groupement convenable on peut toujours l'écrire sous la forme

$$U + Vi = 0. \qquad (1)$$

U et V désignant deux polynômes entiers à coefficients réels, dont l'un au moins est du degré p.

Considérons maintenant l'équation

$$U^2 + V^2 = 0, \qquad (2)$$

laquelle est du degré $2p$ et à coefficients réels.

On a, identiquement,

$$U^2 + V^2 = (U + Vi)(U - Vi).$$

Si $\alpha + \beta i$ est une racine de l'équation (2), de deux choses l'une : ou $\alpha + \beta i$, substitué à x, rend nul le premier facteur

$U + Vi$, et alors la proposition est établie ; ou, au contraire, $\alpha + \beta i$ est racine de l'équation $U - Vi = 0$. Dans ce cas, $\alpha - \beta i$ est racine de l'équation (1). Ainsi, dans tous les cas, $U + Vi = 0$ admet une racine, si l'équation $U^2 + V^2 = 0$, en admet une.

3. — Lemme. — *Lorsque dans une équation* $f(x) = 0$, *du degré* $2p$, *on remplace* x *par* $y + z$, *si l'on pose identiquement,*

$$f(y + z) = f_1(z^2) + zf_2(z^2),$$

le résultant des deux formes $f_1(z^2)$ *et* $f_2(z^2)$ *est du degré* $p(2p - 1)$, *en* y.

Soit $m = 2p$, le degré de l'équation proposée ; on a

$$f_1(z^2) = f(y) + \frac{z^2}{2!} f''(y) + \ldots + \frac{z^m}{m!} f^m(y)$$

et $$f_2(z^2) = f'(y) + \frac{z^2}{3!} f'''(y) + \ldots + \frac{z^{m-2}}{(m-2)!} f^{m-1}(y);$$

on remarque que les équations $f_1(z^2) = 0$ et $f_2(z^2) = 0$ sont, par rapport à la lettre z^2, de degrés respectifs p et $(p - 1)$.

Le résultant $R(y)$, est, par une formule connue,

$$R(y) = \begin{vmatrix} f(y) & \frac{f''(y)}{2!} & \ldots & \frac{f^m(y)}{m!} & 0 & \ldots & & 0 \\ 0 & f(y) & \frac{f''(y)}{2!} & \ldots & \frac{f^m(y)}{m!} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & f(y) & \frac{f''(y)}{2!} & \ldots & \ldots & & \frac{f^m(y)}{m!} \\ f'(y) & \ldots & \ldots & \ldots & \frac{f^{m-1}(y)}{(m-1)!} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & f'(y) & \ldots & \ldots & \ldots & \frac{f^{m-1}(y)}{m-1} & 0 \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & f'(y) & \ldots & & \frac{f^{m-1}(y)}{(m-1)!} \end{vmatrix}$$

Les éléments de ce déterminant sont des polynômes entiers en y, et le terme du degré le plus élevé de $R(y)$ s'obtiendra en prenant, dans chacun d'eux, le terme qui est du plus haut degré.

Posons

$$\theta(y) = \begin{vmatrix} y & C_m^2 y^{m-2} & \dots & C_m^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & y^m & C_m^2 y^{m-2} & \dots & C_m^m & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & y^m & C_m^2 y^{m-2} & \dots & & C_m^m \\ C_m^1 y^{m-1} & \dots & & C_m^{m-1} y & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & C_m^1 y^{m-1} & \dots & & C_m^{m-1} y & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & C_m^1 y^{m-1} & \dots & 0 & \dots & \dots & & C_m^{m-1} y \end{vmatrix}$$

Je dis que $\theta(y)$ ne renferme qu'un terme en y et que ce terme est du degré $p(2p-1)$.

Considérons en effet les deux équations

$$\frac{(y+t)^m + (y-t)^m}{2} = y^m + C_m^2 y^{m-2} t^2 + \dots + C_m^m t^m = 0$$

$$\frac{(y+t)^m - (y-t)^m}{2t} = C_m^1 y^{m-1} + C_m^3 y^{m-3} t^2 + \dots + C_m^{m-1} y t^{m-2} = 0$$

Si on élimine t, le résultant de ces deux équations est précisément $\theta(y)$. Ces équations étant d'ailleurs homogènes en y et t, $\theta(y)$ est, certainement, une expression ne renfermant qu'un terme en y. D'autre part, le terme diagonal de $\theta(y)$ est

$$(y^m)^{p-1}(C_m^{m-1} y)^p.$$

ou

$$m^p y^{2p(p-1)+p},$$

ou encore

$$m^p y^{p(2p-1)}.$$

Ainsi $\theta(y)$ est du degré $p(2p-1)$, et l'on peut poser

$$\theta(y) = H y^{p(2p-1)}.$$

Il reste maintenant à vérifier que H est un nombre différent de zéro.

On a, en effet $\theta(1) = H$

et si l'on avait $H = 0$, les deux équations

$$\frac{(t+1)^m + (t-1)^m}{2} = 0.$$

$$\frac{(t+1)^m - (t-1)^m}{2t} = 0.$$

auraient un diviseur commun qui appartiendrait à $(t+1)^m$ et $(t-1)^m$, ce qui est impossible.

4. — Théorème de d'Alembert. — *Toute équation algébrique a une racine.*

Nous distinguons, dans la démonstration qui suit, deux cas suivant que le degré de l'équation proposée est pair ou impair.

Premier cas. — *Le degré μ de l'équation proposée* $F(x) = 0$ *est un nombre impair.*

Si les coefficients de $F(x)$ sont réels, le théorème qui nous occupe est évident. Supposons donc qu'ils soient imaginaires et soit

$$F(x) = U + Vi.$$

Posons

$$f(x) = U^2 + V^2.$$

En conservant la notation du paragraphe précédent on a

$$f(x) = f_1(z^2) + zf_2(z^2).$$

Les polynômes $f_1(z^2)$ et $f_2(z^2)$ ne peuvent pas être, en même temps, identiquement nuls. Si l'un d'eux est identiquement nul, ce sera $f_2(z^2)$, puisque le premier terme de $f_1(z^2)$ est $A_0 z^{2\mu}$; $A_0 x^{2\mu}$ désignant le premier terme de $f(x)$.

Supposons d'abord que $f_2(z^2)$ soit identiquement nul. L'équation $f_1(z^2) = 0$ est du degré μ en X, après avoir posé $z^2 = X$. Comme μ est impair, l'équation $f_1(X) = 0$ admet au moins une racine ; le polynôme $f_1(X)$ est divisible par un facteur du premier degré en X ; par suite, $f(x)$ admet un diviseur du second degré en x.

Admettons maintenant que $f_2(z^2)$ ne soit pas identiquement nul. L'équation $R(y) = 0$ est, comme nous l'avons remarqué plus haut, du degré $p(2p - 1)$; ce nombre est impair et l'on peut dire que cette équation a une racine. Les polynômes f_1 et f_2 ont donc un diviseur commun et $f(x)$ est certainement décomposable en un produit de deux facteurs U_1, V_1.

Si l'un de ces facteurs est de degré impair, il admet un diviseur réel du premier degré ; par suite $f(x)$ a une racine réelle.

Si, au contraire U_1 et V_1 sont, l'un et l'autre, de degrés pairs : soient $2q$ et $2q'$ leurs degrés, je dis que l'un des nombres, q ou q', est impair.

On a en effet

$$2p = 2q + 2q'$$

ou

$$p = q + q'$$

et comme p est impair, q et q' sont des nombres de parités différentes. L'un d'eux, en particulier, est un nombre impair :

supposons que ce soit q. En raisonnant sur U_1 comme nous l'avons fait sur $f(x)$ on fera voir, de même, que U_1 (par conséquent $f(x)$) admet un diviseur réel du premier ou du second degré, ou, s'il n'en est pas ainsi, que U_1 admet du moins un diviseur U_2 qui est réel et d'un degré $2r$, r étant un nombre impair.

Ce dernier cas, celui où le diviseur n'est ni du premier ni du second degré, ne peut d'ailleurs se présenter indéfiniment les degrés des polynômes U_1, U_2, ... allant en décroissant.

Il y a donc, en résumé, un diviseur de la forme $(x - \alpha - \beta i)$ au polynôme $U + Vi$, lorsque celui-ci est d'un degré impair.

« **Deuxième cas** (*). — *Le degré μ, de l'équation* $f(x) = 0$, *est un nombre pair.*

» Considérons maintenant une équation à coefficients réels ou imaginaires dont le degré μ soit égal à $2^i p$, p étant un nombre impair.

» Pour abréger je dirai que le nombre m est de parité i, et je vais démontrer que, si le théorème est établi pour toutes les équations dont le degré est de parité inférieure à i, il est encore vrai pour une équation de parité i ; il sera, par suite, établi dans toute sa généralité, puisqu'il est vrai pour la parité zéro.

» Soit $f(x)$ le premier membre de l'équation ; posons

$$x = y + z \text{ et } f(x) = \varphi(z^2) + z\psi(z^2)$$

» Le résultat de φ et de ψ est du degré $\frac{m(m-1)}{2} = 2^{i-1}p(2^i p - 1)$ par rapport à y ; il est donc de la parité $(i - 1)$ et, par suite, s'annule par une valeur réelle ou imaginaire de y. En remarquant que φ est de parité $(i - 1)$, on prouvera, comme plus haut, que $f(x)$ admet un diviseur du premier ou du second degré à coefficients réels ou imaginaires, ou un diviseur U_1, de parité i, mais de degré inférieur à celui de $f(x)$: on prouvera également que U_1 admet un diviseur du premier ou du second degré, ou un diviseur U_2 de parité i et d'un degré inférieur à celui de U_1. En continuant ces opérations,

(1) Cette dernière partie est extraite textuellement des *Comptes rendus loc. cit.*

il est clair, puisque le dernier cas ne peut se présenter indéfiniment, que l'on déterminera un diviseur de $f(x)$ du premier ou du second degré, et, comme l'on sait qu'une équation du second degré à coefficients imaginaires est décomposable en facteurs du premier degré, la proposition énoncée est entièrement démontrée. »

Remarque — Cette démonstration repose, comme on a pu le remarquer :

1° Sur le déterminant de Sylverter, qui donne la condition nécessaire pour que deux polynômes admettent un diviseur commun ;

2° Sur la réciproque de cette proposition. On sait que cette proposition peut s'établir sans admettre la décomposition des polynômes en facteurs. Sans cette observation, la démonstration précédente ne serait pas admissible.

RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE

DES ÉQUATIONS DU TROISIÈME DEGRÉ

Par M. **G. de Longchamps.**

---

1. — Nous nous proposons d'exposer dans cette note une méthode de résolution de l'équation du troisième degré qui nous paraît offrir, sur les méthodes connues, certains avantages.

L'idée qui nous sert de point de départ est naturelle et nous dirons d'abord en quoi elle consiste. Soit (1) $f(x) = 0$ l'équation proposée. Supposons qu'elle soit du degré m et qu'on puisse l'écrire identiquement sous la forme

$$P^m Q - {}^m = 0, \qquad (2)$$

P et Q désignant des fonctions entières de x, du premier ou du second degré, tout au plus. La résolution algébrique de l'équation (1) se trouve ramenée à celle de l'équation binôme $z^m - 1 = 0$, en posant $z = \frac{P}{Q}$.

Cette idée, en définitive, est celle qui a servi à résoudre

les équations du second degré, quand on a écrit l'identité

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2.$$

C'est aussi celle qui préside à la résolution de l'équation du quatrième degré quand on expose la méthode classique de Ferrari. N'est-il pas naturel de l'appliquer au cas du troisième degré ? De cette façon la résolution algébrique des équations, dans le cas où elle est possible, se trouverait découler d'un seul et même principe.

La méthode dont nous parlons conduit, chose remarquable, à une résolvante du second degré. Le calcul qu'elle exige est un peu plus compliqué que celui que nécessite la méthode de Hudde ; mais la discussion des valeurs trouvées se fait plus simplement par cette méthode qui, somme toute, nous paraît préférable.

2. — Soit $$x^3 + px + q = 0 \qquad (3)$$
l'équation proposée. Nous allons chercher à l'identifier avec l'équation

$$(\alpha + \beta x)^3 - (x^3 + 3\lambda x^2 + 3\lambda^2 x + \lambda^3) = 0,$$

laquelle peut s'écrire

$$x^3(\beta^3 - 1) + 3(\beta^2\alpha - \lambda)x^2 + 3(\alpha^2\beta - \lambda^2)x + \alpha^3 - \lambda^3 = 0. \qquad (4)$$

Pour identifier (3) et (4), il faut supposer β différent de l'unité, et poser

$$\beta^2\alpha = \lambda \qquad (5)$$

$$\frac{p}{3}(\beta^3 - 1) = \alpha^2\beta - \lambda^2 \qquad (6)$$

$$q(\beta^3 - 1) = \alpha^3 - \lambda^3. \qquad (7)$$

On peut considérer ces équations comme formant un système de trois équations à trois inconnues : p et q sont les nombres donnés ; α, β et λ sont les inconnues.

De (5) tirons α ; cette valeur, substituée dans (6) et dans (7), donne d'abord

$$-\frac{p}{3}\beta^3 = \lambda^2 \qquad (8)$$

$$-q\beta^6 = \lambda^3(\beta^3 + 1) : \qquad (9)$$

puis, en éliminant β^3, entre les deux relations,

$$3\lambda^2 p - 9q\lambda - p^2 = 0. \qquad \text{(A)}$$

C'est la résolvante; on remarquera qu'elle est du second degré. Les équations (6) et (8) donnent

$$\alpha^2\beta = -\frac{p}{3}. \qquad (10)$$

On a donc, par combinaison de (5) et de (10),

$$p\beta + 3\alpha\lambda = 0; \qquad \text{(B)}$$

et enfin

$$\alpha^3 = \frac{p^2}{9\lambda}. \qquad \text{(C)}$$

3. — Ainsi la résolution de l'équation proposée se trouve réalisée par celle : 1° d'une équation du second degré (A); 2° d'une équation du premier degré (B); 3° d'une équation binôme du troisième degré (C).

En désignant par j l'une des racines cubiques imaginaires de l'unité, les racines x_1, x_2, x_3 sont données par les formules

$$\alpha + \beta x_1 = x_1 + \lambda,$$
$$\alpha + \beta x_2 = j(x_2 + \lambda),$$
$$\alpha + \beta x_3 = j^2(x_3 + \lambda).$$

Remplaçons $y\lambda$ par $\beta^2\alpha$, on trouve facilement en tenant compte de l'hypothèse $j^3 = 1$,

$$x_1 = \alpha(\beta + 1), \qquad (11)$$
$$x_2 = \alpha j^2(\beta j^2 + 1), \qquad (12)\text{(D)}$$
$$x_3 = \alpha j(\beta j + 1). \qquad (13)$$

4. — Discussion. — Soit λ' l'une des racines de la résolvante (A); à cette racine, et d'après la formule (C), correspondent pour α trois valeurs qu'on peut représenter par α, αj, αj^2. D'ailleurs la relation (B) prouve que si l'on change α en αj, ou en αj^2, β prend les valeurs correspondantes βj ou βj^2. Par suite, les formules (D) ne peuvent donner que trois valeurs pour x. Mais la résolvante admet deux racines λ', λ'' et la discussion qui va suivre a pour but de montrer que la deuxième racine λ'' donne les mêmes valeurs pour x.

Pour établir ce point, remarquons d'abord que l'on a

$$\lambda'\lambda'' = -\frac{p}{3}.$$

D'autre part, à la racine λ'' correspond un nombre α' déterminé par la relation

$$\alpha'^3 = \frac{p^2}{9\lambda''}.$$

et comme

$$\alpha^3 = \frac{p^2}{9\lambda'},$$

on a

$$\alpha^3\alpha'^3 = \frac{p^4}{81} \cdot \frac{1}{\lambda'\lambda''}$$

ou

$$\alpha^3\alpha'^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

On a donc successivement

$$\alpha\alpha' = -\frac{p}{3},\ \alpha\alpha' = -\frac{p}{3}j \text{ et } \alpha\alpha' = -\frac{p}{3}j^2.$$

La formule (11) donne, en tenant compte de la relation (10),

$$x_1 = \alpha - \frac{p}{3\alpha}.$$

Cette formule ne change pas quand on remplace α par $-\frac{p}{3\alpha}$; si nous remplaçons maintenant α par $-\frac{pj}{3\alpha}$, on obtient

$$X_1 = -\frac{pj}{3\alpha} + \frac{p}{3} \cdot \frac{3\alpha}{pj}.$$

ou

$$X_1 = \frac{\alpha}{j} - \frac{pj}{3\alpha}$$

ou encore, en remarquant que $j^3 = 1$,

$$X_1 = \alpha j^2 - \frac{p}{3\alpha j^2}.$$

Mais on a

$$x_2 = \alpha j^2 + \alpha\beta j^2$$

ou, d'après (10),

$$x_2 = \alpha j^2 - \frac{pj}{3\alpha}.$$

On voit donc que $X_1 = x_2$.

On reconnaît de même qu'en remplaçant α par $-\frac{pi}{3\alpha}$ la formule (11) donne la valeur de x_3.

Le même raisonnement appliqué aux deux autres formules (12) et (13) du groupe (D), prouve que l'on retrouve toujours les seuls nombres x_1, x_2, x_3, et il n'y a pas d'autre solution que ces trois racines pour l'équation proposée.

5. — Ces trois racines sont données par la formule

$$x = \theta \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$
$$+ \frac{p}{3\theta \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}$$

dans laquelle on donne successivement à θ les valeurs 1, j et j^2.

En effet, la résolvante A, écrite sous la forme

$$p^2 \frac{1}{\lambda^2} + 9q \frac{1}{\lambda} - 3p = 0,$$

donne
$$\frac{1}{\lambda} = \frac{-9q \pm \sqrt{81q^2 + 12p^3}}{2p^2}.$$

Nous avons montré tout à l'heure qu'on pouvait prendre indifféremment, dans cette formule, le signe $+$ ou le signe $-$: nous ferons donc choix du signe $+$ et nous aurons alors pour $\frac{1}{\lambda}$ une valeur bien déterminée correspondant à la formule $\frac{p^2}{9\lambda} = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$.

La formule (C) donne

$$\alpha\theta = \sqrt{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

θ ayant successivement, dans cette expression, les valeurs $1, j, j^2$. L'inconnue x étant donnée par l'équation

$$x = \alpha - \frac{p}{3\alpha},$$

on a donc enfin

$$x = \theta \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$
$$+ \frac{p}{3\theta \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}$$
$$\theta = (1, j, j^2).$$

C'est la formule à laquelle conduit la méthode de Hudde et c'est, à l'apparence près, la formule de Cardan.

QUESTION 44

Solution par M. CALLÉ, élève de mathématiques spéciales au Lycée de Grenoble (classe de M. Bernard).

On considère des coniques inscrites dans un carré dont les diagonales sont prises comme axes de coordonnées : d'un point P *dont les coordonnées sont* α, β, *on abaisse des normales à ces coniques. Lieu des pieds. — En désignant par* $2a$ *la longueur d'une diagonale du carré proposé, on fera voir que ce lieu est une quartique ayant un point double en* P, *et que l'équation de cette courbe est*

$$(\beta x + \alpha y - 2xy)(\alpha x + \beta y - x^2 - y^2) = a^2(\alpha - x)(\beta - y),$$

ou encore :

$$(x^2 + y^2 - a^2)(\alpha - x)(\beta - y) + xy[(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2] = 0.$$

— Discuter cette courbe. — Séparer sur le lieu les points qui proviennent des ellipses de ceux qui proviennent des hyperboles.

G. L.

Les diagonales du carré sont les axes communs au faisceau considéré : si A^2 et B^2 sont des paramètres variables, l'équation générale sera

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 1 = 0. \qquad (1)$$

L'hyperbole des pieds des normales est

$$(A^2 - B^2)\,xy - A^2\alpha y + B^2\beta x = 0: \qquad (2)$$

$2a$ étant la longueur d'une diagonale, l'équation d'un côté du carré est : $x + y - a = 0$.

Exprimons que cette droite est tangente à la conique (1), et pour cela exprimons que l'équation

$$\frac{(a - y)^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 1 = 0.$$

a une racine double ; il vient

$$A^2 + B^2 = a^2. \qquad (3)$$

Eliminons A et B, entre les équations (1), (2) et (3) ; nous

aurons le lieu. — De (2) et (3) on tire

$$A^2 = \frac{a^2x(\beta - y)}{\beta x + \alpha y - 2xy}\ ; \qquad B^2 = \frac{a^2y(\alpha - x)}{\beta x + \alpha y - 2xy}.$$

Portant ces valeurs dans (1), il vient

$$(\beta x + \alpha y - 2xy)(\beta y + \alpha x - x^2 + y^2) - a^2(\alpha - x)(\beta - y) = 0. \quad (4)$$

$(\alpha.\beta)$ est un point double. Transportons l'origine en $(\alpha.\beta)$. L'équation devient :

$$(\beta x + \alpha y + 2xy)\ (\beta y + \alpha x + x^2 + y^2) = a^2xy.$$

— Les tangentes en $(\alpha.\beta)$ sont

$$(\beta x + \alpha y)\ (\beta y + \alpha x) - a^2xy = 0.$$

ou

$$\alpha\beta y^2 + xy\ (\beta^2 + \alpha_2 - a^2) + \alpha\beta x^2 = 0.$$

Elles ont pour coefficients angulaires :

$$t = \frac{a^2 - \beta^2 - \alpha^2 \pm \sqrt{(a^2 - \beta^2 - a^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2}}{2\alpha\beta}.$$

Elles seront réelles si

$$(a^2 - \beta^2 - \alpha^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2 \geq 0,$$

ou $(a^2 - \beta^2 - \alpha^2 + 2a\beta)\ (a^2 - \beta^2 - \alpha^2 - 2\alpha\beta) \geq 0.$

ou $(a - \alpha + \beta)(a + \alpha - \beta)(a - \beta - \alpha)(a + \beta + \alpha) \geq 0. \quad (5)$

Construction de la courbe. — *Supposons le point double réel*, c'est-à-dire la condition (5) remplie.

Remarquons que les quatre facteurs qui y entrent représentent les quatre côtés du carré. D'après cela, on voit que le point double ne pourra être réel que si P est situé soit dans l'intérieur du carré, soit dans l'un des quatre angles opposés par le sommet : ce que l'on voit d'après les signes des régions formées par les droites AB, BC, CD, DA.

— On pourrait voir *a priori* que si P n'était pas dans ces régions, le point double serait imaginaire.

— *Quand le point double est réel*, les coefficients angulaires des tangentes en ce point sont de même signe ; de plus, ils sont réciproques.

— *Supposons le point* P *situé dans un angle opposé à un sommet du carré.* Nous pouvons toujours prendre α et $\beta > 0$; Dans ce cas, $a^2 - \beta^2 - \alpha^2$ sera négatif, par suite les deux valeurs de t seront négatives. — Construisons les courbes qui entrent en facteur dans l'équation du lieu, et séparons

le plan en régions. On voit immédiatement, d'après les signes, que dans les régions ombrées il n'y a pas de points.

— On voit aussi, d'après l'énoncé, qu'il n'y a pas de points du lieu entre deux côtés parallèles du carré, extérieurement aux deux autres.

Asymptotes. — Les asymptotes sont parallèles aux axes, car l'on a pour l'ensemble des termes du degré le plus élevé $$2xy\,(x^2 + y^2).$$

La courbe passe aux points cycliques, et admet les axes pour directions asymptotiques réelles. — Les asymptotes sont $$x = \frac{\alpha}{2}; \quad y = \frac{\beta}{2}$$

(ce sont les mêmes que celles de l'hyperbole équilatère
$$\beta x + \alpha y - 2xy = 0,$$
qui entre dans la séparation en régions).

L'asymptote $y = \frac{\beta}{2}$ coupe la courbe en deux points : à distance finie, évidemment en E; eu un autre point F, à distance finie ou infinie.

— Dans le deuxième cas, nous aurons un *point d'inflexion à l'infini*. Si dans l'équation de la courbe on fait $x = \frac{\alpha}{2}$, il vient

$$\beta\left(\frac{a\alpha}{2} - \beta y - \frac{\alpha^2}{4} - 2y^2\right) = a^2(\beta - y);$$

donc $\beta = 0$ est la condition nécessaire du point d'inflexion à l'infini.

Cette condition n'a pas lieu dans la figure : le point F sera positif, ainsi que le montre la séparation en régions.

— L'autre asymptote est aussi coupée en deux points.

La courbe passe aux quatre sommets du carré, et par les projections de (α, β) sur les axes et sur les côtés du carré : car on peut toujours assujettir une conique à être tangente à quatre droites, en un point de l'une d'elles. D'après la séparation en régions, il est évident que la courbe est tangente aux côtés du carré.

Nous aurons la figure (1).

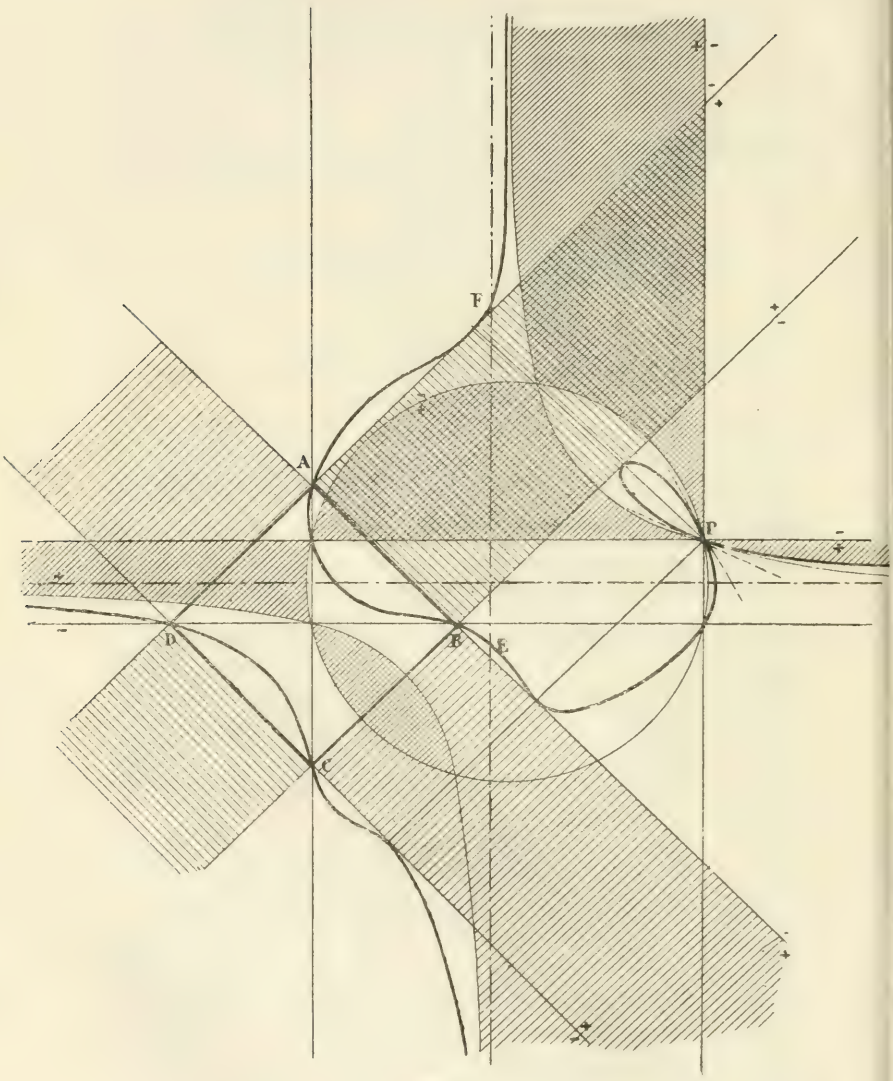


Fig. 1.

2° Supposons le point P dans le carré.

Dans ce cas, $a^2 - \beta^2 - \alpha^2$ est positif; les deux coefficients angulaires des tangentes à l'origine sont positifs, et on a

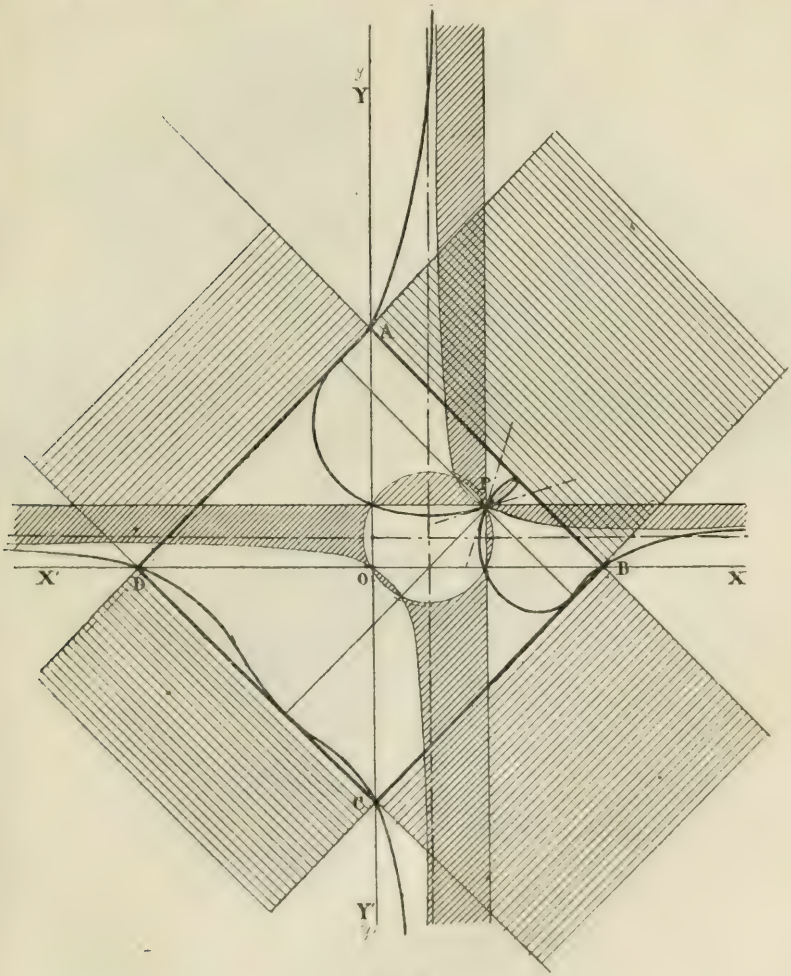


Fig. 2.

la figure (2). On vérifie comme précédemment la position de la courbe par rapport aux asymptotes.

3° Supposons le point P sur CB, dans l'angle opposé à B. Les deux tangentes au point double sont confondues : on a un point de rebroussement. La tangente double est parallèle

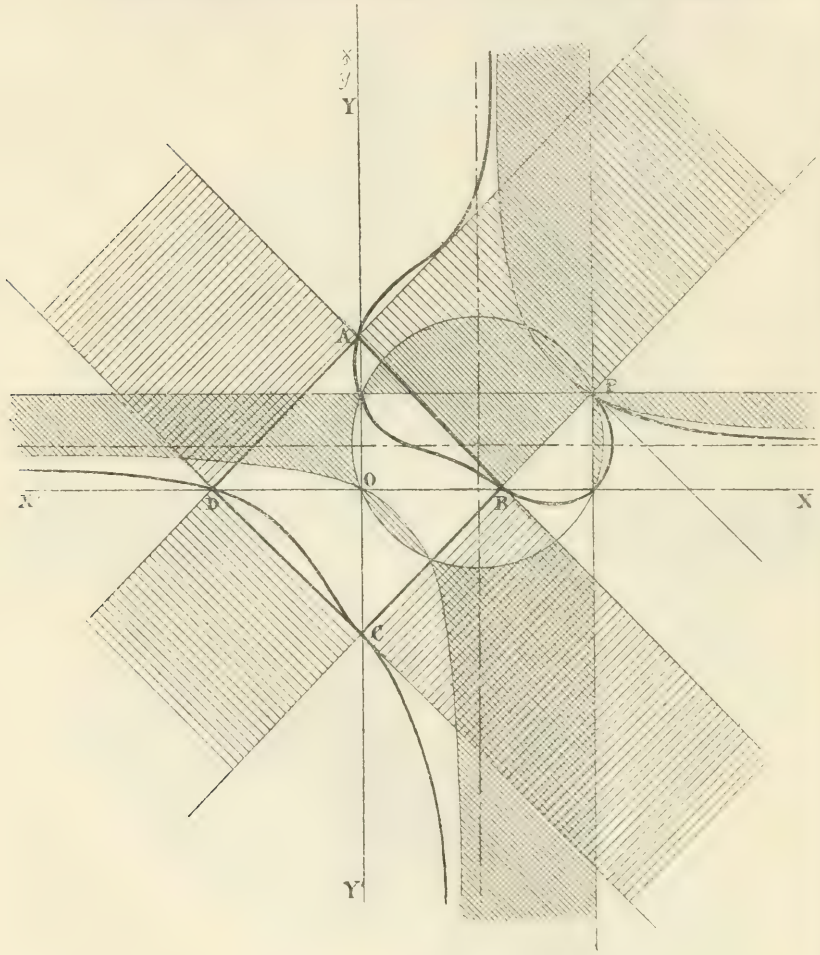


Fig. 3.

à la bissectrice de XOY', et on a la figure (3). C et D sont des points d'inflexion.

Les tangentes sont DC et AB.

4° Si le point P est sur AB, entre A et B, on a la figure (4). On voit immédiatement que les droites AD et BC sont devenues tangentes d'inflexion en A et B.

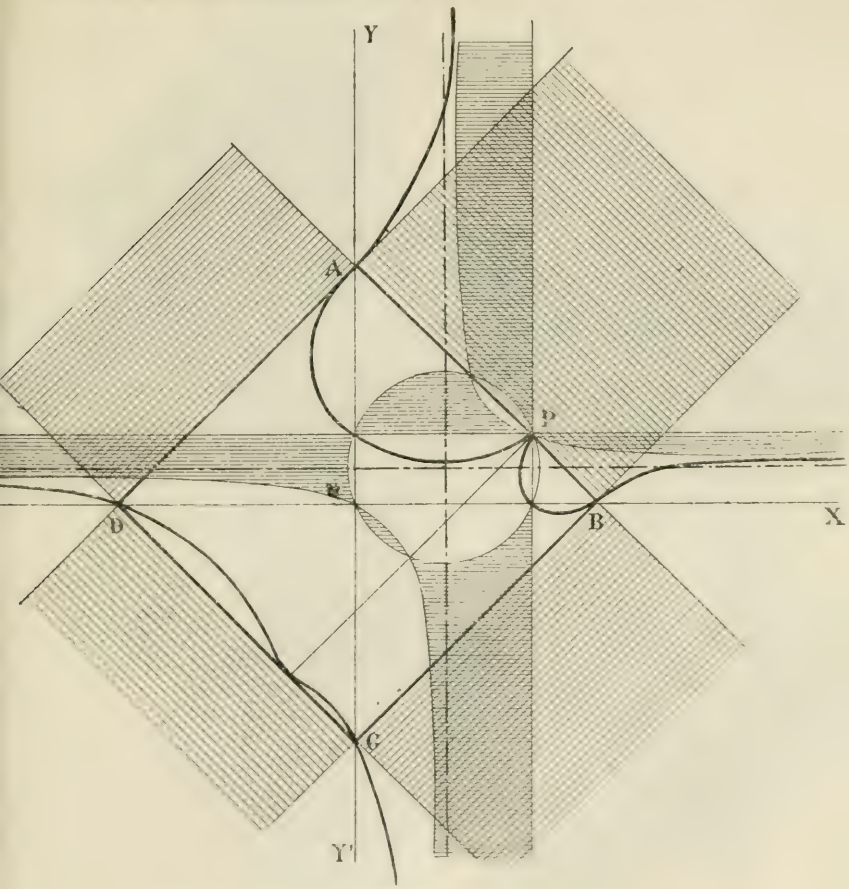


Fig. 4.

— Si le point double n'est pas réel, si P est situé entre DA et CB, on aura la figure (5).

— Lorsque le point P est sur l'un des axes, sur OX par exemple, la courbe devient

$$y = 0 \text{ et } (\alpha - 2x)(\alpha x - x^2 - y^2) + a^2(\alpha - x) = 0.$$

courbe du troisième degré, symétrique par rapport à OX, qui a pour asymptote $x = \frac{\alpha}{2}$. Elle présente un point d'inflexion

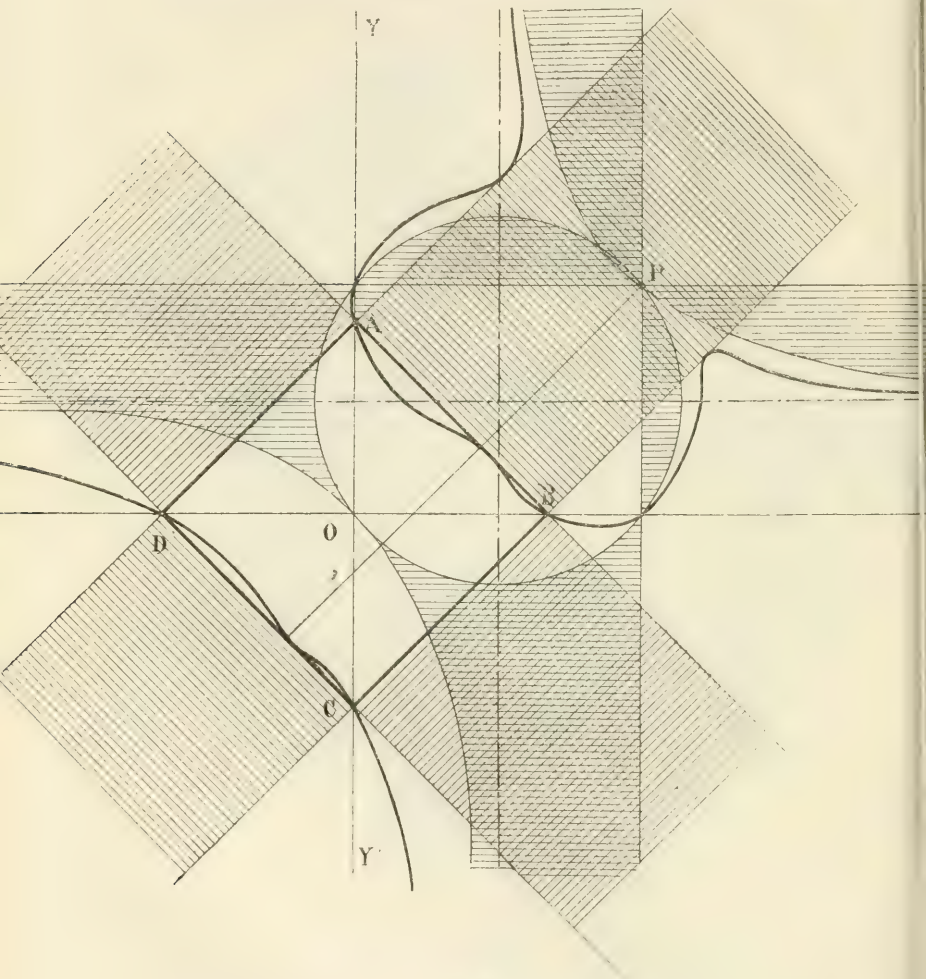


Fig. 5.

à l'infini, car l'équation qui donne le point d'intersection des deux asymptotes est $a^2 \frac{\alpha}{2} = 0$.

1° Lorsque P est en dehors du carré, on a deux points sur OX, qui sont donnés par

$$(\alpha - 2x)(\alpha x - x^2) - a^2(x - \alpha) = 0;$$

$$x = \alpha \quad \text{et} \quad x = \frac{\alpha}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + a^2};$$

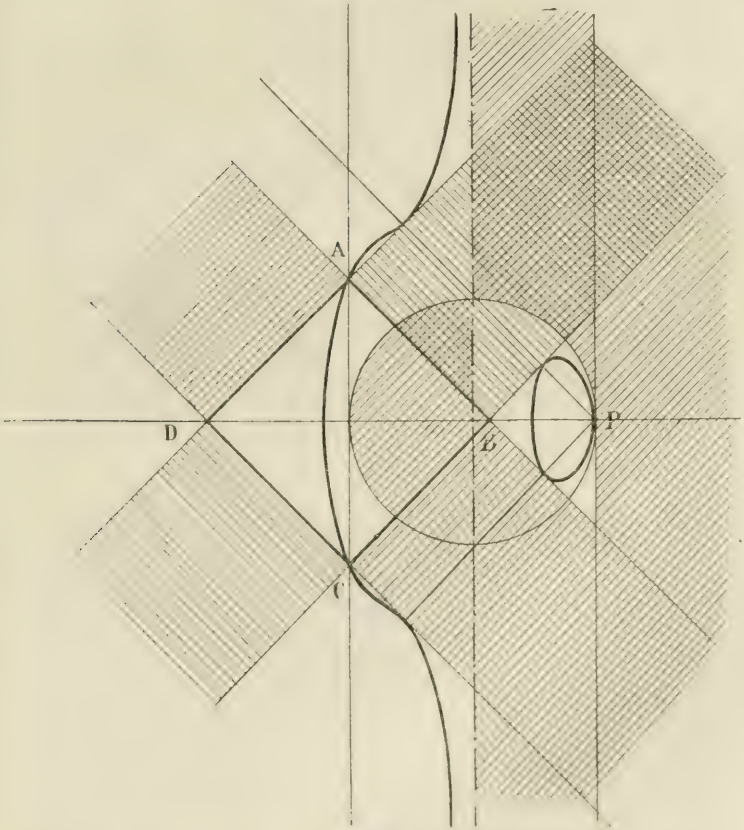


Fig. 6.

on a toujours trois points sur OX, deux symétriques par rapport aux asymptotes, figure (6).

2° Lorsque P est intérieur au carré, figure (7).

3° Lorsque $\alpha = 0$, $\beta = 0$, la courbe se réduit à deux droites et à un cercle inscrit dans le carré.

— Il est très simple de séparer les points du lieu qui proviennent des ellipses de ceux provenant des hyperboles. Les points à l'intérieur du carré appartiennent seuls aux ellipses:

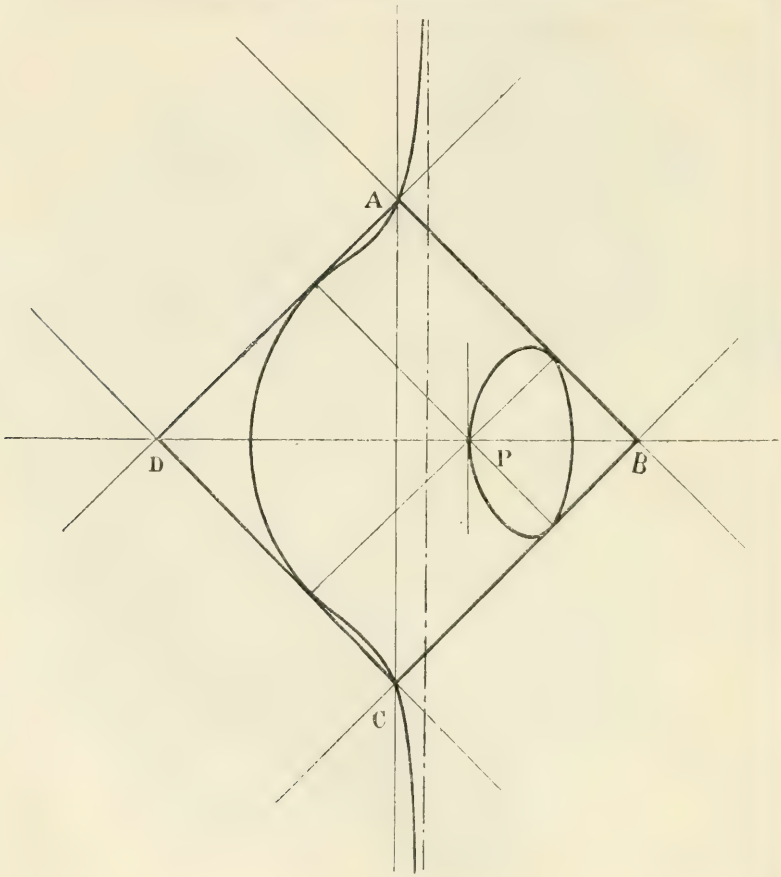


Fig. 7.

ceux à l'extérieur, aux hyperboles: car il ne peut y avoir aucune ellipse extérieure au carré, et aucune hyperbole pénétrant dans le carré; ces courbes couperaient leurs tangentes.

— On peut aussi le voir analytiquement. Il suffit de cher-

cher les points du lieu pour lesquels le produit A^2B^2 est positif ou négatif :

$$A^2B^2 = \frac{a^4xy(\alpha - x)(\beta - y)}{(\beta x + \alpha y - 2xy)^2}.$$

En construisant les droites $x = \alpha$, $y = \beta$, on constatera le même résultat.

QUESTION 356

Solution par M. H. Dupuy, élève du Lycée de Grenoble.

Etant donnée une conique, on considère les cercles qui sont tangents à cette conique, et tels que les tangentes communes aux cercles et à la conique soient parallèles. Trouver le lieu des centres de ces cercles.

On sait que l'équation des tangentes menées de $(x_0\ y_0)$ à l'ellipse est

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{x^2_0}{a^2} + \frac{y^2_0}{b^2}\right) = \left(\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1\right)^2$$

Si $(x_0\ y_0)$ s'éloigne à l'infini dans la direction t, on a l'équation des tangentes parallèles

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{t^2}{b^2}\right) = \left(\frac{x}{a^2} + \frac{ty}{b^2}\right)^2$$

Or le cercle considéré est tangent à ces droites, suivant une corde qui leur est perpendiculaire ; soit $ty + x + ts = 0$ l'équation de ce diamètre de contact.

Le cercle aura donc pour équation

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{t^2}{b^2}\right) - \left(\frac{x}{a^2} + \frac{ty}{b^2}\right)^2 + \lambda\,(ty + x + ts)^2 = 0. \qquad (1)$$

On trouve que $\lambda = \frac{1}{a^2\,b^2}$ est une condition suffisante pour que (1) représente un cercle. Cette même équation montre que le cercle et l'ellipse admettent pour droites d'intersection les droites

$$\left(\frac{x}{a^2} + \frac{ty}{b^2}\right) = \frac{1}{a^2\,b^2}\,(ty + x + ts)^2$$

Exprimons que l'une d'elles $\frac{x}{at}+\frac{y}{b}+\frac{s}{a+b}=0$ est tangente en un point x_1y_1 de l'ellipse ; et identifions son équation avec celle de la tangente $x\frac{x_1}{a^2}+y.\frac{y_1}{b^2}-1=0$. On en déduit facilement les deux relations

$$x_1=\frac{a}{\sqrt{1+t^2}}\qquad y_1=\frac{bt}{\sqrt{1+x^2}}$$

qui sont les points de contact du cercle et de l'ellipse. Or remarquons que le centre du cercle est sur la droite $y=tx$ et sur la normale à l'ellipse en (x_1y_1), normale qui a pour équation $a[X\sqrt{1+t^2}-a]=\frac{b}{t}(Y\sqrt{1+t^2}-bt)$; éliminant t, on trouve pour lieu du centre $X^2+Y^2=(a+b)^2$. Ce cercle est imaginaire dans les cordes de l'hyperbole, et s'éloigne à l'infini pour la parabole.

— Si on pose $t=\operatorname{tg}\theta$, on voit que $x_1=a\cos\theta$, $y_1=b\sin\theta$ et que les coordonnées du centre du cercle correspondant sont $x=(a+b)\cos\theta$, $y=(a+b)\sin\theta$, et le rayon du cercle est donné par la formule $R^2=b^2\cos^2\theta-a^2\sin^2\theta$.

Ainsi, les éléments d'un des cercles considérés sont obtenus en fonction du paramètre angulaire du point de contact $(x_1\ y_1)$.

CORRESPONDANCE

SUR LES SÉRIES DE TAYLOR ET DE MACLAURIN

Par M. **J. Bourget.**

(Voir la page 82 du Journal.)

La formule du reste, donnée par M. Parpaite, est identique à celle que j'ai donnée moi-même, il y a treize ans, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (ann. 1870, p. 537). La démonstration de M. Parpaite ne diffère pas non plus de la mienne.

En nommant F (x) la fonction à développer et $\varphi(x)$ une fonction continue arbitraire assujettie seulement à la condition $\varphi(o) = 0$, j'ai trouvé

1° Pour le reste de la série de Maclaurin :

$$R = \frac{\varphi(x)}{\varphi'[(1-\theta)x]} \quad \frac{x^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} F^n(\theta x):$$

2° Pour le reste de la série de Taylor :

$$R = \frac{\varphi(h)}{\varphi'[(1-\theta h]} \quad \frac{h^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} F^n(x+\theta h),$$

J'ajoutais que si l'on fait en particulier $\varphi(x) = x^p$, on retombe sur le reste trouvé par Schlomilch et par Roche.

QUESTIONS PROPOSÉES

59. — Lieu des centres des coniques, de surface donnée, circonscrites à un triangle. Examiner spécialement le cas des hyperboles. Étudier, dans ce cas, les branches infinies et les sinuosités de la courbe. *(Amigues.)*

60. — On donne une famille de coniques représentée par l'équation

$$x^2(1+\lambda) - 2\lambda xy + \lambda^2 y^2 - 2x = 0;$$

par chaque point A, réel, du plan, passent deux coniques de la famille. Dans quelles régions doit être le point A pour que ces coniques aient une équation : 1° à coefficients imaginaires ; 2° a coefficients réels. Subdiviser ces dernières régions en plusieurs autres suivant que par le point A il passe deux ellipses, ou deux hyperboles, ou une ellipse et une hyperbole. — Lieu des centres des coniques. Séparer sur ce lieu les centres d'ellipses des centres d'hyperboles. *(Amigues.)*

61. — On considère une ellipse rapportée à ses axes AA', BB'. D'un point C, pris sur l'axe Oy, avec CA = CA' pour rayon, on décrit un cercle Δ, A et A' désignant les extrémités du grand axe.

1. — Soit M. un point mobile sur Δ ; par ce point M on mène à l'ellipse des tangentes. La droite qui joint les points de contact rencontre Δ en deux points P et Q, et les tangentes en P et Q à Δ se rencontrent en un point I, dont on demande le lieu géométrique quand M parcourt la circonférence.

2. — Ce lieu est une conique U, dont on demande de déterminer le genre d'après la position de C sur Oy.

3. — Construire cette conique en supposant $a^2 = 3b^2$, et en admettant que C coïncide avec B.

4. — La tangente en A au cercle rencontre U en deux points P′ et Q′. Trouver le lieu de P′ et celui de Q′ quand C décrit Oy.

5. — De l'origine on abaisse une perpendiculaire OP″ sur CP′, et une autre OQ″ sur CQ′. Trouver le lieu de P″ et celui de Q″. *(G. L.)*

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 9164-2.

THÉORIE DE L'INVOLUTION DU SECOND DEGRÉ

Nous avons donné, dans ce journal, à un moment où il ne traitait que des questions de mathématiques élémentaires, un premier article sur l'Involution ; depuis cette époque, le journal s'est transformé, et nous nous proposons de reprendre la question, et de l'étudier sans nous préoccuper de la distinction, ici factice, entre les mathématiques élémentaires et les mathématiques spéciales; l'exposition de la théorie ne sera pas moins simple ; mais les applications seront plus nombreuses, plus variées, et par suite plus utiles à tous nos lecteurs.

Soit $ax^2 + 2bx + c = 0$ l'équation qui détermine sur une droite fixe, à partir d'une origine fixe O, les abscisses α et β, réelles ou imaginaires, finies ou infinies, égales ou inégales, d'un couple de points A et B ;

Soit ensuite $a'x^2 + 2b'x + c' = 0$ l'équation qui détermine sur la même droite, à partir de la même origine, les abscisses α' et β', d'un autre couple de points A' et B' ;

L'équation

$$(\lambda)\quad ax^2 + 2bx + c + \lambda(a'x^2 + 2b'x + c') = 0,$$

représente sur la même droite un couple, P et Q, variable avec λ; et nous nous proposons d'étudier les propriétés de ce couple mobile, dont nous désignerons les abscisses par u et v; nous avons les relations;

$$\begin{cases} u + v = -\dfrac{2(b + \lambda b')}{a + \lambda a'} \\ uv = \dfrac{c + \lambda c'}{a + \lambda a'} \end{cases}$$

ou bien

$$\begin{cases} a(u + v) + 2b + \lambda[a'(u + v) + 2b'] = 0 \\ a.uv - c + \lambda[a'.uv - c] = 0: \end{cases}$$

d'où nous concluons, en éliminant λ, la relation

$$0 = \begin{vmatrix} a(u + v) + 2b, & a'(u + v) + 2b' \\ a.uv - c, & a'.uv - c' \end{vmatrix}$$

ou bien

$$2(ab' - ba')uv + (ac' - ca')(u + v) + 2(bc' - cb') = 0;$$

donc il existe entre les abscisses des deux extrémités P *et* Q *du segment, mobile avec* λ, *une relation de la forme*

$$[u,v] \cdots 2g.uv + h(u + v) + 2k = 0.$$

c'est-à-dire une relation qui est à la fois homographique et symétrique.

Remarque. — La relation précédente n'est pas en général une identité, et ne pourrait le devenir accidentellement que si l'on avait les relations particulières

$$ab' - ba' = 0, \quad bc' - cb' = 0, \quad ac' - ca' = 0,$$

c'est-à-dire que si les deux couples primitifs, A et B, A′ et B′, coïncidaient complètement l'un avec l'autre.

Cela posé, je vais démontrer réciproquement que si un couple variable (P, Q) se déplace sur une droite d'après une relation donnée

$$2G.uv + H(u + v) + K = 0, \qquad (1)$$

on peut reproduire tous les couples mobiles à l'aide d'une seule équation du second degré qui contienne un paramètre variable et qui soit de la forme (λ).

En effet uv et $u + v$ étant liés par une seule relation linéaire (1), nous pouvons nous donner à volonté l'une de ces deux quantités; posons par exemple

$$uv = \frac{r + \lambda r'}{p + \lambda p'} \ (^*).$$

Nous en concluons sans peine

$$u + v = -\frac{2(q + \lambda q')}{p + \lambda p'}$$

ou

$$q = \frac{G.r + K.p}{H}, \quad q' = \frac{Gr' + Kp'}{H};$$

donc u et v sont les racines de l'équation

$$px^2 + 2qx + r + \lambda(p'x^2 + 2q'x + r') = 0;$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

(*) On sait que l'expression rationnelle $\frac{r + \lambda r'}{p + \lambda p'}$ parcourt, dans un seul sens de variation, toute l'échelle des grandeurs tant positives que négatives, quand λ de $-\infty$ à $+\infty$.

Remarque. — La démonstration précédente semble d'abord en défaut par les valeurs de q et de q', quand H est nul; mais il suffit, pour combler cette lacune apparente, de remarquer que si H est nul, ce n'est pas uv qui doit être pris à volonté, mais $u + v$, et alors la démonstration se continue de la même manière; cette observation est d'autant plus importante que le cas particulier ainsi signalé peut, comme nous le verrons bientôt, être regardé comme étant le cas général.

Cela posé, nous adoptons la définition suivante:

Quand un segment (P, Q), *mobile sur une droite fixe, se déplace par la condition que les abscisses de ses extrémités soient les racines de l'équation*

$$(\lambda)\ ax^2 + 2bx + c + \lambda(a'x^2 + 2b'x + c') = 0,$$

les positions successives de ce segment forment ce que l'on nomme une involution du second ordre sur la droite fixe.

Il en résulte que les abscisses, u et v, du segment mobile sont liées par la relation

$$2g\,.uv + h\,(u + v) + 2k = 0$$

ou :

$$g = ab' - ba',$$
$$h = ac' - ca',$$
$$k = bc' - cb'.$$

Nous avons donc deux définitions algébriques différentes de forme pour caractériser une seule et même involution; et nous sommes, dès ce moment, autorisés à user tantôt de l'une, tantôt de l'autre, soit pour reconnaître la nature *involutive* d'un segment mobile sur une droite, soit pour étudier les propriétés d'une involution donnée.

Théorème. — *Une involution est déterminée et unique, quand on connaît deux segments en grandeur et en position.*

En effet pour déterminer une involution, il faut et il suffit que l'on connaisse les valeurs proportionnelles des coefficients g, h, k; or en posant

$$u_1v_1 = P_1 \qquad u_1 + v_1 = S_1$$
$$u_2v_2 = P_2 \qquad u_2 + v_2 = S_2$$

P_1, P_2, S_1, S_2, sont les données; on a donc

$$2g \,.\, uv + h(u+v) + 2k = 0,$$
$$2g \,.\, P_1 + h \,.\, S_1 + 2k = 0.$$
$$2g \,.\, P_2 + h \,.\, S_2 + 2k = 0;$$

éliminant g, h, k entre ces trois équations homogènes, on aura la relation d'involution, qui est donc

$$\begin{vmatrix} uv & u+v & 1 \\ P_1 & S_1 & 1 \\ P_2 & S_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

ou bien

$$(S_1 - S_2)uv - (P_1 - P_2) \,.\, (u+v) + P_1 \,.\, S_2 - P_2 \,.\, S_1 = 0.$$

et il en résulte que tous les couples de l'involution seront produits par l'équation

$$x^2 - S_1 \,.\, x + P_1 + \lambda(x^2 - S_2 x + P_2) = 0,$$

ce qui résulterait d'ailleurs immédiatement de la première définition de l'involution.

La relation

$$(S_1 - S_2)uv - (P_1 - P_2) \,.\, (u+v) + P_1 S_2 - P_2 \,.\, S_1 + 0$$

met en évidence un fait important : le coefficient $S_1 - S_2$ ne peut être nul que par exception ; pour cela il suffit que les deux segments donnés aient le même milieu, c'est-à-dire soient déterminés sur la droite par deux circonférences ayant leurs centres sur une même perpendiculaire à la droite fixe, et alors tous les segments auront le même milieu, puisque la relation deviendra

$$u + v = S_1.$$

Mais n'oublions pas que cette involution composée, sans exception, d'une suite de segments, réels ou imaginaires, ou nuls, qui ont tous le même milieu, est une involution en quelque sorte exceptionnelle.

La même relation va mettre en évidence une propriété commune à toutes les involutions.

Supposons que sans changer les deux segments, réels ou imaginaires, qui déterminent l'involution, on fasse mouvoir sur la droite fixe le point O qui sert d'origine commune à toutes les abscisses ; si cette origine avance d'une quantité indéterminée z, les sommes données deviendront

$$u_1 - z + v_1 - z = S_1 - 2z$$

et

$$u_2 - z + v_2 - z = S_2 - 2z$$

et les produits donnés deviendront

l'un : $(u_1 - z)(v_1 - z) = P_1 - z \,.\, S_1 + z^2$;

l'autre : $(u_2 - z)(v_2 - z) = P_2 - z \,.\, S_2 + z^2$;

donc si l'on détermine z par la condition

$$P_1 - z \,.\, S_1 + z^2 = P_2 - z \,.\, S_2 + z^2,$$

on trouvera

$$z = \frac{P_1 - P_2}{S_1 - S_2};$$

donc : *pour toute involution, il existe, sur la droite fixe, un point, et un seul, qui pris comme origine réduit la relation fondamentale à la forme simple*

$$ux = \text{constante}.$$

Ce point qui ne se transporterait à l'infini que pour l'involution exceptionnelle dont tous les segments ont le même milieu, *se nomme le centre de l'involution* ; la valeur de z qui précède détermine exactement la position de ce centre.

Théorème. — *Dans toute involution il y a deux segments qui ont chacun une longueur nulle.*

En effet, en supposant que l'involution soit définie par la relation

$$2g.uv + h(u + v) + 2k = 0,$$

un segment deviendra nul quand on aura

$$u = v;$$

donc l'équation du problème est

$$2g \,.\, \delta^2 + 2h \,.\, \delta + 2k = 0, \qquad (\delta)$$

Cette équation du second degré aura généralement deux racines distinctes, réelles ou imaginaires ; chacune de ces racines sera une valeur de u telle que $v = u$; le théorème est donc démontré.

Remarque I. — Si $h = 0$, c'est-à-dire, si on a eu le soin de mettre l'origine au centre de l'involution, les deux racines de l'équation (δ) seront égales et de signes contraires ; donc : *les deux points qui forment chacun un segment nul, et qu'on nomme les* POINTS DOUBLES *de l'involution, sont symétriques l'un de l'autre relativement au centre de l'involution.*

Remarque II. — Pour déterminer les points doubles, on pourrait aussi se servir de l'équation (λ) et exprimer qu'elle

a ses deux racines égales, ce qui donne la condition

$$(a + \lambda a')(c + \lambda c') - (b + \lambda b')^2 = 0$$

ou bien

$$(a'c' - b'^2)\lambda^2 + (ac' + ca' - 2bb')\lambda + ac - b^2 = 0.$$

Remarque III. — La réalité des deux points doubles d'une involution est caractérisée par l'une quelconque des inégalités :

$$4(ab' - ba')(bc' - cb') - (ac' - ca')^2 < 0$$

ou $$4(ac - b^2)(a'c' - b'^2) - (ac' + ca' - 2bb')^2 < 0.$$

L'imaginarité des deux points doubles est caractérisée par une quelconque des inégalités contraires.

On reconnaîtra sans peine, et par un calcul simple, que l'une quelconque des inégalités exprimant la réalité des deux points doubles peut s'écrire

$$R = -a^2a'^2(\alpha - \alpha')(\alpha - \beta') \cdot (\beta - \alpha')(\beta - \beta') < 0.$$

Remarque IV. — Il résulte de cette dernière transformation que les deux points doubles d'une involution sont généralement distincts l'un de l'autre, et ne peuvent se réunir en un seul que si les deux segments AB, A'B', qui déterminent l'involution, ont une extrémité commune.

(A suivre.)

QUESTION 359

Solution par M. P. Petit, élève au lycée de Grenoble.

Trouver la condition pour que les deux polynômes

$$ax^7 + bx^3 + c,$$
$$cx^7 + bx^4 + a,$$

aient un facteur commun du deuxième degré.

Soit $f(x)$ le premier polynôme. Je remarque que le second polynôme est la transformée en $\frac{1}{x}$ de $f(x)$. Si ces deux polynômes ont un facteur commun du deuxième degré, il faudra que $f(x) = 0$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ aient deux racines communes. Or ces racines ne peuvent être que ± 1. Il faudra donc que l'équa-

tion $f(x) = 0$ admette les deux racines ± 1, c'est-à-dire :

$$a + b + c = 0$$
$$-(a + b) + c = 0$$

c'est-à-dire enfin :

$$c = 0$$
$$a + b = 0.$$

QUESTION 386

Solution, par M. Charles JULLIEN, élève au Lycée Henri IV.

Trouver le nombre de manières dont on peut distribuer p *objets distincts entre* q *personnes, de telle sorte que chacune d'elles ait un objet au moins.*

Désignons par N_p^q le nombre cherché. Proposons-nous d'abord de trouver le nombre N_q^q. Chacune des personnes devant avoir un objet au moins, le nombre de manières de distribuer p objets entre q personnes est évidemment égal au nombre de permutations de q lettres ou à P_q.

Cherchons maintenant une relation entre le nombre N_{q+n-1}^q et le nombre N_{q+n}^q.

Supposons les $(q + n - 1)$ premiers objets distribués d'une des N_{q+n-1}^q manières possibles, il faut donner de plus un objet à l'une quelconque des personnes ; il y a q manières de le faire ; donc on a en tout qN_{q+n-1}^q manières de distribuer les $(q + n)$ objets. Appliquant le raisonnement ordinaire, on montrerait que toutes ces manières sont distinctes, et que toutes les manières possibles ont été employées.

On a alors la relation

$$qN_{q+n-1}^q = N_{q+n}^q.$$

Faisant n égal successivement à $1, 2, \ldots, n$, on a

$$N_{q+1}^q = q\,N_q^q = qP_q$$
$$N_{q+2}^q = qN_{q+1}^q$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$N_{q+n}^q = qN_{q+n-1}^q.$$

Faisant le produit membre à membre de ces égalités, il vient

$$N_{q+n}^q = q^n P q.$$

Faisons dans cette formule $n = p - q$, nous aurons

$$N_p^q = q^{p-q} P_q,$$

c'est-à-dire la formule cherchée.

QUESTION 388

Solution par M. Paul Boulogne, élève de mathématiques spéciales au lycée Saint Louis (cours de M. Édouard Lucas).

Les axes d'une ellipse sont dirigés suivant deux droites rectangulaires données ox *et* oy. *Soit* M *le point de cette ellipse où le cercle osculateur a la même surface que l'ellipse. Soit* μ *le centre de ce cercle : 1° la distance du centre de ce cercle osculateur au centre de l'ellipse est égale à la demi-différence des axes : 2° si la somme des axes de l'ellipse reste constante, le lieu de* M *est l'enveloppe d'une droite de longueur constante qui glisse sur les deux droites* ox, oy ; *et le lieu de* μ *est la rosace à quatre branches, lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du centre de l'ellipse sur une droite de longueur constante qui glisse sur les bissectrices des angles des axes.* (E. Lemoine).

Soit
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad (1)$$
l'équation de l'ellipse rapportée à ses axes ;
$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - ab = 0 \qquad (2)$$
celle d'un cercle de même surface que l'ellipse. Pour écrire que les deux courbes sont osculatrices, écrivons que l'équation en λ
$$\lambda^3 + \lambda^2 [a^2 + b^2 - (\alpha^2 + \beta^2 - ab)]$$
$$+ \lambda [a^2b^2 - (a^2 + b^2)(\alpha^2 + \beta^2 - ab) + b^2\beta^2 + a^2\alpha^2] + a^3b^3 = 0$$
a une racine triple et remarquons que cette racine triple sera $- ab$:
$$[a^2 + b^2 - (\alpha^2 + \beta^2 - ab)]^3 = 27\, a^3b^3$$
$$[a^2 + b^2 - (\alpha^2 + \beta^2\, ab)$$
$$[a^2b^2 - (a^2 + b^2)(\alpha^2 + \beta^2 - ab) + b^2\beta^2 + a^2\alpha^2] = 9\, a^3b^3.$$
La première équation nous donne
$$\alpha^2 + \beta^2 = (a - b)^2, \qquad (3)$$

qui exprime que la distance du centre du cercle osculateur de même surface que l'ellipse au centre de l'ellipse est $a - b$. En se servant de la première équation pour modifier la seconde, on ramène celle-ci à la forme simple

$$a\beta^2 - b\alpha^2 = 0. \qquad (4)$$

Les équations (3) et (4), où α et β sont considérés comme variables, représentent un cercle et deux droites dont les points d'intersection sont les centres. Le point M est donné par l'intersection des deux droites dont l'équation quadratique est

$$x^2\left(\frac{a-b}{a}\right) + y^2\left(\frac{b-a}{a}\right) - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 = 0,$$

qui est donnée en remplaçant λ par $-ab$ dans l'équation générale des coniques passant par l'intersection de (1) et de (2), ou en dérivant

$$\frac{x(a-b)}{a} = \alpha, \qquad (5)$$

$$\frac{y(b-a)}{b} = \beta. \qquad (6)$$

Pour avoir le lieu de M, quand la somme des axes reste constante, il faut éliminer α, β, a et b entre (3), (4), (5), (6) et

$$a + b = l.$$

L'élimination de β et de α se fait immédiatement, et on a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \qquad (7)$$

$$a\,\frac{y^2}{b^2} = b\,.\,\frac{x^2}{a^2}. \qquad (8)$$

Tirant $\frac{y^2}{b^2}$ de (7) et portant dans (8) on trouve

$$a^3 = lx^2.$$

De même

$$b^3 = ly^2.$$

Le lieu de M est donc

$$(x^2)^{\frac{1}{3}} + (y^2)^{\frac{1}{3}} = (l^2)^{\frac{1}{3}},$$

épicycloïde à quatre rebroussements et symétrique par rapport à l'origine. C'est l'enveloppe d'une droite de longueur l glissant sur ox et oy.

Pour avoir le lieu de p, il suffit d'éliminer a et b entre (3), (4) et $a + b = l$.

Tirant a et b de (4) et de cette dernière et portant dans (3), on obtient

$$(x^2 + y^2)^3 = l^2 (x^2 - y^2)^2.$$

C'est la rosace à quatre branches dont parle l'énoncé.

En effet, si on élimine θ et ρ entre

$$\frac{y\sqrt{2} + \theta}{x\sqrt{2} - \theta} = \frac{\rho + \theta}{\rho - \theta}, \qquad (9)$$

équation d'une droite glissant sur les bissectrices des axes,

$$y = \frac{\theta - \rho}{\theta + \rho} x, \qquad (10)$$

perpendiculaire abaissée de l'origine, et $\theta^2 + \rho^2 = \sigma^2$, qui exprime que la longueur de la droite est constante, on trouve pour lieu du pied de (10) sur (9)

$$(x^2 + y^2)^3 = \frac{\sigma^2}{4} (x^2 - y^2)^2,$$

et la droite de longueur constante dont parle l'énoncé pour le lieu de p est double de la somme des axes.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Dupuy, de Grenoble; Baron, à Paris.

QUESTION 396

Étant donnée une conique autour d'un point fixe P *de son plan, on fait tourner une sécante* PDD′ *et on joint un foyer* F *aux points* D *et* D′ *où cette droite rencontre la courbe. Démontrer que l'on a* $\operatorname{tg}\frac{PFD}{2} \times \operatorname{tg}\frac{PFD'}{2} = \text{const.}$

Ce problème se traite facilement au moyen des coordonnées trilatères.

Je prends pour triangle de référence le triangle rectangle ayant pour sommet de l'angle droit le foyer F, pour hypoténuse la directrice AB et comme un des côtés de l'angle droit la droite FP.

L'équation de la conique donnée est alors

$$X^2 + Y^2 = e^2 Z^2,$$

e étant l'excentricité.

L'équation de toute sécante dont les paramètres angulaires des points d'intersection avec la conique sont φ_1 et φ_2 est

$$X \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + Y \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = eZ \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}.$$

J'exprime que cette sécante passe par le point fixe P dont les coordonnées sont X_0, O, Z_0 :

$$X_0 \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = eZ_0 \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$$

ou bien

$$\frac{\cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}}{\cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}} = K$$

ou encore

$$\frac{\cos \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2} - \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2}}{\cos \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2} + \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2}} = K.$$

Je divise le numérateur et le dénominateur par

$$\cos \frac{\varphi_1}{2} \times \cos \frac{\varphi_2}{2}$$

$$\frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{3}} = K.$$

D'où

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2} = \frac{1 - K}{1 + K}.$$

Or φ_1 et φ_2 sont les angles PFD, PFD'. Donc l'on a bien

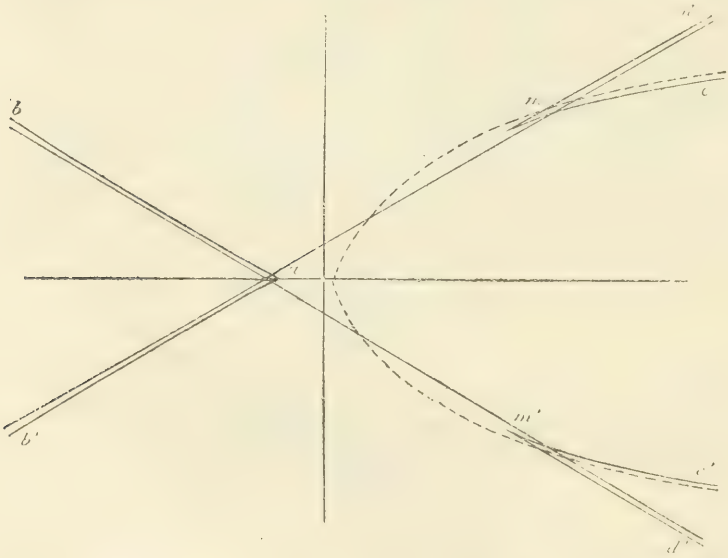
$$\operatorname{tg} \frac{\mathrm{PFD}}{2} \times \operatorname{tg} \frac{\mathrm{PFD'}}{2} = \text{constant}.$$

QUESTION 3

Solution par M. Kœhler.

Mener par un point donné une droite telle que le segment intercepté par une parabole donnée soit maximum ou minimum. Le problème admet trois solutions. Trouver le lieu des points du plan pour lesquels deux des solutions se confondent : ce lieu, du quatrième degré, partage le plan en deux régions : discuter le problème lorsque le point donné est dans l'une ou l'autre de ces régions.

Soient $y^2 = 4px$ l'équation de la parabole, (α, β) les coor-



données d'un point de son plan, m le coefficient angulaire d'une corde menée par ce point.

Les ordonnées de l'extrémité de la corde sont racines de l'équation $$my^2 - 4py + 4p(\beta - m\alpha) = 0.$$

Le carré de la longueur de la corde est

$$C^2 = \frac{16p}{m^4}(p - m\beta + m^2\alpha)(1 + m^2).$$

On a donc à rendre maximum ou minimum la fonction

$$f(m) = \frac{1}{m^4}(p - m\beta + m^2\alpha)(1 + m^2).$$

ce qui donne

$$f'(m) = \frac{1}{m^3}(\beta m^3 - 2m^2(p + \alpha) + 3\beta m - 4p) = 0.$$

Pour un point donné (α, β), on a trois valeurs de m; si l'on cherche la condition pour que $f'(m) = 0$ ait deux racines égales, on trouve

$$9y^2(x - 5p)^2 + [9y^2 - 4(x + p)^2][9y^2 - 24p(x + p)] = 0$$

ou $27y^4 - 9y^2(x^2 + 14px + p^2) + 32p(x + p)^3 = F(x,y) = 0$ après avoir remplacé α, β par x, y.

Cette courbe partage le plan en deux régions, celle pour laquelle on a une seule corde réelle satisfaisant à la condition $f'(m) = 0$, et celle pour laquelle on en a trois.

La première région est caractérisée par $F(x,y) > 0$, la seconde par $F(x,y) < 0$.

Étude de la courbe. — Pour $y = 0$, $x = -p$, on a un point de rebroussement avec l'axe des x pour tangente.

Pour $x = 5p$, $y = \pm 4p$, les deux points ainsi obtenus sont encore des points de rebroussement; les tangentes sont $y - 4p = \frac{1}{2}(x - 5p)$, $y + 4p = -\frac{1}{2}(x - 5p)$.

Il y a deux asymptotes réelles

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{5p\sqrt{3}}{9}$$

et

$$y = -\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{5p\sqrt{3}}{9}.$$

En résolvant par rapport à y^2, on trouve

$$54y^2 = 9(x^2 + 14x + p^2)$$
$$\pm\sqrt{27(3x^4 - 44px^3 + 210p^2x^2 - 300p^3x - 125p^4)}.$$

La racine du polynôme $9x^4 - 132px^3 + \ldots$ est

$$3x^2 - 22px + \frac{73}{3}p^2 \text{ (avec un reste).}$$

D'après cela les courbes

$$54y^2 = 9(x^2 + 14x + p^2) \pm 3(3x^2 - 22px + \frac{73}{3}p^2)$$

sont des coniques asymptotes. Celle qui répond au signe + est une hyperbole ayant les mêmes asymptotes que la courbe du quatrième degré; celle qui répond au signe — est une parabole $27y^2 = 32p(3x - p)$.

Elle est asymptote aux deux branches paraboliques les plus rapprochées de la partie positive de l'axe des x; cette parabole est tracée en pointillé sur la figure.

Il faut examiner maintenant ce qui arrive quand le point $(\alpha\beta)$ se trouve sur la courbe du quatrième degré, ou dans les deux régions du plan qu'elle sépare.

En appelant $\varphi(m)$ le numérateur de $f''(m)$, on a pour la dérivée seconde $f''(m) = \frac{m\varphi'(m) - 5\varphi(m)}{m^6}$, et il suffit de consulter la valeur de $\frac{\varphi(m)}{m^5}$, puisque $\varphi(m)$ est nul pour les valeurs de m que l'on a à considérer. On peut aussi supposer β positif à cause de la symétrie par rapport à l'axe des x.

Premier Cas.— Les trois racines de $\varphi(m) = 0$ sont réelles et de plus $\alpha + p$ est positif.

La règle de Descartes montre que l'équation

$$\varphi(m) = \beta m^3 - 2m^2(\alpha + p) + 3m\beta - 4p = 0$$

a ses trois racines positives.

D'après le théorème de Rolle, $\varphi'(m)$ est négatif pour la racine intermédiaire, positif pour les deux autres; il en est de même pour $f''(m)$. Il y a donc un cercle maximum et deux minimums. Les points correspondants sont évidemment situés dans les espaces angulaires cmd, $c'm'd'$.

Deuxième Cas.— Les trois racines de $\varphi(m) = 0$ sont réelles et $\alpha + p$ est négatif.

On a une racine positive et deux négatives. Pour la plus petite racine négative, $\varphi'(m) > 0$, $m^5 < 0$, $f''(m) < 0$, et il y a maximum. Pour la plus grande racine négative $\varphi'(m) < 0$, $m^5 < 0$, $f''(m) > 0$, et il y a minimum. Enfin pour la racine positive $\varphi'(m) > 0$, $m^5 > 0$, $f''(m) > 0$; on a encore un minimum.

Les points correspondants sont situés dans l'espace angulaire *bab'*. Ce cas ne se distingue du précédent que par l'ordre dans lequel se présentent les cercles maximum et minimum.

Troisième Cas. — Une seule racine de $\varphi(m) = 0$ est réelle.

Cette racine est positive, le dernier terme de $\varphi(m)$ étant négatif; $\varphi'(m)$ est positif pour cette racine; $f''(m)$ l'est aussi et par suite on a un minimum. Les points correspondants sont en dehors des espaces angulaires *bab'*, *cmd*, *c'm'd'*.

Quatrième Cas. — $\varphi(m) = 0$ a une racine double.

A cette racine ne correspond ni un maximum, ni un minimum; on a un minimum pour la racine simple.

Les points correspondants sont ceux de la courbe du quatrième degré.

QUESTION 46

Solution par M. Genin, élève du Lycée Louis-le-Grand.

Démontrer que l'équation $x^m + px^{m-1} + p\frac{(p+1)}{1.2}x^{m-2} + Ax^{m-3} \ldots 1\ L = 0$, *dans laquelle* p *est un nombre positif quelconque, a au moins deux racines imaginaires.*

(G. L.)

Soit p positif. On a l'identité

$$\left[x + \frac{p}{m}\right]^m = x^m + m\frac{p}{m}x^{m-1}\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{p^2}{m^2}x^{m-2} + \varphi(x)$$

ou

$$\left[x + \frac{p}{m}\right]^m = x^m + px^{m-1} + \frac{(m-1)p^2}{1.2.m}x^{m-2} + \varphi(x)$$

$\varphi(x)$ étant un polynôme entier en x de degré $m - 3$.

L'équation proposée peut donc s'écrire

$$\left[x + \frac{p}{m}\right]^m + \left[\frac{p(p+1)}{1.2} - \frac{(m-1)p^2}{1.2.m}\right]x^{m-1} - \varphi(x) + Ax^{m-3} \ldots L = 0$$

ou, en réduisant

$$\left(x + \frac{p}{m}\right)^m + \frac{p}{1.3.m}(m+p)\,x^{m-2} + \Psi(x) = 0$$

$\Psi(x)$ étant un polynôme entier en x de degré $m - 3$.

Posons $y = x + \frac{p}{m}$, l'équation devient

$$y^m + \frac{p}{1.2.m}(m+p)\left(y - \frac{p}{m}\right)^{m-2} + \Psi\left(y - \frac{p}{m}\right) = 0 ;$$

$\Psi\left(y - \frac{p}{m}\right)$ est un polynôme entier en y de degré $m - 3$. par suite les termes de degré supérieur à $m - 3$ sont

$$y \quad + \frac{p}{1.2.m}(m+p)\,y^{m-2}.$$

Ces termes sont évidemment de même signe, puisqu'on a supposé p positif, de plus ils présentent une lacune ; donc il y a au moins deux racines imaginaires dans l'équation en y et par suite dans l'équation en x.

QUESTION 54

Solution par M. Levavasseur, élève au Lycée Charlemagne.

On suppose que l'équation $U = 0$ *a toutes ses racines réelles. Démontrer que les équations*

$$f_1 = U + (x - a)\,U' = 0$$
$$f_2 = U + 3(x - a)\,U' + (x - a)^2\,U'' = 0$$
$$f_3 = U + 7(x - a)\,U' + 6(x - a)^2\,U'' + (x - a)^3\,U''' = 0$$

ont aussi, quel que soit a, *leurs racines réelles (*a *est réel, bien entendu,* U', U'', U'''... *sont les dérivées successives de* U*). Donner l'expression générale de* $f_n = 0$ *et montrer que, en posant*

$$f_n = \alpha_{n,0}U + \alpha_{n,1}(x - a)\,U + \alpha_{n,2}(x - a)^2\,U'' + \ldots$$

on a

$$\alpha_{n,0} = 1 : \quad \alpha_{n,1} = \frac{2^n - 1}{1} ; \quad \alpha_{n,2} = \frac{3^n - 2.2^n - 1}{1.2} ;$$

$$\alpha_{n,3} = \frac{4^n - 3.3^n + 3.2^n - 1}{1.2.3}, \text{ etc.,}$$

(G.L.)

Étant donnée l'équation $U = 0$ je considère toutes les équations en nombre infini

$$U_1 = U + (x - a)U';$$
$$U_2 = U_1 + (x - a)U_1';$$
$$U_3 = U_2 + (x - a)U_2'; \ldots;$$
$$U_n = U_{n-1} + (x - a)U_{n-1}'; \ldots \text{ etc.}$$

Je dis que toutes ces équations ont leurs racines réelles. En effet, l'équation $U = 0$ a toutes ses racines réelles. Il en est de même de l'équation $(x - a)U = 0$, puisque a représente une quantité réelle. Mais alors, d'après un corollaire du théorème de Rolle, l'équation dérivée doit avoir toutes ses racines réelles. Donc l'équation $U_1 = 0$ a toutes ses racines réelles. Par un raisonnement identique, de ce que l'équation $U_1 = 0$ a toutes ses racines réelles, on conclut que l'équation $U_2 = 0$ a aussi toutes ses racines réelles, et ainsi de suite, de proche en proche, indéfiniment.

Proposons-nous maintenant de calculer les premiers membres de ces équations en fonction des dérivées successives du polynôme U.

D'abord $\quad U_1 = U + (x - a)U'$,

donc $\quad U_1' = 2U' + (x - a)U''$,

et $\quad (x - a)U_1' = 2(x - a)U' + (x - a)^2U''$;

alors

$$U_2 = U_1 + (x - a)U_1' = U + 3(x - a)U' + (x - a)^2U''.$$

On trouverait, en faisant un calcul analogue,

$$U_3 = U + 7(x - a)U' + 6(x - a)^2U'' + (x - a)^3U''' = 0.$$

puis

$$U_4 = U + 15(x - a)U' + 25(x - a)^2U'' + 10(x - a)^3U''' + (x - a)^4U^{(4)} = 0.$$

En général, posons

$$U_{n-1} = U + \alpha_{1,n-1}(x - a)U' + \alpha_{2,n-1}(x - a)^2U'' + \ldots$$
$$+ \alpha_{h,n-1}(x - a)^hU^{(h)} + \ldots + \alpha_{n-1,n-1}(x - a)^{n-1}U^{(n-1)} = 0.$$
$$U_{n-1}' = (1 + \alpha_{1,n-1})U' + (\alpha_{1,n-1} + 2\alpha_{2,n-1})(x - a)U'' + \ldots$$
$$+ (\alpha_{h-1,n-1} + h\alpha_{h,n-1})(x - a)^{h-1}U^{(h)} + \ldots$$
$$+ \alpha_{n-1,n-1}(x - a)^{n-1}U^{(n)}.$$

Donc $\quad (x - a)U_{n-1}' = (1 + \alpha_{1,n-1})(x - a)U'$

$$+ (\alpha_{1,n-1} + 2\alpha_{2,n-1})(x - a)^2U'' + \ldots$$
$$+ (\alpha_{h-1,n-1} + h\alpha_{h,n-1})(x - a)^hU^{(h)} + \ldots + \alpha_{n-1,n-1}(x - a)U^{(n)}.$$

Donc enfin

$$\begin{aligned} U_n = U &+ (1 + 2\alpha_{1,n-1})(x-a)U' \\ &+ (\alpha_{1,n-1} + 3\alpha_{2,n-1})(x-a)^2 U'' + \ldots \\ &+ [\alpha_{h-1,n-1} + (h+1)\alpha_{h,n-1}](x-a)U_{(h)} + \ldots \\ &+ \alpha_{n-1,n-1}(x-a)^n U^{(h)}. \end{aligned}$$

Donc on a les égalités suivantes :

$$\alpha_{1,n} = 1 + 2\alpha_{1,n-1};$$

$$\alpha_{2,n} = \alpha_{1,n-1} + 3\alpha_{2,n-1} \ldots$$

en général $\alpha_{h,n} = \alpha_{h-1,n-1} + (h+1)\alpha_{h,n-1}, \ldots$

enfin $\alpha_{n,n} = \alpha_{n-1,n-1}$.

De la première de ces égalités je déduis le tableau suivant :

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{1,n} &= 1 + 2\alpha_{1,n-1} \\ \alpha_{1,n-1} &= 1 + 2\alpha_{1,n-2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1,1} &= 1 + 2\alpha_{1,0} \end{aligned}\right\}$$

Je multiplie la première de ces égalités par 2^0, la seconde par 2^1, la troisième par 2^2, etc., la dernière par 2^{n-1}, et j'ajoute. J'obtiens, en remarquant que $\alpha_{1,0} = 0$, la relation

$$\alpha_{1,n} = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

De même

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{2,n} &= \alpha_{1,n-1} + 3\alpha_{2,n-1} \\ \alpha_{2,n-1} &= \alpha_{1,n-2} + 3\alpha_{2,n-2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{2,2} &= \alpha_{1,1} + 3\alpha_{2,1} \\ \alpha_{2,1} &= \alpha_{1,0} + 3\alpha_{2,0} \end{aligned}\right\}$$

Je multiplie la première de ces égalités par 3^0, la seconde par 3^1, ... la dernière par 3^{n-1}, et j'ajoute en remarquant que $\alpha_{1,0} = 1$ et que $\alpha_{1,0} = 0$. J'ai la relation $\alpha_{2,n} = \alpha_{1,n-1} + 3\alpha_{1,n-2} + 3^2\alpha_{1,n-3} + \ldots + 3^{n-1}\alpha_{1,0}$.

Or $\alpha_{1,n-1} = 2^{n-1} - 1$; $\alpha_{1,n-2} = 2^{n-2} - 1$; etc ... $\alpha_{1,0} = 2^0 - 1$.

Donc

$$\begin{aligned} \alpha_{2n,} = &[2^{n-1} + 3 \,.\, 2^{n-2} + 3^2 \,.\, 2^{n-3} + \ldots + 3^{n-2} \,.\, 2 + 3^{n-1}] \\ &- [1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{n-1}] \end{aligned}$$

ou bien $\alpha_{2,n} = 3^n - 2^n - \dfrac{3^n - 1}{2} = \dfrac{3^n - 2 \,.\, 2^n + 1^n}{1 \,.\, 2}$.

On trouverait absolument de la même façon

$$\alpha_{3,n} = \frac{4^n - 3 \,.\, 3^n + 3 \,.\, 2^n - 1^n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3},$$

puis $\alpha_{4,n} = \dfrac{5^n - 4 \cdot 4^n + 6 \cdot 3^n - 4 \cdot 2^n + 1^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$, etc.

Nous allons démontrer que cette loi est générale. A cet effet, supposons la loi vraie pour le terme de rang $h - 1$. Ce terme s'écrira donc

$$\alpha_{h-1,n} = \frac{h^n - \dfrac{h-1}{1}(h-1)^n + \dfrac{(h-1)(h-2)}{1 \cdot 2}(h-\ )^n - \ldots + (-1)^k \dfrac{(h-1)(h-2)\ldots(h-k)}{1 \cdot 2 \ldots k}(h-k)^n + \ldots + (-1)^{h-1} 1^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (h-1)} \qquad (1)$$

On peut former le tableau suivant :

$$\begin{aligned}
\alpha_{h,n} &= \alpha_{h-1,n-1} + (h+1)\,\alpha_{h,n-1} \\
\alpha_{h,n-1} &= \alpha_{h-1,n-2} + (h+1)\,\alpha_{h,n-2} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_{h,2} &= \alpha_{h-1,1} + (h+1)\,\alpha_{h,1} \\
\alpha_{h,1} &= \alpha_{h-1,0} + (h+1)\,\alpha_{h,0}
\end{aligned}$$

Je multiplie la première de ces égalités par $(h+1)^0$, la seconde par $(h+1)^1$, la troisième par $(h+1)^2$, etc., la dernière par $(h+1)^{n-1}$ et j'ajoute. En remarquant que $\alpha_{h,0} = 0$, j'ai la relation suivante :

$$\begin{aligned}
\alpha_{h,n} = \alpha_{h-1,n-1} &+ (h+1)\alpha_{h-1,h-2} + (h+1)^2\alpha_{h-1,n-3} + \ldots \\
&+ (h+1)^{n-2}\,\alpha_{h-1,1} + (h-1)^{n-1}\,\alpha_{h-1,0}.
\end{aligned}$$

De l'équation (1) je déduis les valeurs de $\alpha_{h-1,n-1}$, $\alpha_{h-1,n-2}$, ..., $\alpha_{h-1,0}$; on a par conséquent

$$\begin{aligned}
1 \cdot 2 \ldots (h-1)\alpha_{h,n} = {} & [h^n + h^{n-1}(h+1) + h^{n-2}(h+1)^2 \\
& \ldots + h(h+1)^{n-1} + (h+1)^n] - \frac{R-1}{1}[(h-1)^n \\
& + (h-1)^{n-1}(h+1) + (h+1)^{n-2}(h+1)^2 + \ldots \\
& + (h-1)(h+1)^{n-1} + (h+1)^n] \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + (-1)^{h-1}[1^n + 1^{n-1}(h+1) + 1^{n-2}(h+1)^2 + \ldots \\
& + 1(h+1)^{n-1} + (h+1)^n]
\end{aligned}$$

ou bien encore

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (h-1)\alpha_{h,n} = \frac{(h+1)^{n+1} - h^{n+1}}{1} - \frac{h-1}{1}$$

$$\frac{(h+1)^{n+1}-(h-1)^{n+1}}{2}+\frac{(h-1)(h-2)}{1\,.\,2}$$

$$\frac{(h+1)^{n+1}-(h-2)^{n+1}}{3}+\ldots+(-1)^{h-1}\frac{(h+1)^{n+1}-1^{n+1})}{h}$$

ou bien

$$1\,.\,2\,.\,3\ldots(h-1)\alpha_{h,n}=(h+1)^{n+1}\left[\frac{1}{1}-\frac{h-1}{1\,.\,2}+\frac{(h-1)(h-2}{1\,.\,2\,.\,3}\right.$$

$$\left.-\ldots+(-1)^{h-1}\frac{1}{h}\right]-\frac{h^{n-1}}{1}+\frac{(h-1)}{1}\,\frac{(h-1)^{n+1}}{2}$$

$$-\frac{(h-1)(h-2)}{1\,.\,2}\,\frac{(h-2)^{n+1}}{3}+\ldots+(-1)^{h}\,\frac{1^{n+1}}{h}$$

ou enfin

$$\alpha_{h,n}=\frac{(h+1)^{n+1}\left[\frac{h}{1}-\frac{h(h-1)}{1\,.\,2}+\frac{h(h-1)(h-2)}{1\,.\,2\,.\,3}-\ldots\right.}{1\,.\,2\,.\,3\ldots h}$$

$$\frac{\left.+(-1)^{h-1}\right]-\frac{h}{1}h^{n+1}+\frac{h(h-1)}{1\,.\,2}(h-1)^{n+1}-\ldots+(-1)^{h}1^{n+1}.}{1\,.\,2\,.\,3\ldots h}$$

Mais on sait que l'on a

$$1-\frac{h}{1}+\frac{h(h-1)}{1\,.\,2}-\frac{h(h-1)(h-2)}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots+(-1)^{h}=0.$$

Donc le coefficient de $(h+1)^{n+1}$ est égal à 1, et finalement

$$\alpha_{h,n}=\frac{(h+1)^{n+1}-\frac{h}{1}h^{n+1}+\frac{h(h-1)}{1\,.\,2}(h-1)^{n+1}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots h}$$

$$\frac{-\frac{h(h-1)(h-2)}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots+(-1)^{h}1^{n+1}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots h}.$$

La loi se trouve ainsi démontrée.

Remarque. — Les différents coefficients trouvés devant être des nombres entiers, on en déduit le théorème d'arithmétique suivant : Je considère les n^{mes} puissances des $(h+1)$ premiers nombres entiers rangés par ordre de grandeur décroissante, si je les multiplie respectivement par les nombres $1, -\frac{h}{1}, +\frac{h(h-1)}{1\,.\,2}$, etc. $(-1)^{h}$, coefficients du

binôme $(a - b)^h$, et si j'ajoute tous ces produits, le nombre ainsi obtenu sera divisible par le produit des h premiers nombres.

CORRESPONDANCE

Nous avons reçu de M. Brisse, au sujet de l'article que nous avons fait paraître dans le précédent numéro, une réclamation à laquelle nous nous empressons de faire droit. « La méthode que vous exposez, nous dit M. Brisse, n'est pas nouvelle. Je l'ai donnée pour la première fois à Sainte-Barbe, lorsque je faisais la conférence du cours de Gros, à propos d'une question d'examen, et je crois bien qu'elle a dû être trouvée déjà auparavant. Je la donne tous les ans, dans mon cours à Condorcet, avec la discussion des racines. J'indique notamment quelle modification il faut lui faire subir lorsque l'on a $4p^3 + 27q^2 = 0$, car alors son application cesse d'être exacte. »

L'idée d'appliquer la forme algébrique $P^m - Q^m$, à la résolution des équations nous est venue seulement à l'esprit au mois de juillet de l'année dernière ; il résulte de la lettre que nous a adressée notre collègue que la priorité de cette méthode lui appartient ; à moins, comme il le fait justement observer, qu'elle ne revienne à un autre.

Au sujet du cas particulier signalé par M. Brisse, celui où l'on a $4p^3 + 27q^2 = 0$, nous dirons ici pourquoi nous ne l'avons pas mêlé à la discussion du cas général. Il nous semble que ce cas particulier doit être traité préalablement à la résolution des équations du troisième degré ; et que, soit à propos des racines égales, soit au moment où l'on applique le théorème de Rolle, ou celui de Sturm, on peut montrer comment l'équation se décompose en facteurs du premier degré ; opération qui peut paraître préférable à toute autre.

A propos de cette décomposition, voici une manière de la produire qui peut être donnée en élémentaires ; elle ne

repose sur aucune théorie, mais sur la seule force de la relation, $4p^3 + 27q^2 = 0$.

Écrivons cette égalité sous la forme

$$\frac{\frac{q}{2}}{\left(\frac{p}{3}\right)^2} = -\frac{\left(\frac{p}{3}\right)}{\frac{q}{2}} = t$$

on tire de ces relations,

$$p = -\frac{3}{t^2}, \text{ et } q = \frac{2}{t^3}.$$

L'équation proposée devient alors

$$x^3 - \frac{3x}{t^2} + \frac{2}{t^3} = 0,$$

ou encore $$t^3x^3 - 3tx + 2 = 0.$$

Sous cette forme on voit que le premier membre est divisible par $(tx - 1)$ et l'on trouve, identiquement,

$$t^3x^3 - 3tx + 2 = (tx - 1)^2 (tx + 2).$$

La décomposition du trinôme $x^3 + px + q$ se trouve ainsi effectuée, dans le cas particulier où les coefficients p et q vérifient l'égalité $4p^3 + 27q^2 = 0$. *(G. L.)*

BIBLIOGRAPHIE

Traité de balistique rationnelle, par M. *J. Bailly*, lieutenant de vaisseau. 1 vol. in-8°. Paris, Delagrave, 1883.

L'auteur s'est proposé, dans ce traité, l'étude raisonnée des phénomènes qui se présentent dans le tir, lorsqu'ils peuvent donner lieu à d'intéressantes considérations de mécanique générale susceptibles d'être conduites géométriquement, plutôt que la recherche de formules pratiquement applicables à la balistique, lesquelles appellent inévitablement le secours de l'empirisme.

L'ouvrage est divisé en six livres.

Le premier traite du mouvement des projectiles à l'extérieur de la bouche à feu. Dans le cas du vide, l'auteur donne une série de problèmes intéressants dont les solutions géométriques feraient l'ornement d'un cours de physique en mathématiques élémentaires. Dans le cas de l'air, il expose l'état de la question de la résistance et montre clairement que si l'on se proposait de lancer un boulet au delà des limites de l'atmosphère, on n'y parviendrait pas avec les pièces de grosseur moyenne, même en portant la vitesse initiale à l'infini :

conclusion bien faite pour ébranler les croyances des jeunes lecteurs de M. Verne. L'auteur rattache aussi directement à la résistance de l'air l'ingénieuse explication donnée par Leibnitz de la baisse barométrique par les temps pluvieux.

Le deuxième livre traite du mouvement des projectiles à l'intérieur de la bouche à feu. L'auteur examine d'abord les conditions géométriques de ce mouvement, en supposant que les gaz suivent la loi de Mariotte, puis les conditions thermodynamiques. Il explique ainsi, d'après M. de Saint-Robert, les résultats inattendus au premier abord pour l'échauffement du canon dans le cas du tir à poudre, à balle et à charge non rendue.

Le troisième livre traite des causes perturbatrices inhérentes à la forme particulière et à l'état dynamique du projectile lancé dans un fluide au repos. L'auteur y expose les lois générales de la dérivation et l'effet de la ceinture de forcement.

Le quatrième livre est relatif au pointage et au tir ; il renferme la théorie de la hausse et des causes d'irrégularité du tir qui ont un caractère de permanence permettant d'en tenir compte. Toute cause permanente d'écart du projectile étant ensuite mise de côté, l'auteur expose aussi élémentairement que possible le calcul des probabilités et l'applique à la justesse du tir.

Le cinquième livre comprend la théorie du recul et celle des freins destinés à le modérer : freins à lames et freins hydrauliques.

Enfin le sixième livre comprend des questions diverses, dont le plan n'était pas nettement indiqué dans les livres précédents. Ce sont le mouvement des fusées, la théorie du loquet de console, des considérations sur le choix des projectiles, sur le pas des rayures et sur celui de la vis-culasse, etc.

L'ouvrage tient, on le voit, toutes les promesses de son titre. La lecture en est attrayante, et le style amicalement familier de l'auteur vous fait croire à une explication orale à laquelle on assisterait. L'exécution typographique est soignée et, pour employer une expression un peu risquée, mais qui fait image, l'air circule dans les formules et dans les figures.

QUESTIONS PROPOSÉES

62. — Sur les centres des n^2 cases d'un damier, on place n jetons de telle façon que deux quelconques d'entre eux ne soient pas situés sur une même ligne parallèle à l'un ou l'autre des bords du damier. Démontrer que le nombre t_n des dispositions distinctes est égal à $1.2 \ldots n$, et que les jetons sont toujours en nombre pair sur les cases de couleur contraire à celle du coin inférieur de gauche.

— On suppose de plus que les jetons ne sont pas situés sur les cases d'une diagonale. Démontrer que, si l'on désigne par Θ_n le nombre des dispositions distinctes, on a

$$\Theta_{n+1} = n(\Theta_n + \Theta_{n-1})$$
$$\Theta_{n+1} = (n+1)\Theta_{n-1}.$$

— Démontrer que le rapport de t_n à Θ_n a pour limite la base du système des logarithmes supérieurs, lorsque n augmente indéfiniment.

— En supposant de plus que les jetons ne soient pas situés sur les cases des deux diagonales, calculer le nombre τ_n des dispositions et la limite de t_n à τ_n lorsque n augmente indéfiniment.

— Démontrer que le nombre maximum des jetons que l'on peut placer sur les cases de telle sorte que deux jetons ne soient pas situés sur une parallèle à l'une ou l'autre des diagonales est $2_n - 2$, et que le nombre des dispositions distinctes de ces $2_n - 2$ jetons est 2^n. *(E. Lucas.)*

63. — Construire une conique osculatrice à une conique donnée en un point donné et passant par deux points donnés, ou tangente à deux droites. *(Kœhler.)*

64. — Construire une parabole connaissant le cercle osculateur en un point, et la tangente commune qui ne passe pas par le point d'osculation. *(Kœhler.)*

65. — Trouver le lieu des centres des cercles circonscrits à tous les triangles polaires conjugués par rapport à une parabole. *(Kœhler.)*

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 12016-4

THÉORÈME DE D'ALEMBERT

D'après M. **Amigues**, professeur de mathématiques spéciales au Lycée de Marseille.

Toute équation algébrique entière $f(x) = 0$, à coefficients réels ou imaginaires, admet au moins une racine réelle ou imaginaire.

Soit a une quantité quelconque. Si $f(a) = 0$, le théorème est démontré. A défaut, le polynôme $f(x)$ donne pour toute valeur réelle ou imaginaire de h

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a) + \ldots$$

Quelques-unes des quantités $f(a)$, $f'(a)\ldots$ peuvent être nulles, mais on arrive toujours à l'une d'elles qui ne l'est pas, car sans cela on aurait pour toute valeur de h

$$f(a+h) = f(a)$$

ou bien pour toute valeur de u

$$f(u) = f(a)$$

et le polynôme se réduirait à une constante.

On a donc

$$f(a+h) = A(\cos\alpha + i\sin\alpha) + B(\cos\beta + i\sin\beta)h^p$$
$$+ C(\cos\gamma + i\sin\gamma)h^{p+1} + \text{etc.}$$

Soit $h = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, ρ et θ étant arbitraires, puisque h est quelconque.

On peut écrire, en appliquant en même temps la formule de Moivre et la règle de multiplication des imaginaires.

$$f(a+h) = A(\cos\alpha + i\sin\alpha) +$$
$$B\rho^p[\cos(\beta + p\theta) + i\sin(\beta + p\theta)] +$$
$$C\rho^{p+1}\left[\cos(\gamma + \overline{p+1}\,\theta) + i\sin(\gamma + \overline{p+1}\,\theta)\right] + \ldots$$

Choisissons θ de manière que l'on ait

$$\beta + p\theta = \pi + \alpha <$$

On a alors

$$f(a+h) = (A - B\rho^p)(\cos\alpha + i\sin\alpha) +$$
$$C\rho^{p+1}(\cos\gamma_1 + i\sin\gamma_1) + D\rho^{p+2}(\cos\delta_1 + i\sin\delta_2) + \ldots$$

Imposons à ρ la condition suivante

$$A - B\rho^p > 0$$

ou, puisque B n'est pas nul,

$$\rho^p < \frac{A}{B}. \qquad (1)$$

Puisque $A \gtrless 0$, on peut toujours trouver un nombre positif λ tel que toutes les valeurs de ρ moindres que λ satisfassent à cette inégalité.

Pour les valeurs moindres que λ, la quantité $(A - B\rho^p)$ est un module et, comme le module d'une somme est au plus égal à la somme des modules de ses parties, on a

$$\text{mod } f(a+h) \leq (A - B\rho^p) + C\rho^{p+1} + D\rho^{p+2} + \ldots$$

ou bien

$$\text{mod } f(a+h) \leq A - \rho^p (B - C\rho - D\rho^2 \ldots)$$

Soit ε un nombre positif moindre que B.

On peut toujours trouver un nombre positif μ tel que toutes les valeurs de ρ moindres que μ satisfassent à l'inégalité suivante :

$$(B - \varepsilon) - C\rho - D\rho^2 - \ldots > 0$$

puisque le premier terme de ce polynôme en ρ est $(B - \varepsilon)$ et qu'il est positif.

Cette inégalité devient

$$B - C\rho - D\rho^2 - \ldots > \varepsilon$$

et donne $$B - C\rho - D\rho^2 - \ldots = \varepsilon + \varphi, \qquad (2)$$

φ étant un nombre positif.

En résumé, pour toutes les valeurs de ρ moindres que λ on a l'inégalité (1), et pour toutes les valeurs de ρ moindres que μ on a l'égalité (2). Par conséquent, pour toutes les valeurs de ρ qui sont moindres que λ et que μ, on a en combinant cette inégalité et cette égalité

$$\text{mod } f(a+h) \leq A - \rho^p(\varepsilon + \varphi)$$

et par suite $$\text{mod } f(a+h) \leq A - \varepsilon\rho^p.$$

Parmi les valeurs finies de ρ qui sont moindres que λ et μ, choisissons-en une. Alors h est une quantité finie et déterminée, et $\varepsilon\rho^p$ est aussi un nombre fini et déterminé que nous appellerons σ. On a ainsi

$$\text{mod } f(a+h) \leq A - \sigma$$

ou $$\text{mod } f(a+h) \leq \text{mod } f(a) - \sigma.$$

Si le premier membre est nul, l'équation a une racine. A défaut, on peut trouver une quantité finie h_1 et un nombre fini σ_1 tels que l'on ait

$$\text{mod } f(a + h + h_1) \leq \text{mod } f(a + h) - \sigma_1.$$

Si le premier membre est nul, l'équation a une racine; sinon, on a d'une manière analogue

$$\text{mod } f(a + h + h_1 + h_2) \leq \text{mod } f(a + h + h_1) - \sigma_2$$

et ainsi de suite, tant qu'on ne trouvera pas de racine.

Ajoutant membre à membre, on a

$$\text{mod } f(a + h + h_1 \ldots + h_n) \leq \text{mod } f(a) - (\sigma + \sigma_1 \ldots + \sigma_n).$$

Si l'équation n'avait pas de racine, cette inégalité serait vraie pour toutes les valeurs entières de n. Or une pareille conclusion est absurde. Car les quantités σ n'étant pas infiniment petites, on peut trouver des valeurs finies de n pour lesquelles le second membre est négatif.

Il suffit pour cela que l'on ait

$$\text{mod } f(a) < \sigma + \sigma_1 + \sigma_2 \ldots + \sigma_n$$

ou en appelant τ le plus petit des σ

$$\text{mod } f[a) < (n + 1)\tau$$

$$n + 1 > \frac{\text{mod } f(a)}{\tau}.$$

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1883

Solution de M. Bertagne, élève du Lycée de Marseille.

D'un point P *pris sur une normale en un point* A *d'un paraboloïde elliptique, on peut mener à la surface quatre autres normales ayant pour pieds* B, C, D *et* E; *1° on demande de trouver l'équation de la sphère* S *passant par les quatre points* B, C, D *et* E; *2° de trouver le lieu des centres* I *de la sphère* S *quand le point* P *se déplace sur la normale au point* A, *ainsi que la surface engendrée par la droite* PI.

1° *Équation de la sphère.* — Soit, en coordonnées rectangulaires, l'équation du paraboloïde $\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x$.

Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point A ; les équations de la normale en ce point sont

$$\frac{X - x_0}{-1} = \frac{p(Y - y_0)}{y_0} = \frac{y(Z - z_0)}{z_0} = \rho ;$$

u étant la valeur particulière de ρ qui définit le point P, les coordonnées de ce point sont

$$x = x_0 - u,\ y = \frac{y_0(p + u)}{p},\ z = \frac{z_0(q + u)}{q}.$$

Il en résulte donc que les coordonnées x, y, z de l'un quelconque des points B, C, D et E doivent satisfaire aux deux équations suivantes :

$$\frac{x_0 - u - x}{-1} = \frac{y_0(p + u) - py}{y} = \frac{z_0(q + u) - qz}{z}$$

ou bien aux deux équations

$$z(x_0 - x) = (z - z_0)(q + u), \qquad (1)$$
$$y(x_0 - x) = (y - y_0)(p + u), \qquad (2)$$

et en outre on a $\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x$, car les pieds des normales sont sur le paraboloïde.

Cherchons maintenant une surface du deuxième ordre qui passe par les quatre points B, C, D, E ainsi que par le pied qui est à l'infini ; mais qui ne passe pas par le point A. Pour cela, écrivons l'équation du paraboloïde sous la forme

$$\frac{(y - y_0)(y + y_0)}{p} + \frac{(z - z_0)(z + z_0)}{q} = 2(x - x_0) \quad (3)$$

et portons les valeurs de $y - y_0$ et $z - z_0$ dans cette équation (3)

$$\frac{y(y + y_0)(x_0 - x)}{p(p + u)} + \frac{z(z + z_0)(x_0 - x)}{q(q + u)} = 2(x - x_0)$$

Supprimons la solution $x = x_0$ et ordonnons :

$$qy^2(q + u) + pz^2(p + u) + qy_0(q + u)y + pz_0(p + u)z$$
$$+ 2pq(p + u)(q + u) = 0. \qquad (\alpha)$$

Nous allons chercher à présent l'équation d'une quadrique qui passe par les cinq points A, B, C, D, E. Pour cela multiplions les deux membres de l'équation du paraboloïde par x

$$\frac{xy \times y}{p} + \frac{xz \times z}{q} = 2x^2$$

et remplaçons xy et xz par leurs valeurs tirées des équation

(1) et (2). Nous obtenons ainsi la surface cherchée

$$\frac{y[x_0y-(y-y_0)(p+u)]}{p}+\frac{z[x_0z-(z-z_0)(q+u)]}{q}=2x^2$$

ou
$$2pqx^2+q(p+u-x_0)y^2+p(q+u-x_0)z^2$$
$$-qy_0(p+u)y-pz_0(q+u)z=0. \qquad (\beta)$$

Nous avons ainsi obtenu trois surfaces (α) (β) (γ) qui passent par les quatre points B, C, D et E.

$$\begin{array}{l|l}
1 & (\beta)\ 2pqx^2+q(p+u-x_0)y^2+p(q+u-x_0)z^2 \\
 & \qquad -qy_0(p+u)\,y-pz_0(q+u)z=0 \\
\lambda & (\alpha)\ q(q+u)y^2+p(p+u)z^2+qy_0(q+u)y+pz_0(p+u)z \\
 & \qquad +2pq(p+u)\,(q+u)=0 \\
\mu & (\gamma)\ qy^2+pz^2-2pqx=0
\end{array}$$

et il semblerait que nous devrions chercher trois autres surfaces passant par les quatre points B, C, D, E pour obtenir l'équation générale des surfaces du deuxième ordre passant par ces quatre points ; mais grâce à la forme particulière des équations déjà trouvées, cette recherche est inutile. En effet, multiplions la première par 1, la deuxième par λ, la troisième par μ et ajoutons : nous obtenons alors l'équation d'une surface passant par les quatre points B, C, D et E :

$$\beta+\lambda\alpha+\mu\gamma=0.$$

Pour que ce soit une sphère il faut et il suffit que l'on ait

$$p+u-x_0+\lambda(q+u)+\mu=2p$$
$$q+u-x_0+\lambda(p+u)+\mu=2q$$

d'où
$$\lambda=-1 \text{ et } \mu=p+q+x_0.$$

L'équation de la sphère cherchée est donc

$$2pq(x^2+y^2+z^2)-2pq(p+q+x_0)x-qy_0(p+q+2u)y$$
$$-pz_0(p+q+2u)z-2pq(p+u)\,(q+u)=0.$$

2° *Lieu du centre.* — Les équations du centre sont

$$2x=p+q+x_0$$
$$4py=y_0(p+q+2u)$$
$$4qz=z_0(p+q+2u).$$

Éliminons $p+q+2u$ entre ces trois équations et nous obtiendrons ainsi la ligne qui constitue le lieu des centres. C'est la droite représentée par les deux équations

$$2q=p+q+x_0 \text{ et } \frac{py}{y_0}=\frac{xz}{z_0}.$$

3° *Surface engendrée par la droite* PI. — Les équations de

la droite PI sont :

$$\frac{x+u-x_0}{\frac{p+q+x_0}{2}+u-x_0}=\frac{y-\frac{y_0(p+u)}{p}}{\frac{y_0}{p}\left[\frac{p+q+2u}{4}-p-u\right]}$$

$$=\frac{z-\frac{z_0(q+u)}{q}}{\frac{z_0}{q}\left[\frac{p+q+2u}{4}-q-u\right]}$$

elle s'appuie déjà sur la normale en A et sur la ligne lieu des centres; si donc elle demeure parallèle à un plan fixe, la surface cherchée sera un paraboloïde hyperbolique : car ces deux droites ne se rencontrent pas puisque leurs plans projetant sur les yz sont parallèles.

Prenons un plan $Ax + By + Cz = 0$. Pour qu'il soit parallèle à la droite génératrice il faut que l'on ait l'identité en u :

$$A\left(\frac{p+q+x_0}{2}+u-x_0\right)+\frac{By_0}{p}\left[\frac{p+q+2u}{4}-p-u\right]$$
$$+\frac{Cz_0}{q}\left[\frac{p+q+2u}{4}-q-u\right]=0.$$

Cette identité permet de calculer A, B, C ou plutôt les rapports de deux de ces quantités à la troisième.

Ce plan n'est d'ailleurs ni parallèle à la normale en A, ni parallèle à la droite lieu des centres, car la droite génératrice rencontre ces deux droites fixes.

Deuxième solution

Soient $$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}-2x=0 \qquad (1)$$

l'équation de la surface; α, β, γ les coordonnées de ces points.

Si t désigne l'abscisse d'un point de la normale au point α, β, γ, les deux autres coordonnées seront

$$\frac{\beta}{p}(p+\alpha-t) \quad \text{et} \quad \frac{\gamma}{q}(q+\alpha-t).$$

Les équations qui expriment que la normale en x, y, z passe au point considéré sont

$$xy + (p - t)y - \beta(p + \alpha - t) = 0 \qquad (2)$$
$$xz = (q - t)z - \gamma(q + \alpha - t) = 0 \qquad (3)$$

Les équations (1), (2), (3) déterminent les coordonnées des pieds des cinq normales; $\alpha\beta\gamma$ est un système de solution.

Si trois surfaces du second degré ont leurs axes parallèles, il passe une sphère par leurs points d'intersection. Je me propose d'après cela de former les équations de deux surfaces du second degré passant par les pieds des quatre normales distinctes de la normale en $\alpha\beta\gamma$.

Pour cela je multiplie (2) et (3) respectivement par $\frac{y}{p}$; $\frac{z}{q}$; j'ajoute, et en tenant compte de (1) je trouve

$$2x^2 + \frac{p - t}{p} y^2 - \beta(p + \alpha + t) \frac{y}{p} + \frac{q - t}{q} z^2$$
$$- \gamma(q + \alpha - t) \frac{z}{q} = 0. \qquad (1)$$

J'écris ensuite les équations (1), (2), (3) de la manière suivante :

$$\frac{(y + \beta)}{p} (y - \beta) + \frac{z + \gamma}{q} (z - \gamma) - 2(x - \alpha) = 0. \quad (1')$$
$$(x - \alpha)y + (p + \alpha - t)(y - \beta) = 0, \quad (2')$$
$$(x - \alpha)z + (q + \alpha - t)(z - \gamma) = 0. \quad (3')$$

J'élimine $x - \alpha$, $y - \beta$, $z - \gamma$ entre (1') (2') (3') et il vient

$$\frac{(q + \alpha - t)}{p} y(y + \beta) + \frac{(p + \alpha - t)}{q} z(z + \gamma)$$
$$+ 2(p + \alpha - t)(q + \alpha - t) = 0. \qquad (5)$$

L'équation générale des surfaces passant par (1), (4), (5) est

$$\left| \begin{array}{l} \lambda \left[\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - 2x \right] + 2x^2 + \frac{(p - t)}{p} y^2 \\ \frac{q - t}{q} z^2 - \beta \frac{p + \alpha - t}{p} y - \gamma \frac{q + \alpha - t}{q} z \\ + \mu \left\{ \frac{q + \alpha - t}{p} y(y + \beta) + \frac{p + \alpha - t}{p} z(z + p) \right. \\ \qquad \left. + 2(p + \alpha - t)(q + \alpha - t) \right\} \end{array} \right| = 0.$$

J'exprime que cette surface est une sphère; j'ai

$$\mu = -1, \qquad \lambda = p + q + \alpha$$

et l'équation devient

$$2(x^2 + y^2 + z^2) - 2(p + q + \alpha)x - \frac{\beta}{p}(p + q + 2\alpha - 2t)y$$
$$- \frac{\gamma}{p}(p + q + 2\alpha - 2t)z - 2(p + \alpha - t)(q + \alpha - t) = 0.$$

Telle est l'équation de la sphère.

Les coordonnées du centre sont :

$$x = \frac{p + q + \alpha}{2}, \quad y = \frac{\beta}{4p}(p + q + 2\alpha + 2t),$$
$$z = \frac{\gamma}{4q}(p + q + 2\alpha - 2t).$$

Le lieu du centre est donc une droite située dans un plan parallèle au plan des yz. Elle a pour équation dans ce plan

$$\frac{py}{\beta} = \frac{qz}{\gamma}.$$

La droite qui joint le point d'où sont issues les quatre normales, au centre de la sphère, a pour équation

$$\frac{x - t}{\frac{p + q + \alpha}{2} - t} = \frac{y - \frac{\beta}{p}\left(p + \alpha - t\right)}{\frac{\beta}{4p}\left[p + q + 2\alpha - 2t\right] - \frac{\beta}{p}\left(p + \alpha + t\right)}$$
$$= \frac{z - \frac{\gamma}{q}\left(q + \alpha - t\right)}{\frac{\gamma}{4q}\left[p + q + 2\alpha - 2t\right] - \frac{\gamma}{q}\left(q + \alpha - t\right)}.$$

Il est facile de voir que, t variant, cette droite reste parallèle à un plan fixe. La surface engendrée est donc un paraboloïde hyperbolique.

Nota. — Nous avons reçu de cette question une troisième solution un peu différente de celles que l'on vient de lire, et dont l'auteur est M. Dereins, élève du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Niewenglowski), solution très simple et très élégante.

CONCOURS POUR L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

EN 1883

Épure.

On donne un tétraèdre régulier ABCD dont le côté a 12 centimètres. La face ABC est horizontale ; le sommet D est au-dessous de ABC.

Soit P le cône qui a pour sommet le point A et pour base le cercle inscrit dans le triangle BCD.

Soit Q le cylindre de révolution qui a pour axe la droite BC et pour rayon 5 centimètres.

On demande la projection horizontale du solide formé par ce qui reste du tétraèdre quand on a supprimé la partie de ce tétraèdre qui est comprise dans le cône P et celle qui est comprise dans le cylindre Q.

Triangle.

$$A = 75^\circ\ 35'\ 25''$$
$$b = 5825{,}755$$
$$c = 4753{,}826$$

Composition française.

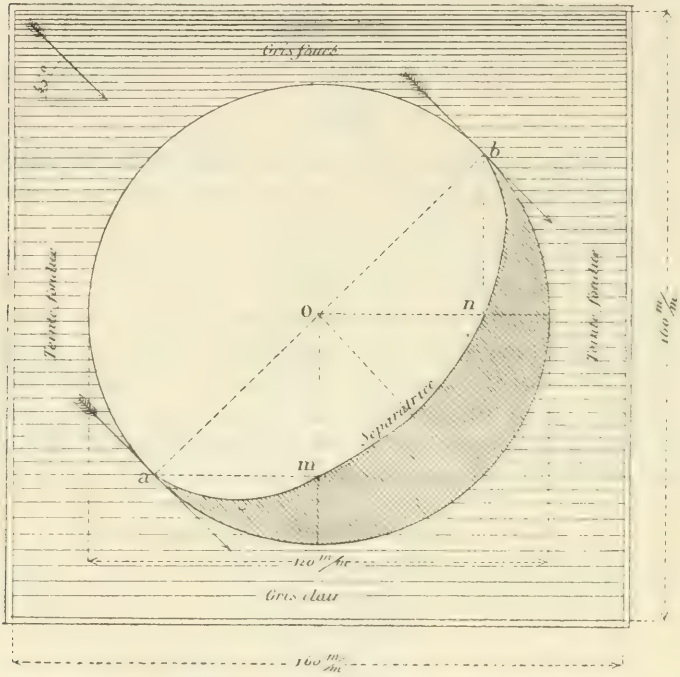
« Quand on travaille sur les grandes matières, a dit Montesquieu, il ne suffit pas de consulter son zèle, il faut encore consulter ses lumières : et si le ciel ne nous a pas accordé de grands talents, on peut y suppléer par la défiance de soi-même, l'exactitude, le travail et les réflexions. »

On appréciera et on discutera cette pensée, on en fera valoir tous les termes, et on recherchera quelle en est la portée pratique.

Lavis (3 heures).

Faire à l'encre de Chine, *à teintes plates*, le lavis d'une sphère (dépolie, ou mi-polie, à volonté), se détachant sur un fond gris, dégradé de haut en bas.

On se conformera aux cotes indiquées, en millimètres, sur le croquis ci-joint.



La sphère sera éclairée par le rayon ordinaire à 45°.

Le croquis indique la manière d'obtenir rapidement quatre points (a, m, n, b) de la *séparatrice* d'ombre et de lumière.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

(Composition de mathématiques du 20 juin 1883.)

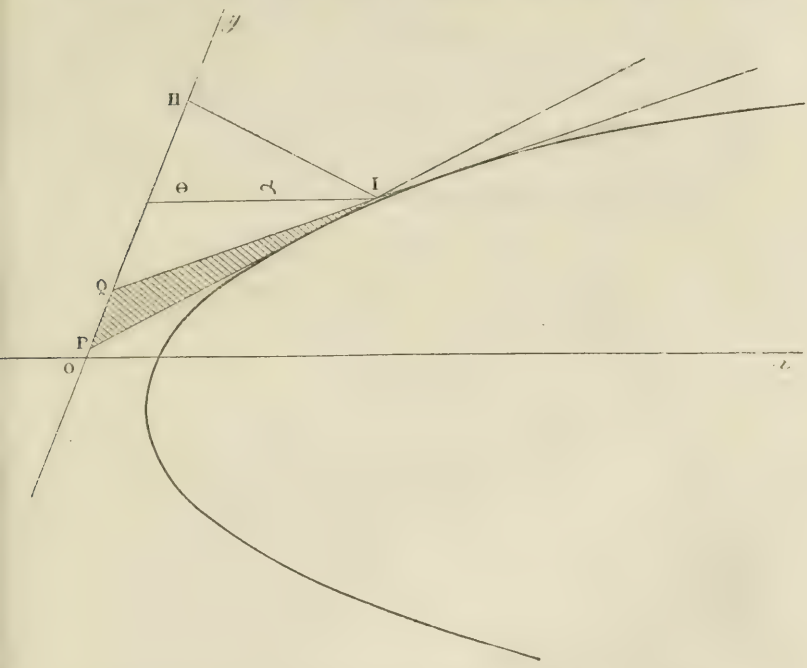
On donne une parabole P *et une droite* D. *On demande le lieu des points tels que les tangentes menées de ce point à la parabole forment avec la droite* D *un triangle de surface donnée.*

1. — Recherche de l'équation du lieu. — Prenons pour axe des y la droite donnée et pour axe des x le diamètre conjugué; l'équation de la parabole est alors (*)

$$y^2 = 2p(x - a)$$

Le faisceau des deux droites IP, IQ qui déterminent avec Oy un triangle IPQ de surface donnée a pour équation

$$(y^2 - 2px + 2pa)(\beta_2 - 2p\alpha + 2pa) = (\beta y - px + 2ap - p\alpha)^2$$



α, β désignant les coordonnées du point I. Les longueurs OP et OQ sont les racines de l'équation

$$(y^2 + 2pa)(\beta_2 - 2p\alpha + 2pa) = (\beta y + 2ap - p\alpha)^2$$

ou $\quad 2y^2(\alpha - a) + 2\beta y(2a - \alpha) + p\alpha^2 - 2a\beta^2 = 0.$

On a donc

(*) p, dans ce calcul, ne désigne pas, bien entendu, le périmètre de la parabole.

$$PQ = \frac{\sqrt{\beta^2 (2a - \alpha)^2 - 2 (\beta - a)(p\alpha^2 - 2a\beta^2)}}{\alpha - a}$$

ou, après réduction,

$$PQ = \frac{\alpha}{\alpha - a} \sqrt{\beta^2 - 2p (\alpha - a)}.$$

La surface du triangle IPQ, surface qui est donnée et que nous désignerons par m^2, est égale à $\frac{PQ.IH}{2}$.

Or l'on a $IH = \alpha \sin \theta$.

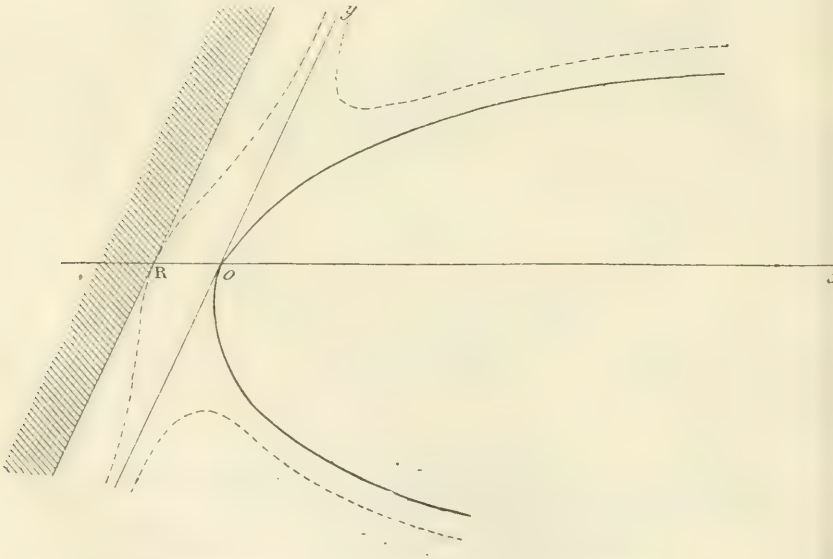
On peut donc poser

$$2m^2 (\alpha - a) = \alpha^2 \sin^2 \theta \sqrt{\beta^2 - 2p (\alpha - a)}$$

ou, en rendant α, β coordonnées courantes,

$$4m^4 (x - a)^2 = x^4 \sin^2 \theta \left\{ y^2 - 2p (x - a) \right\}. \quad (A)$$

C'est l'équation de la courbe.



2. — Examen du cas où $a = 0$. — L'équation que nous venons de trouver représente une courbe du sixième degré, mais elle n'est que du quatrième degré quand on suppose $a = 0$. Il faut pourtant observer que l'on supprime alors

la solution $x^2 = 0$. Cette solution singulière s'explique d'ailleurs en remarquant que les tangentes, issues d'un point de l'axe des y forment un triangle dont la base est infinie et la hauteur nulle. Nous examinerons d'abord ce cas particulier.

L'équation du lieu est

$$y^2x^2 \sin^2 \theta = 2\,(2m^4 + px^3 \sin^2 \theta).$$

D'ailleurs, l'équation (A) prouve que la courbe est, dans tous les cas, extérieure à la parabole donnée et que celle-ci est une parabole asymptote. La courbe a donc la forme qu'indique la figure ci-jointe. La tangente parallèle à l'axe des x, ne pas peut se construire avec la règle et le compas; elle est donnée par l'équation $x = \sqrt[3]{\dfrac{4\,m^4}{p \sin^2\theta}}$, valeur que l'on peut calculer avec telle approximation que l'on veut.

Dans la figure (2), on a pris $OR = \sqrt{-\dfrac{2\,m^2}{p \sin^2 \theta}}$,

3. — Examen du cas où l'on suppose a . o. — L'équation (A) étant écrite sous la forme

$$y^2x^2\sin^2\theta = 2(x - a)\,\{\,px^2\sin^2\theta + 2m^4\,(x - a)\,\}$$

on peut observer que la discussion qui est relative aux formes différentes de la courbe porte principalement sur la réalité des racines de l'équation

$$px^4\sin^2\theta + 2m^4x - 2m^4a = 0. \qquad \text{(B)}$$

Dans l'hypothèse que nous avons faite, a étant positif, on voit que cette équation qui est du quatrième degré, et dont le dernier terme est d'un signe contraire au premier admet deux racines réelles : l'une positive x', l'autre négative x''.

La courbe a donc la forme indiquée par le trait ponctué de la figure 3.

4. — Examen du cas où l'on suppose $a < 0$. — Différentes formes de courbe correspondent à cette hypothèse suivant que l'équation (B) a deux racines réelles, deux racines égales, ou quatre racines imaginaires.

Cherchons donc à différentier les différents cas. L'équation (B) peut s'écrire

$$x^4 + 2\lambda x - 2\lambda a = 0.$$

en posant $$\lambda = \frac{m^4}{p\sin^2\theta}$$

En discutant cette équation, par le théorème de Rolle, on trouve sans difficulté qu'en posant

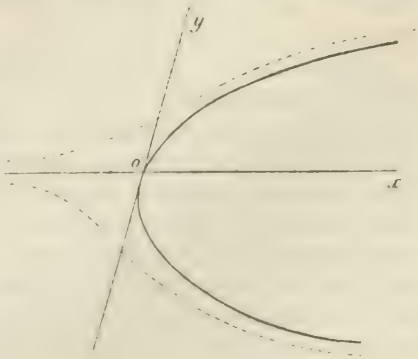
$$u = 27m^4 + 128pa^3\sin\theta,$$

l'équation a deux racines réelles quand u est positif, deux racines égales quand $u = 0$, enfin quatre racines imaginaires quand on suppose que u est négatif.

De cette discussion résultent trois formes de courbe. La première est indiquée par la figure ci-dessous. Les deux autres ne diffèrent de celle-ci que par la suppression de l'ovale, qui devient un point double isolé, dans l'hypothèse $u = 0$ et qui disparaît complètement quand on suppose $u < 0$.

5. — Remarque relative à un cas particulier. — Le choix que nous avons fait des axes de coordonnées n'est pas imposé seulement par la simplicité plus grande qui en résulte pour les calculs ; on doit remarquer qu'il était encore nettement indiqué si l'on observe, *à priori*, que, pour des raisons évidentes, la courbe était symétrique par rapport au diamètre conjugué des cordes parallèles à la droite donnée D, cette symétrie étant oblique et définie, au point de vue de sa direction, par D.

Il faut pourtant remarquer que ce choix d'axes ne peut pas être adopté dans le cas où D est un diamètre de la parabole. Il est donc nécessaire d'examiner ce cas particulier, et c'est ce que l'on fait très simplement comme nous allons le montrer.



Prenons pour axes la droite D et la tangente à la parabole en son point de rencontre. Soient α, β les coordonnées d'un point du lieu, le faisceau quadratique des tangentes issues de ce point à la

parabole est

$$(y^2 - 2px)(\beta^2 - 2p\alpha) = (\beta y - px - p\alpha)^2.$$

En faisant $y = 0$, on a pour le segment intercepté sur l'axe de x, $\sqrt{\beta^2 - 2p\alpha}$; l'équation du lieu est, d'après cette remarque,

$$y^4 \sin^2\theta\,(y^2 - 2px) = 4m^4p^2.$$

La courbe qui correspond à cette équation a la forme indiquée par la figure.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Composition du 25 juin 1883.

Mathématiques.

On donne la cissoïde qui, rapportée à des axes de coordonnées rectangulaires, a pour équation

$$(x^2 + y^2)x = ay^2.$$

Soient x', y' les coordonnées d'un point M du plan. On propose de former : 1° l'équation du troisième degré qui a pour racines les coefficients angulaires des droites qui joignent le point O aux points de contact des trois tangentes à la cissoïde issues du point M; 2° l'équation du cercle qui passe par ces points de contact.

Montrer que, si les trois tangentes sont réelles, le point M est intérieur au cercle.

On considère l'ensemble des cercles (C_m) dont chacun jouit de cette propriété que les tangentes à la cissoïde en trois des quatre points où il la rencontre concourent en un même point: soit M ce point de concours pour le cercle C_m.

On demande le lieu des centres des cercles C_m qui passent par un point donné P du plan, ainsi que le lieu des points M relatifs à ces cercles. On examinera en particulier le cas où le point P est situé sur la cissoïde et ne fait pas partie des trois points communs au cercle C_m et à la cissoïde pour lesquels les tangentes concourent.

Combien passe-t-il de cercles C_m par deux points donnés

P, Q du plan ? Peut-on disposer de ces deux points de façon qu'ils appartiennent à une infinité de cercles C_m ?

Composition du 26 juin 1883.

Philosophie.

Expliquer et apprécier les quatre règles dans lesquelles Descartes résume sa méthode :

« La première, dit-il, était de ne recevoir jamais aucune chose pour vraie que je ne la connusse évidemment être telle ;

« La seconde, de diviser chacune des difficultés que j'examinerais en autant de parcelles qu'il se pourrait et qu'il serait requis pour les mieux résoudre ;

« La troisième, de conduire par ordre mes pensées, en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître, pour monter peu à peu, comme par degrés, jusqu'à la connaissance des plus composés, en supposant même de l'ordre entre ceux qui ne se précèdent point naturellement les uns les autres ;

« Et la dernière, de faire partout des dénombrements si entiers et des revues si générales que je fusse assuré de ne rien omettre. »

Composition du 27 juin 1883.

Physique.

I. — *Théorie du baromètre-balance.* Le tube barométrique est attaché par le haut au fléau d'une balance. On supposera que la section du tube est égale à un centimètre carré. Celle de la chambre barométrique est plus grande ; on la désignera par a. Le bas du tube est mastiqué ou soudé à un manchon soit en bois, soit en fonte, dont la section est b. Ce manchon est le bas d'un tube plongé dans le mercure de la cuvette dont la section est c. On établira l'équation d'équilibre et la condition de sensibilité, c'est-à-dire la variation de poids correspondant à une variation d'un millimètre dans la colonne barométrique.

II. — Un cube de verre d'indice n repose sur une planchette horizontale noircie. Sur sa base inférieure, on a déposé une goutte de suif, et l'on regarde cette goutte par la face verticale du cube, opposée à celle qui est tournée vers la lumière. En partant de la verticale et inclinant lentement le rayon visuel vers l'horizon, on voit tout d'un coup la goutte qui devient très brillante. On mesure alors l'angle du rayon visuel avec la verticale, soit α cet angle. On demande x l'indice de réfraction du suif.

Exemple. Soit $n = 1,55$, $\alpha = 65^\circ$, $\sin^2 \alpha = 0,8236$. Trouver x.

III. — Quelle est la température maximum que l'on peut produire par la combustion de l'hydrogène, en supposant que toute la chaleur produite soit employée à chauffer les produits de la combustion ?

Composition du 28 juin 1883.

Version latine.

TOUTES LES PLANÈTES SONT EMPORTÉES AUTOUR DU SOLEIL PAR LE CIEL QUI LES CONTIENT

Sublato omni scrupulo de terræ motu, putemus totam materiam cœli in qua planetæ versantur, in modum cujusdam vorticis, in cujus centro est sol, assidue gyrare, ac ejus partes soli viciniores celerius moveri quam remotiores, planetasque omnes, e quorum numero est terra, inter easdem istius cœlestis materiei partes semper versari. Ex quo solo, sine ullis machinamentis, omnia ipsorum phænomena facillime intelligentur. Ut enim in iis fluminum locis, in quibus aqua in se ipsam contorta vorticem facit, si variæ festucæ illi aquæ incumbant, videbimus ipsas simul cum ea deferri, et nonnullas etiam circa propria centra converti; et eo celerius integrum gyrum absolvere, quo centro vorticis erunt viciniores; et denique, quamvis semper motus circulares affectent, vix tamen unquam circulos omnino perfectos describere, sed nonnihil in longitudinem et latitudinem aberrare. Ita eadem omnia de planetis absque ulla difficul-

tate possumus imaginari, et per hoc unum cuncta eorum phænomena explicantur.

R. DESCARTES.

QUESTIONS D'EXAMENS (1883)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

1. — *Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un paraboloïde soit équilatère.*

Les notations ordinaires étant adoptées les conditions sont :

$$H \geqq 0,\ \Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = 0, \text{ et } A + A' + A'' = 0.$$

Cette dernière relation peut être obtenue, soit directement, soit en remarquant que si les deux plans directeurs sont rectangulaires, on peut considérer l'équation

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byr + 2B'rx + 2B''xy = 0$$

Comme représentant un cône sur lequel on peut placer les trois arêtes d'un trièdre trirectangle ; l'une de ces arêtes étant la droite commune.

2. — *Démontrer que l'équation*

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} = 0$$

a toutes ses racines réelles.

La forme de cette équation montre qu'elle est tout au plus du troisième degré. Elle a certainement une racine entre 1 et 2 ; et une autre entre 3 et 4. La troisième racine est infinie ; le terme en x^3 disparaît, en effet, quand on chasse les dénominateurs.

On peut aussi remarquer que l'équation peut être écrite de la manière suivante

$$\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-4}$$

ou

$$\frac{2}{(x-1)(x-3)} = \frac{-2}{(x-2)(x-4)}$$

Cette combinaison des termes de l'équation proposée met en évidence ce fait que celle-ci est du second degré.

Il est d'ailleurs facile de reconnaître, par les substitutions indiquées plus haut, que l'équation

$$(x-1)(x-3)+(x-2)(x-4)=0$$

a ses racines réelles et comprises l'une dans l'intervalle 1, 2, l'autre dans l'intervalle 3, 4.

On peut, évidemment généraliser cette question et considérer l'équation

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x-c}-\frac{1}{x-d}=0,$$

a, b, c, d désignant des nombres inégaux.

3. — *Est-il bien exact de dire que l'on peut substituer, à la suite des fonctions de Sturm, la suite*

$$f(x),\ f'(x),\ \ldots\ f^{m}(x) \qquad (A)$$

quand l'équation $f(x)=0$, *a toutes ses racines réelles?*

Le programme s'exprime dans les termes suivants : *lorsque toutes les racines sont réelles, on peut substituer aux fonctions de Sturm les dérivées successives du premier membre de l'équation.* Mais il semble qu'il y ait là une légère incorrection, que l'on peut mettre en évidence de la manière suivante.

Disons d'abord que l'incorrection n'existe pas dans le cas général, dans le cas où l'équation proposée a toutes ses racines réelles et *inégales*. Mais la suite de Sturm et la suite (A), (la suite de Fourier, comme on la nomme quelquefois) ne donnent pas *les mêmes résultats*, dans le cas des racines multiples et, pour ce motif, on ne doit pas dire que l'on peut substituer l'une à l'autre.

Imaginons, en effet, la suite de Sturm et celle de Fourier ; puis cherchons combien l'équation $f(x)=0$ a de racines réelles dans l'intervalle α, β. S'il existe, pour citer un exemple, dans cet intervalle, deux racines, l'une de multiplicité p, l'autre de multiplicité q, la suite de Sturm révèlera la perte de deux variations ; tandis que celle de Fourier signalera la disparition de $(p+q)$ variations. En d'autres termes, et dans le cas où nous nous sommes placés, les fonctions de Sturm indiquent le nombre des racines réelles de l'intervalle

α, β ; abstraction faite de leur degré de multiplicité ; la suite de Fourier indique le nombre de ces racines, en tenant compte de leurs degrés respectifs de multiplicité. En résumé, deux choses qui ne donnent pas *toujours et dans tous les cas*, des résultats identiques ne peuvent pas être substituées l'une à l'autre, si l'on n'ajoute pas dans quel cas cette substitution est légitime.

4. — *Réduire des fractions algébriques au plus petit dénominateur commun.*

Cette théorie offre la plus grande analogie avec la théorie semblable, et plus connue, de l'arithmétique.

5. — *On donne sur un ellipsoïde un point α, β, γ ; en ce point on mène une normale Δ, à la surface. Quels sont les points de l'ellipsoïde, tels que les normales à la surface en ces points rencontrent la normale donnée Δ.*

Soient x', y', z', les coordonnées d'un des points du lieu ; on a pour la normale, en ce point,

$$\frac{a^2(x-x')}{x'} = \frac{b^2(y-y')}{y'} = \frac{c^2(z-z')}{z'} = a^2b^2c^2\lambda$$

et, pour Δ,

$$\frac{a^2(x-\alpha)}{\alpha} = \frac{b^2(y-\beta)}{\beta} = \frac{c^2(z-\gamma)}{\gamma} = a^2b^2c^2\mu.$$

On en déduit deux relations entre λ et μ, et l'on trouve

$$\begin{vmatrix} \dfrac{x'-\alpha}{b^2c^2} & \dfrac{y'-\beta}{a^2c^2} & \dfrac{z'-\gamma}{a^2b^2} \\ x' & y' & z' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

En retranchant les deux dernières lignes et en transportant les axes, parallèlement à eux-mêmes, au point donné α, β, γ, on a finalement

$$\gamma XY(a^2-b^2) + \alpha YZ(b^2-c^2) + \beta ZX(c^2-a^2) = 0.$$

6. — *On donne un cylindre de révolution à axe vertical et on le coupe par un plan perpendiculaire au plan vertical. On développe le cylindre sur un plan ; équation du développement de la courbe d'intersection.*

On sait que cette courbe est une *sinusoïde*. En désignant par R le rayon du cylindre, par α l'angle d'inclinaison du plan donné sur la base du cylindre, on trouve

$$y = \operatorname{tg} \alpha \,.\, \mathrm{R} \,.\, \sin \frac{x}{\mathrm{R}}.$$

7. — *Équation générale des coniques dont on donne une directrice, un point et la différence des axes.*

On peut pour répondre à cette question, former l'équation dont les racines sont les longueurs des axes; on peut aussi, et peut-être plus simplement, remarquer qu'en partant de l'équation

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^3 = (\alpha^2 + \beta^2)\left(\frac{x}{d} - 1\right)^2;$$

on exprime que la conique considérée passe par l'origine et a, pour directrice, la droite $x = d$; d désignant une longueur donnée. Il reste seulement à trouver une relation entre α et β.

On remarquera, à cet effet, que l'on a, par des propriétés connues,

$$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{d} \qquad (1)$$

et

$$\frac{a^2}{c} - c = \frac{b^2}{c} = d - \alpha. \qquad (2)$$

Les relations (1) et (2) et l'égalité

$$a - b = h,$$

qui exprime la condition imposée permettent, par élimination des paramètres a et b, de trouver une relation entre les paramètres variables α, β; et les constantes données h et d.

QUESTIONS PROPOSÉES

66. — α, β, γ étant des entiers quelconques, aucune des équations

$$x^4 - 2\alpha x^3 + (\alpha^2 + 2\beta - 5)x^2 - 2(\alpha\beta + 2\gamma)x + \beta^2 - 2\gamma^2 = 0,$$
$$x^4 - 2\alpha x^3 + (\alpha^2 + 2\beta - 2)x^2 - 2(\alpha\beta + 3\gamma)x + \beta^2 - 3\gamma^2 = 0;$$

$$x^4 - 2\alpha x^3 + (\alpha^2 + 2\beta - 8)x^2 - 2(\alpha\beta + 5\gamma)x + \beta^2 - 5\gamma^2 = 0,$$
$$x^4 - 2\alpha x^3 + (\alpha^2 + 2\beta - 13)x^2 - 2(\alpha\beta + 6\gamma)x + \beta^2 - 6\gamma^2 = 0,$$
$$x^4 - 2\alpha x^3 + (\alpha^2 + 2\beta - 10)x^2 - 2(\alpha\beta + 7\gamma)x + \beta^2 - 7\gamma^2 = 0,$$

ne peut admettre de racine entière.

On excepte le cas insignifiant où β et γ étant nuls à la fois, chaque équation admet la racine double $x = 0$.

(S. Realis.)

67. — α, β, γ, δ, étant des entiers quelconques, et β et γ n'étant pas nuls à la fois, l'équation

$$x^4 - 2\alpha x^3 + (\alpha^2 + 2\beta + 3\delta + 1)x^2 - 2(\alpha\beta + 3\gamma)x + \beta^2 - 3\gamma^2 = 0$$

n'a pas de racine entière. *(S. Realis.)*

68. — Une ellipse passe par un point fixe A, et touche une droite donnée en un de ses sommets. Le rapport de l'axe parallèle à la droite à celui qui lui est perpendiculaire est m. Par chaque point du plan passent deux ellipses satisfaisant à ces conditions. Lieu des points tels que les deux ellipses qui y passent soient orthogonales. Dans le cas de $m = 1$, on aura pour lieu un cercle et un cercle-point. Démontrer ce fait par la géométrie élémentaire.

(Amigues.)

69. — Des coniques sont circonscrites à un losange. La bissectrice des diagonales coupe l'une des coniques en deux points A et B. Du point B, on mène la perpendiculaire BH sur la tangente en A. Lieu du point H. — Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe sur la tangente en A. — Lieu des pieds des perpendiculaires menées d'un point fixe à la polaire d'un point fixe. *(Amigues.)*

70. — On donne en coordonnées rectangulaires un paraboloïde ayant pour équation

$$x^2 + y^2 = 2pz.$$

1° Lieu des foyers des sections parallèles à son axe.

2° Lieu des foyers des sections dont les plans sont tangents à un cylindre parallèle à l'axe ; — cas où ce cylindre à pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ou bien

$$ay^2 = x^2.$$

3° Que doit être ce cylindre pour que la courbe lieu des foyer soit sur un autre cylindre représenté par l'équation

$$(x^2 + y^2)^3 = a^3y^3 + b^3x^3. \qquad \textit{(Amigues)}$$

71. — On place n jetons sur les cases d'un échiquier carré de n^2 cases, de telle sorte qu'il n'y ait qu'un seul jeton dans chacune des colonnes ou des lignes de l'échiquier. Démontrer que si l'on désigne par S_n le nombre des solutions symétriques par rapport au centre de l'échiquier on a

$$S_{2n+1} = S^2_n = 2.4.6 \ . \ . \ . \ (2n)$$

Si l'on désigne par u_n le nombre des solutions symétriques par rapport à l'une des diagonales, on a

$$u^n = u_{n-1} + (n - 1)u_{n-2};$$

et aussi

$$u^n = 1 + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3}{2.4} + \frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{2.4.6} + \ldots$$

Traiter la même question pour les solutions symétriques par rapport aux deux diagonales.

(E. Lucas.)

L'abondance des matières nous force à remettre au numéro prochain la suite de le théorie de l'iuvolution, que nous avons dû retarder au dernier moment.

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX,
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 14492-3

THÉORIE DE L'INVOLUTION DU SECOND DEGRÉ

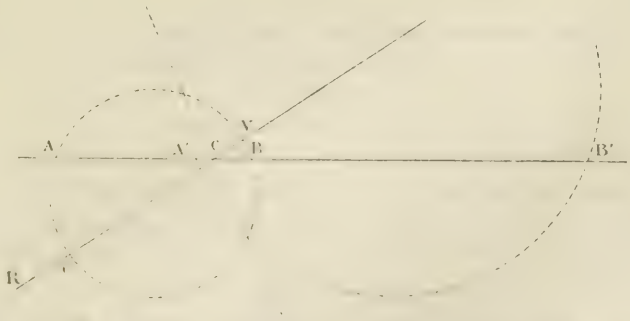
(*Suite*, voir page 121.)

CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES

La détermination du *centre* dépend, pour toute involution, de la résolution d'une équation linéaire; il est donc possible de remplacer le calcul par une construction géométrique simple ; en effet :

Prenez une circonférence, à volonté d'ailleurs, qui passe par les points A et B; prenez ensuite, à volonté, une des circonférences qui passent par A′ et B′; l'axe radical de ces deux circonférences viendra marquer sur la droite fixe le centre demandé C.

Remarque. — Cette construction ne suppose pas la réalité des couples données (A,B) et A′,B′) ; tous nos lecteurs savent en effet résoudre graphiquement ce problème : mener, par un point P pris à volonté sur un plan, la circonférence qui passe par les deux points imaginaires communs à une droite donnée et à une circonférence donnée.



Le centre C de l'involution étant ainsi déterminé, menez par ce centre une droite à volonté CR; puis prenez sur cette droite le couple (U,V) de telle sorte qu'il vérifie, pour les

grandeurs et les signes, la relation

$$CU \cdot CV = CA \cdot CB$$

puis par les points U et V faites passer, en les variant d'une manière continue, toutes les circonférences possibles; chacune de ces circonférences déterminera sur la droite fixe un des couples (M,N) de l'involution; et la suite continue de ces circonférences déterminera tous les segments, soit réels, soit imaginaires, de l'involution.

Première Remarque. — Si les *points doubles* de l'involution sont imaginaires, les points U et V seront de part et d'autre du point C, toutes les circonférences menées par U et V couperont *réellement* la droite fixe, et l'involution n'aura que des segments réels. — Si au contraire l'involution a ses points doubles réels, les points U et V seront d'un même côté du point C; et dans la suite des circonférences passant par U et V, il y en a deux qui touchent la droite fixe; les points de contact sont les points doubles de l'involution.

Deuxième Remarque. — Quand les deux couples donnés, (A,B), (A′,B′) sont réels, l'inégalité

$$R < o$$

qui produit les points doubles réels, signifie, suivant la manière de dire de Gérard Désargues, que les deux segments donnés (A,B), (A′.B′) sont ou *dégagés l'un de l'autre*, ou *engagés l'un dans l'autre*.

Troisième Remarque. — Quand on place l'origine au centre de l'involution, la relation involutive devient

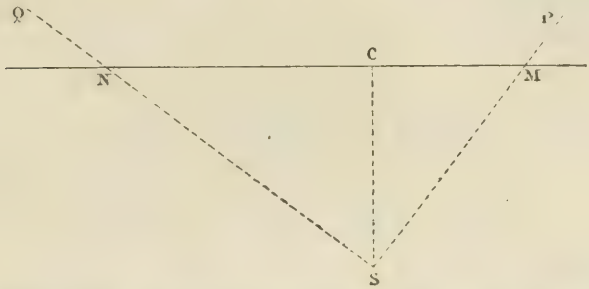
$$uv = \text{constante}$$

et les points doubles sont : *réels*, si la constante est positive; *imaginaires*, si la constante est négative.

Quatrième Remarque. — Il semble donc évident que l'on peut, au point de vue de la discussion des problèmes, et sans compliquer en aucune façon la théorie, distinguer pratiquement : l'involution *à puissance positive*, qui a ses points doubles réels, et l'involution *à puissance négative*, qui a ses points doubles imaginaires; cette distinction, qui résulte de la nature même du problème, se trouve d'ailleurs amplement justifiée par le procédé aussi simple qu'élégant que donne

M. Chasles, pour construire une involution à points doubles imaginaires :

Soit C le centre, et $uv + h^2 = 0$ la relation d'involution



relativement à ce centre; prenez perpendiculairement à la droite fixe

$$CS = h,$$

puis faites pivoter sur le point S un angle droit PSQ; chaque position de l'angle droit déterminera sur la droite fixe X'X un segment (M,N) de l'involution.

Cinquième Remarque. — Dans toute involution, quand l'une des extrémités du segment involutif coïncide avec le *centre*, l'autre extrémité se transporte à l'infini sur la droite fixe.

APPLICATIONS

Théorème. — *Deux involutions distinctes, tracées sur une même droite, ont un segment commun.*

En effet, si
$$Muv + N(u + v) + P = 0$$
$$M'uv + N(u + v) + P' = 0,$$
le segment commun est défini par les valeurs de uv et de $u + v$ qui vérifient ces deux équations; ce qui donne

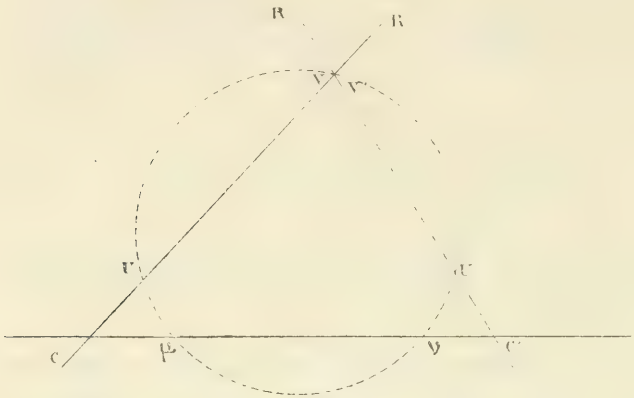
$$uv = \frac{NP' - PN'}{MN' - NM'}$$

$$u + v = -\frac{MP' - PM'}{MN' - NM'};$$

donc le segment commun est défini par les racines de l'équation

$$(MN' - NM')\,x^2 + (MP' - PM')x + (NP' - PN') = 0.$$

La construction du segment commun est donc ramenée à construire les racines d'une équation du second degré; on peut en donner plusieurs solutions graphiques, par exemple celle qui suit :



Après avoir fixé le segment extérieur UV d'où l'on déduit, par des circonférences variables, tous les segments de la première involution, on peut choisir U'V' de manière à lui donner une extrémité commune avec UV; d'après cela la circonférence circonscrite au triangle XUU' déterminera sur X'X le segment $\mu\nu$ qui est commun aux deux involutions; ce segment, d'ailleurs, sera tantôt réel, tantôt imaginaire.

Théorème. — *Tout segment d'une involution déterminée divise harmoniquement le segment limité par les deux points doubles.*

Ce théorème résulte immédiatement de cette proposition connue, à savoir : la division harmonique, quand on met l'origine au milieu du segment à diviser, entraîne la relation

$$uv = k^2.$$

Thèorème. — *L'involution est projective ;* cela résulte immédiatement du théorème précédent.

Définition. — Deux droites associées, OR, OR', qui pivotent ensemble sur un point fixe O, sont dites se déplacer

en involution, si leurs traces sur une même droite fixe se déplacent en involution ; — il en résulte, en se fondant sur le théorème qui précède immédiatement, que, si l'on prend le pivot O pour origine des coordonnées, les coefficients angulaires des deux droites sont liés par une relation de la forme qui suit

$$g \cdot mm' + h(m + m') + k = 0.$$

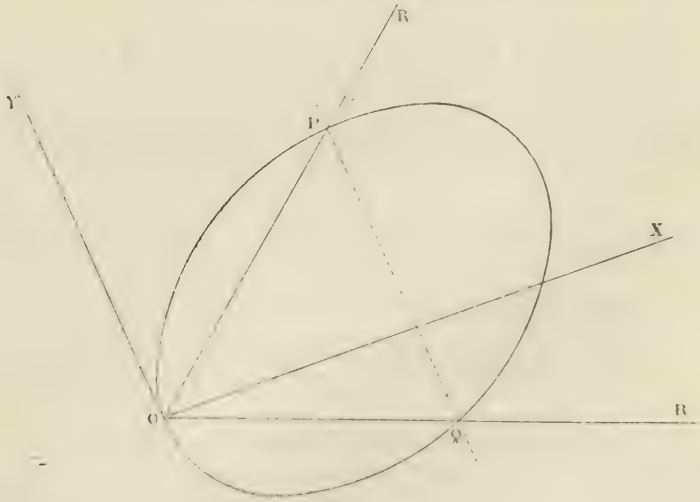
On peut dire aussi que ces deux coefficients angulaires sont les racines variables d'une équation du second degré ayant la forme :

$$A\mu^2 + B\mu + C + \lambda(A'\mu^2 + B'\mu + C') = 0.$$

Théorème. — *Quand deux droites, mobiles ensemble autour d'un point* O, *se déplacent en involution, si le point* O *appartient à une conique, la droite* PQ, *joignant les intersections des deux droites avec la conique, pivote sur un point fixe.*

En effet soit l'origine des coordonnées au pivot O ; l'équation de la conique sera

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey = 0 ;$$



et si nous désignons par

$$ux + vy + w = 0$$

l'équation de la droite PQ, le système des droites OR, OR', aura pour équation

$$w(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) - 2(Dx + Ey)(ux + vy) = 0$$

ou bien

$$0 = (Aw - 2Du)x^2 + 2(Bw - Eu - Dv)xy + (Cw - 2Ev)y^2$$

alors
$$m + m' = \frac{Eu + Dv - Bw}{Cw - 2Ev}$$

et
$$mm' = \frac{Aw - 2Du}{Cw - 2Ev};$$

il s'ensuit que la condition d'involution devient

$$g(Aw - 2Du) + h(Eu + Dv - Bw) + k(Cw - 2Ev) = 0$$

ou bien

$$(Eh - 2Dg)u + (Dh - 2Ek)v + (Ag + Ck - Bh)w = 0;$$

or cette relation est linéaire et homogène entre u, v, w; donc le théorème est démontré.

Dans le cas particulier où l'on a

$$h = 0, \; g = h,$$

ce théorème devient le théorème si connu de Frégier.

Remarque. — La relation involutive

$$g \,.\, mm' + h(m + m') + k = 0$$

se rencontre, en particulier, pour les couples de diamètres conjugués d'une même conique; donc le théorème précédent est applicable à tous les systèmes de diamètres conjugués d'une conique, quand on leur mène des parallèles par un point fixe O d'une conique prise à volonté.

(A suivre.)

SUR L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ

Par M. **Édouard Lucas.**

La méthode de résolution de l'équation du troisième degré dont il est question dans les deux numéros de mai et juin paraît due à Twining, qui l'a publiée en 1825 dans l'*American Journal of Sciences and Arts* (p. 86); elle date donc de plus d'un demi-siècle. Elle a été exposée aussi, d'une manière

bien différente et fort remarquable par M. Hermite dans la théorie des formes cubiques binaires. Nous donnerons d'abord la méthode de l'auteur américain; nous montrerons ensuite comment l'on peut passer de la méthode de Twining à celle de M. Hermite par l'emploi des formules d'Euler sur les formes homogènes; nous indiquerons rapidement la méthode de M. Hermite et les applications que l'on en peut faire.

I. — Méthode de Twining. — Soit

$$f(x) = ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0 \qquad (1)$$

l'équation donnée; posons $x = z + \lambda$, l'équation prend la forme

$$az^3 + 3Bz^2 + 3Cz + D = 0. \qquad (2)$$

dans laquelle B,C,D sont des fonctions de λ. Déterminons λ par la condition $BD = C^2$, l'équation (2) devient, en remplaçant D par $C^2 : B$ et en multipliant par BC,

$$aBCz^3 + 3B^2Cz^2 + 3BC^2z + C^3 = 0$$

ou encore

$$(Bz + C)^3 - (B^3 - aBC)z^3 = 0,$$

d'où l'on tire, en désignant par j une racine cubique de l'unité,

$$Bz + C = jz\sqrt[3]{B^3 - aBC}. \qquad (3)$$

Quant à l'équation $BD = C^2$, elle donne après tous calculs faits

$$(ac - b^2)\lambda^2 + (ad - bc)\lambda + bd - c^2 = 0; \qquad (4)$$

c'est la *réduite* du second degré qui détermine λ; on tire ensuite z par l'équation (3), et finalement x par $z + \lambda$.

Telle est la méthode de l'auteur, qui fait observer qu'elle ne s'applique pas lorsque l'équation proposée a une racine double.

II. — Laissant de côté la discussion de l'équation, nous allons montrer comment on arrive à la méthode de M. Hermite.

On a, par le théorème de Taylor,

$$B = \frac{1}{6} f''(\lambda),\ C = \frac{1}{3} f'(\lambda),\ D = f(\lambda);$$

remplaçons λ par $\lambda : \mu$, et soit

$$f(\lambda,\mu) \equiv a\lambda^3 + 3b\lambda^2\mu + 3c\lambda\mu^2 + d\mu^3.$$

l'équation réduite $BD = C^2$ s'écrit :

$$\frac{1}{6} f''_{\lambda\lambda} \cdot f - \frac{1}{9} (f'_\lambda)^2 = 0. \qquad (5)$$

Mais on a, par le théorème d'Euler,

$$2f'_\lambda = \lambda f''_{\lambda\lambda} + \mu f''_{\lambda\mu},$$
$$6f = \lambda^2 f''_{\lambda\lambda} + 2\lambda\mu f''_{\lambda\mu} + \mu^2 f''_{\mu\mu}$$

et, en remplaçant dans l'équation (5), il vient après avoir divisé par μ^2,

$$f''_{\lambda\lambda} f''_{\mu\mu} - (f''_{\lambda\mu})^2 = 0.$$

Ainsi la *réduite* (4) s'obtient en annulant le hessien de la forme cubique. Ce résultat se vérifie directement, puisque l'on a

$$\frac{1}{6} f''_{\lambda\lambda} = a\lambda + b\mu,$$

$$\frac{1}{6} f''_{\lambda\mu} = b\lambda + c\mu,$$

$$\frac{1}{6} f''_{\lambda\mu} = c\lambda + d\mu.$$

III. — Théorème de M. Hermite. — *Toute forme cubique à deux variables est la somme des cubes de deux fonctions linéaires que l'on obtient par la décomposition, en facteurs, du hessien de la forme proposée.*

En effet, soit

$$f(x,y) = (\alpha x + \beta y)^3 + (\alpha' x + \beta' y)^3,$$

et désignons pour abréger $\alpha x + \beta y$ par u et $\alpha' x + \beta' y$ par v, on a

$$\frac{1}{3} f'_x = \alpha u^2 + \alpha' u^2, \qquad \frac{1}{6} f''_{xx} = \alpha^2 u + \alpha'^2 v,$$

$$\frac{1}{3} f'_y = \beta u^2 + \beta' u^2; \qquad \frac{1}{6} f''_{yy} = \beta^2 u + \beta'^2 v,$$

$$\frac{1}{6} f''_{xy} = \alpha\beta u + \alpha'\beta' v;$$

enfin

$$H = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = 36(\alpha\beta' - \beta\alpha')^2 uv.$$

Ainsi u et v sont proportionnels aux facteurs linéaires du hessien. C. Q. F. D.

Ce théorème a été étendu par M. Sylvester aux formes de degré impair. *(Théorie des formes canoniques.)*

IV. — Application à l'équation privée du second terme. — Soit l'équation

$$x^3 + 3pxy^2 + 2qy^3 = 0,$$

dans laquelle l'inconnue est $x : y$. On a

$$\frac{1}{6} f'_{xx} = x, \quad \frac{1}{6} f'_{yy} = px + 2qy, \quad \frac{1}{6} f'_{xy} = py;$$

et

$$\frac{H}{36} = x(px + 2qy) - p^2y^2.$$

Si l'on décompose en facteurs le trinôme

$$px^2 + 2qxy - p^2y^2,$$

on a en posant $R = \sqrt{q^2 + p^3}$

$$u = px + y(q - R), \quad v = px + y(q + R),$$

et l'on remplacera l'équation proposée par

$$m[px + y(q - R)]^3 + n[px + y(q + R)] = 0;$$

on détermine le rapport $m : n$ en annulant le coefficient de x^2y, ce qui donne

$$m(q - R) + n(q + R) = 0:$$

donc l'équation proposée peut s'écrire

$$\frac{u^3}{q - R} - \frac{v^3}{q + R} = 0;$$

et l'on a

$$\frac{px + y(q - R)}{px + y(q + R)} = -j\sqrt[3]{\frac{R - q}{R + q}}.$$

On retrouve facilement la formule de Cardan en posant $y = 1$, $\quad R - q = M^3, \quad R + q = -N^3,$ et choisissant M et N de telle sorte que $MN = -p$.

V. — Application à la physique. — La méthode précédente est de beaucoup préférable à la méthode de Hudde. En effet, il arrive souvent dans les questions de physique que les équations du troisième degré auxquelles conduisent certains problèmes se présentent sous la forme canonique $u^3 \pm v^3 = 0$. Ainsi, par exemple, dans ce problème d'aérostatique :

Connaissant l'épaisseur ε *d'un ballon de densité* D *contenant*

un fluide de densité δ, *et plongé dans un fluide de densité* Δ, *déterminer le rayon intérieur* x *du ballon pour qu'il y ait équilibre.*

L'explication du principe d'Archimède donne

$$x^3\delta + [(x+\varepsilon)^3 - x^3]\,D = (x+\varepsilon)^3\Delta$$

ou bien $\quad x^3(D-\delta) = (x+\varepsilon)^3\,(D-\Delta),$

et finalement $\quad \dfrac{x+\varepsilon}{x} = \sqrt[3]{\dfrac{D-\delta}{D-\Delta}}$

VI. — Problème. — La forme canonique du polynôme général du troisième degré permet d'étudier plus facilement les propriétés de ces polynômes. On peut ainsi appliquer le théorème de M. Hermite au problème suivant qui a été donné au concours général, il y a quelques années :

Soit l'équation du troisième degré

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0;$$

on pose $\quad y = mx^2 + 2nx + p,$

et l'on demande de déterminer les coefficients m, n, p de telle sorte que l'équation en y obtenue en éliminant x entre les deux précédentes admette les mêmes racines que l'équation proposée.

Ce problème est assez difficile à traiter directement; on commence à résoudre la question sur l'équation

$$z^3 + 1 = 0,$$

et l'on applique ensuite les théories précédentes. Nous laissons au lecteur le soin de développer les calculs.

SUR L'ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ

Par M. **Édouard Lucas.**

Le même auteur Twining a donné une méthode de résolution de l'équation du quatrième degré que nous exposerons encore.

Soit l'équation

$$x^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0;$$

séparons les termes de degré impair

$$4bx^3 + 4dx = -x^4 - 6cx^2 - e;$$

multiplions par l'indéterminée λ et ajoutons x^4 aux deux membres

$$x^4 + 4b\lambda x^3 + 4d\lambda x = (1 - \lambda)\, x^4 - 6c\lambda x^2 - e\lambda,$$

ou bien

$$\left(x^2 + 2b\lambda x + \frac{d}{b}\right)^2 = x^4(1 - \lambda) + 2x^2\left(2b^2\lambda^2 + \frac{d}{b} - 3c\lambda\right) + \frac{d^2}{b^2} - e\lambda.$$

Exprimons que le second membre est un carré parfait, on obtient une équation du quatrième degré en λ, privée de terme tout connu. Divisons par λ et posons

$$\lambda = \frac{z}{2b^2}.$$

on a la *réduite*

$$z^3 - 6cz^2 + z\,(4bd + 9c^2 - e) + 2\,(d^2 + b^2e - 6bcd) = 0,$$

et l'équation proposée devient, avec $\varepsilon = \pm 1$,

$$bx^2 + zx + d = \varepsilon x^2 \sqrt{a^2 - \frac{z}{2}} + \varepsilon \sqrt{d^2 - \frac{ez}{2}}.$$

Il y aurait lieu de développer cette méthode, de la discuter, d'exprimer z en fonction des racines de la proposée, et de montrer comment on peut la déduire de l'équation aux sommes des racines de la réduite de Ferrari.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Questions d'examen (1883)

Suite, voir page 163.

8. — *On propose de construire la courbe*

$$y = \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt[4]{x^4 - 1} \qquad (1)$$

Nous supposons d'abord que les radicaux soient pris avec leurs signes explicites; y est alors une fonction bien déterminée et l'on peut étudier sa variation quand x varie de 1 à $+\infty$. Mais ici se présente une difficulté.

Lorsque x varie de 1 à $+\infty$ il est incontestable que y a une valeur réelle; si, au contraire, x varie de -1 à $+1$ les deux expressions $\sqrt{x^2-1}$, $\sqrt{x^4-1}$ sont l'une et l'autre imaginaires. Est-on certain que la différence de ces expressions est aussi une expression imaginaire? Ne pourraient-elles pas être de la forme $\alpha+\beta i, \alpha'+\beta' i$? On peut donc se poser cette question : *Chercher si y admet des solutions réelles, quand* x *varie de* -1 à $+1$.

A cet effet on peut écrire l'équation sous la forme

$$(y-\sqrt{x^2-1})^4 = x^4-1$$

ou

$$y^4+6y^2(x^2-1)+(x^2-1)^2-x^4+1$$
$$=4y\sqrt{x^2-1}(x^2+y^2-1) \qquad (2)$$

Si l'équation (1) admettait une solution en nombres réels, x', y'; x' étant inférieur à l'unité; cette même solution vérifierait l'équation (2). On voit que cette hypothèse est généralement inadmissible, parce que, d'après l'équation (2), $\sqrt{x'^2-1}$ serait une quantité réelle.

Mais la conclusion précédente est inexacte dans le cas particulier où la solution considérée $x'.y'$ vérifie l'équation $x^2+y^2-1=0$ et nous allons montrer qu'il existe quatre points doubles isolés dans la région du plan comprise entre les droites $x=+1$, points situés sur le cercle

$$x^2+y^2-1=0. \qquad (3)$$

En effet, cherchons l'intersection de la courbe donnée avec ce cercle. L'équation (2), en tenant compte de (3), devient

$$y^4-6y^4+y^4-(1-y^2)^2+1=0$$

ou

$$y^2(5y^2-2)=0.$$

L'hypothèse $y=0$ donne les points A, α situés sur ox; mais en prenant $y^2=\frac{2}{5}$, on a quatre points doubles isolés, points dont les coordonnées sont

$$x=\pm\sqrt{\frac{3}{5}},\quad y=\pm\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

Ce résultat peut être obtenu autrement.

Posons

(A) $\qquad \sqrt{x^2-1}=\beta i, \quad \sqrt{x^4-1}=\beta' i \qquad$ (B)

et aussi $\qquad \sqrt{x^4-1}=\sqrt{\beta' i}=\alpha+\beta i \qquad$ (C)

Dans les égalités (A) et (C) nous avons, à dessein, donné à i le même coefficient β.

On a d'abord $\beta' i = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i$,

par conséquent

$$\beta' = 2\alpha\beta \text{ et } \alpha^2 - \beta^2 = 0.$$

En prenant $\alpha = \beta$, on a $\beta' = 2\beta^2$. (D)

D'autre part les égalités (A) et (B) donnent

$$x^2 - 1 = -\beta^2$$
$$x^4 - 1 = -\beta'^2,$$

et, par suite $\beta^4 + \beta'^2 - 2\beta^2 = 0$. (D')

Les égalités (D) et (D') conduisent à la relation suivante

$$\beta^2(5\beta^2 - 2) = 0$$

et comme β n'est pas nul, on a, finalement,

$$\beta^2 = \frac{2}{5}.$$

De cette valeur de β on déduit, comme tout à l'heure

$$x^2 = \frac{3}{5}$$

et

$$y^2 = \frac{2}{5}.$$

On peut, d'ailleurs, vérifier que l'on a bien

$$\sqrt{\frac{2}{5}} = \sqrt{-\frac{2}{5}} - \sqrt[4]{-\frac{16}{25}}.$$

les radicaux étant pris avec les signes explicites. Cette égalité revient en effet à celle-ci :

$$\sqrt{2} = \sqrt{-2} - \sqrt[4]{-16},$$

dont la vérification est évidente.

Le point délicat que nous venons d'examiner se présente dans un grand nombre de courbes, par exemple dans la suivante $y = x\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x - x^3}$

qui a été également proposée et sur laquelle on pourra répéter l'un ou l'autre des raisonnements qui précèdent.

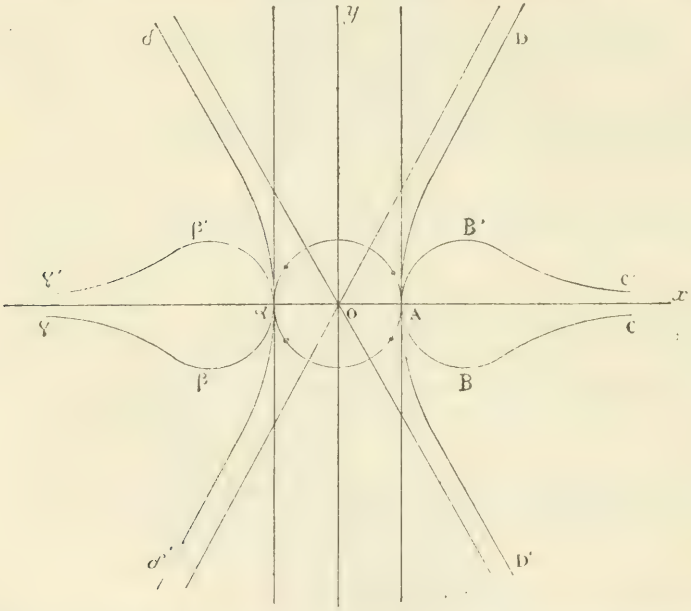
Revenons maintenant à la courbe (1). On reconnaît que l'équation (1) donne un bras de courbe ABC, quand x varie de 1 à $+\infty$; et le bras symétrique $\alpha\beta\gamma$, quand x varie de -1 à $-\infty$.

L'équation dérivée admet une racine entre 1 et 2 et elle n'a pas d'autre racine réelle; enfin pour $x = \infty$, en changeant x en $\frac{1}{x}$ on voit facilement que la limite de y est égale à zéro.

En prenant l'équation

$$y = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt[4]{x^4 - 1}$$

on a un bras de courbe AD et son symétrique $\alpha\delta$. Ils admettent pour asymptotes, respectivement, les droites $y = 2x$,



$y = -2x$ et la courbe, quand on donne aux radicaux successivement les signes $+$ et $-$, a la forme générale indiquée par la figure.

9. — *Décomposer la fraction irréductible* $\frac{A}{a^\alpha b^\beta}$ *en fractions de la forme* $\frac{m}{a^h}$, *et* $\frac{n}{b^{h'}}$. *On suppose que* a *et* b *sont des nombres premiers et que l'on a*

$$0 \leq m < a, \quad -b < n < b, \quad h \leq \alpha, \quad h' \leq \beta.$$

Nous allons montrer que l'on peut toujours établir l'égalité

$$\frac{A}{a^\alpha b^\beta} = P + \frac{m_1}{a^\alpha} + \frac{m_2}{a^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{m_\alpha}{a} + \frac{n_1}{b^\beta} + \ldots + \frac{n_\beta}{b}$$

P; $m_1, \ldots m_\alpha$; $n_1, \ldots n_\beta$ étant des nombres entiers.

On a en effet

$$\frac{A}{a^\alpha b^\beta} = \frac{x}{a^\alpha} + \left[\frac{A}{a^\alpha b^\beta} - \frac{x}{a^\alpha}\right]$$

ou

$$\frac{A}{a^\alpha b^\beta} = \frac{x}{a^\alpha} + \frac{A - xb^\beta}{a^\alpha b^\beta} \qquad (1)$$

Disposons maintenant de x de façon à vérifier l'égalité

$$A = xb^\beta + ay.$$

C'est une équation indéterminée du premier degré, et comme a et b^β sont premiers entre eux, on sait qu'il existe une infinité de valeurs *entières* d'x et d'y représentant une solution de cette équation. Soit x' y' cette solution, choisie de telle façon que l'on ait $x' > 0$: cette condition peut toujours être vérifiée; on sait pourquoi.

On a donc $\qquad A = x'b^\beta + ay'$

et l'égalité (1) devient

$$\frac{A}{a^\alpha b^\beta} = \frac{x'}{a^\alpha} + \frac{y'}{a^{\alpha-1}b^\beta}. \qquad (2)$$

Nous avons dit que x' était un nombre positif; s'il est plus petit que a, la première fraction est obtenue; sinon on divisera x' par a et l'on aura

$$x' = aq + m_1 \quad (m_1 < a).$$

L'égalité (2) devient alors

$$\frac{A}{a^\alpha b^\beta} = \frac{m_1}{a^\alpha} + \frac{y'}{a^{\alpha-1}b^\beta}$$

ou, finalement,

$$\frac{A}{a^\alpha b^\beta} = \frac{m_1}{a^\alpha} + \frac{A_1}{a^{\alpha-1}b^\beta}\ ; \qquad (3)$$

égalité dans laquelle m_1 désigne un nombre entier positif et inférieur à a.

On peut toujours supposer que $\dfrac{A}{a^\alpha b^\beta}$ est une fraction proprement dite : s'il n'en était pas ainsi, on effectuerait la

division et l'on obtiendrait la partie entière que nous avons désignée par P.

Ainsi l'égalité (3) permet de mettre la fraction $\frac{A}{a^\alpha b^\beta}$ sous la forme arithmétique $\frac{m_1}{a^\alpha} + \frac{A_1}{a^{\alpha-1}b^\beta}$, A étant positif ou négatif. En appliquant successivement cette propriété on obtient l'égalité suivante

$$\frac{A}{a^\alpha b^\beta} = \frac{m_1}{a^\alpha} \pm \frac{m_2}{a^{\alpha-1}} + \ldots \pm \frac{m\alpha}{a} \pm \frac{B}{b^\beta}.$$

Si B est plus grand que b, pour décomposer la fraction $\frac{B}{b^\beta}$, on divisera d'abord B par b, ce qui donne

$$B = bq_1 + n_1$$

et par suite
$$\frac{B}{b^\beta} = \frac{n_1}{b^\beta} + \frac{q_1}{b^{\beta-1}}.$$

Si l'on a $q_1 < b$ le développement est effectué ; sinon, on divise q_1 par b et, en poursuivant ces calculs bien connus, on déterminera successivement les coefficients n.

10. — *Démontrer que la décomposition précédente n'est possible que d'une seule façon lorsque les coefficients* m *et* n *sont positifs.*

Admettons que l'on ait trouvé par deux procédés différents

$$\frac{A}{a^\alpha b^\beta} = P + \frac{m_1}{a^\alpha} + \frac{m_2}{\alpha} + \ldots + \frac{n_1}{b^\beta} + \frac{n_2}{b^{\beta-1}} + \ldots$$

et

$$\frac{A}{a^\alpha b^\beta} = Q + \frac{r_1}{a_\alpha} + \frac{r_2}{a} + \ldots + \frac{s_1}{b^\beta} + \frac{s_2}{b^{\beta-1}} + \ldots$$

Les coefficients m, r étant positifs et inférieurs à a, et les coefficients n et s, positifs et inférieurs à b, nous allons montrer que ces coefficients sont égaux, deux à deux.

En effet, considérons l'égalité

$$P + \frac{m_1}{a} + \ldots + \frac{n_1}{b} + \ldots = Q + \frac{r_1}{a} + \ldots + \frac{S_1}{b} + \ldots$$

et multiplions les deux membres par $a^{\alpha-1}b$:

on a $$\frac{(m_1 - r_1)b^3}{a} = N,$$

N désignant un nombre entier que l'on peut supposer positif; a étant premier avec b, cette égalité exigerait que $m_1 - r_1$ fût divisible par a. Cette hypothèse n'est pas admissible, les nombres m_1 et r_1 étant, l'un et l'autre, *positifs* et inférieurs à a.

Ainsi l'on a $m_1 = r_1$. Ce point étant établi, on voit comment, de proche en proche, on vérifie l'identité des deux développements.

11. — *Surface du triangle sphérique dans une sphère de rayon* R.

En désignant par S la surface du triangle et par A, B, C les angles, on sait comment on est conduit à l'égalité

$$2S + 2\pi R^2 = \text{fus } A + \text{fus } B + \text{fus } C$$

D'ailleurs $$\text{fus } H = 2\pi R^2 \left(\frac{H}{180}\right)$$

on a donc $$S = \pi R^2 \left(\frac{A + B + C}{180} - 1\right).$$

C'est la formule demandée, formule dans laquelle A, B, C désignent les angles du triangle exprimés en degrés. Cette formule est employée en géodésie, avec cette différence légère que le rapport $\frac{A + B + C}{180}$ est exprimé en secondes; l'excès sphérique des triangles considérés à la surface de la terre étant toujours assez petit.

12. — *Équation d'un paraboloïde de révolution qui a pour trace l'ellipse* $z = 0$, $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$.

On peut partir de l'équation

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 + z(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta) = 0$$

pour exprimer : 1° que la surface est de révolution ; 2° que cette surface est un paraboloïde.

En posant comme toujours

$$a^2 - b^2 = c^2$$

on trouve

$$(x, y, z) = b^2x^2 + a^2y^2 + c^2z^2 \pm 2bcz.x + \delta z - a^2b^2 = 0.$$

Il est facile de vérifier: 1° que c'est un paraboloïde elliptique, parce que l'on a

$$f(x, y, z) = a^2y^2 + (bx \pm cz)^2 + (\delta z - a^2b^2) = 0,$$

équation d'un paraboloïde elliptique, sauf pour $\delta = 0$; 2° que cette surface est de révolution, parce que son équation peut s'écrire

$$a^2(x^2 + y^2 + z^2) + \delta z - a^2b^2 - (cx \pm bz)^2 = 0.$$

NOTE D'ALGEBRE

Par M. **Poujade**, professeur de mathématiques spéciales au Lycée de Lyon.

DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES, CAS D'UNE RACINE IMAGINAIRE MULTIPLE

On sait que si $f(x) = (x^2 + px + q)^n\varphi(x)$ on a

$$\frac{F(x)}{f(x)} = Q(x) + \frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}.$$

En supposant F et f premiers entre eux, φ premier avec $x^2 + px + q$, puis désignant par $Q(x)$ un quotient entier, $P(x)$ un polynôme de degré inférieur à $2n$ et premier avec $x^2 + px + q$;

Si l'on divise $P(x)$ par $x^2 + px + q - z$, z étant une constante arbitraire il vient

$$P(x) = (x^2 + px + q - z)\,S(x) + \alpha x + \beta$$

$S(x)$ désignant le quotient, polynôme entier en x et en z, $\alpha x + \beta$ le reste où α et β sont des fonctions entières de z du degré $n - 1$ au plus. Ce point se constate en remarquant que dans la division z apparaîtra au premier degré dans le troisième coefficient du quotient et au deuxième degré dans le reste, puis au deuxième degré dans le cinquième terme du quotient avec reste du troisième degré en z, etc.

L'égalité ci-dessus a lieu pour autant de valeurs distinctes de z qu'on voudra, donc c'est une identité et l'on y peut faire $z = x^2 + px + q$. Mais nous avons

$$\alpha x + \beta = \alpha_n x + \beta_n + (\alpha_{n-1}x + \beta_{n-1})z + \ldots + (\alpha_1 x + \beta_1)z^{n-1}$$

et il est visible que α_n, β_n ne peuvent être nuls à la fois; sinon $\alpha x + \beta$ s'annulant pour $z = 0$, $P(x)$ serait divisible par $x^2 + px + q$ contre l'hypothèse. Ainsi on a enfin, quel que soit x :

$$P(x) = \alpha_n x + \beta_n + (\alpha_{n-1}x + \beta_{n-1})(x^2 + px + q) + \ldots$$
$$+ (\alpha_1 x + \beta_1)(x^2 + px + q)^{n-1}.$$

Par suite pour la fraction correspondante :

$$\frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^n} = \frac{\alpha_n x + \beta_n}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{\alpha_{n-1}x + \beta_{n-1}}{(x^2 + px + q)^{n-1}}$$
$$+ \ldots + \frac{\alpha_1 x + \beta_1}{x^2 + px + q}.$$

C'est la forme de développement qu'il s'agissait d'obtenir.

QUESTION 4

Solution par M. Kœhler.

Une corde PQ *d'une ellipse est normale en* P; *trouver le minimum de cette corde, et démontrer que, si* PQ *est minimum, le centre du cercle osculateur en* P *est le point* Q. O *étant le pôle de* PQ, *montrer que, si* OP *est minimum, le pôle sera situé sur la seconde tangente commune à l'ellipse et au cercle osculateur en* P.

La normale PQ au point P de l'ellipse a pour expression $N^2 = \dfrac{4a^2b^2(a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega)^3}{(a^4\sin^2\omega + b^4\cos^2\omega)^2}$, en appelant ω l'angle excentrique pour le point P. En dérivant par rapport à ω on trouve l'équation

$$\operatorname{tg}^2\omega\,(a^4 - 2a^2b^2) + b^4 - 2a^2b^2 = 0,$$

et par suite $N = \dfrac{3\sqrt{3}a^2b^2}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$. C'est précisément la valeur du rayon de courbure au point P, qui est $R = \dfrac{(a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega)^{\frac{3}{2}}}{ab}$

La distance du point P au pôle O de la normale est donnée par la formule facile à établir

$$c^4 . \overline{OP}^2 = \frac{a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega)^3}{\sin^2 \omega \cos^2 \omega} .$$

Pour trouver le minimum on a l'équation

$$a^2 \operatorname{tg}\omega + 2c^2 \operatorname{tg}^2\omega - b^2 = 0.$$

Cela posé, on trouve pour le coefficient angulaire de la tangente à l'ellipse au point Q la valeur

$$-\frac{b \cos \omega}{a \sin \omega} \frac{(c^4 \sin^2 \omega - b^4)}{(c^4 \cos^2 \omega - a^4)} .$$

Soient (x', y') les coordonnées du pôle O, savoir $x' = \frac{a^2}{c^2 \cos \omega}$, $y' = -\frac{b^2}{c^2 \sin \omega}$; soient (α, β) celles du centre de courbure C, savoir $\alpha = \frac{c^2}{a} \cos^3 \omega$, $\beta = \frac{-c^2}{b} \sin^3 \omega$.

Les coefficients angulaires des tangentes au cercle issues du point O se trouveront en exprimant que la droite $y - y' - m(x - x') = 0$ est distante du centre C de la longueur $R = \frac{(a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega)^{\frac{3}{2}}}{ab}$. On doit avoir

$$[\beta - y' - m(\alpha - x')]^2 = R^2 (1 + m^2),$$

ou en développant

$$m^2 \left[\left(\frac{c^2 \cos^3 \omega}{a} - \frac{a^2}{c^2 \cos \omega} \right)^2 - \frac{(a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega)^3}{a^2 b^2} \right]$$
$$- 2m \left(\frac{c^2 \cos^3 \omega}{a} - \frac{a^3}{c^2 \cos \omega} \right) \left(\frac{b^3}{c^2 \sin \omega} - \frac{c^2 \sin^3 \omega}{b} \right)$$
$$+ \left(\frac{b^3}{c^2 \sin \omega} - \frac{c^2 \sin^3 \omega}{b} \right)^2 - \frac{(a^2 \sin^2 \omega - b^2 \cos^2 \omega)}{a^2 b^2} = 0.$$

Le produit des deux valeurs de m est

$$\frac{\cos^2 \omega}{\sin^2 \omega} \left[\frac{a^2 (c^4 \sin^4 \omega - b^4)^2 - c^4 \sin^2 \omega (a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega)^3}{b^2 (c^4 \cos^4 \omega - a^4)^2 - c^4 \cos^2 \omega (a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega)^3} \right]$$

et comme l'une d'elles doit être le coefficient angulaire de la tangente OP, c'est-à-dire $-\frac{a \sin \omega}{b \cos \omega}$, on trouve pour le

coefficient de la seconde tangente

$$m'' = -\frac{a\cos\omega}{b\sin\omega}\left[\frac{a^2(c^4\sin^4\omega - b^4)^2 - \ldots}{b^2(c^4\cos^4\omega - a^4)^2 - \ldots}\right]$$

Exprimons maintenant que m' est égal au coefficient de la tangente à l'ellipse en Q; nous aurons les conditions pour que la tangente commune passe par le pôle de la normale. On trouve

$$a^4(c^4\cos^2\omega - a^4)(c^4\sin^4\omega - b^4)^2 - b^4(c^4\sin^2\omega - b^4)(c^4\cos^4\omega - a^4)^2$$
$$= c^4(a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega)^3$$
$$\times\left[a^2\sin^2\omega(c^4\cos^2\omega - a^4) - b^2\cos^2\omega(c^4\sin^2\omega - b^4)\right]$$

Mais on a

$$c^4\sin^4\omega - b^4 = (c^2\sin^2\omega - b^2)(a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega)$$
$$c^4\cos^4\omega - a^4 = (c^2\cos^2\omega + a^2)(-a^2\sin^2\omega - b^2\cos^2\omega)$$

On peut donc diviser les deux membres de l'équation précédente par $(a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega)^2$, et il reste

$$a^4(c^4\cos^2\omega - a^4)(c^2\sin^2\omega - b^2)^2$$
$$- b^4(c^4\sin^2\omega - b^4)(c^2\cos^2\omega + a^2)$$
$$= c^4(a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega)(c^6\cos^2\omega\sin^2\omega + b^6\cos^2\omega$$
$$- a^6\sin^2\omega)$$

ou, en conservant seulement les puissances de $\sin\omega$:

$$-c^8(a^4 + b^4)\sin^6\omega + 3b^4c^8\sin^4\omega - b^4c^4\sin^2\omega(a^4 - 6a^2b^2 + b^4)$$
$$- c^4b^6(2a^2 - b^2)$$
$$= c^4(c^2\sin^2\omega + b^2)\left[b^6 + (c^6 - b^6 - a^6)\sin^2\omega - c^6\sin^4\omega\right]$$

On peut encore diviser les deux membres par $c^2\sin^2\omega + b^2$, et il vient,

$$-c^2(a^4 + b^4)\sin^4\omega + b^2(a^4 + b^4 + 3b^2c^2)\sin^2\omega$$
$$- b^4(2a^2 - b^2)$$
$$= -c^6\sin^4\omega + \sin^2\omega(c^6 - b^6 - a^6) + b^6$$

ou enfin $\qquad c^2\sin^4\omega - 2a^2\sin^2\omega + b^2 = 0.$

Passant du sinus à la tangente, on retrouve l'équation $a^2\mathrm{tg}^4\omega + 2c^2\mathrm{tg}^2\omega - b^2 = 0$, qui doit avoir lieu pour que OP soit minimum.

QUESTION 6

Solution par M. H. Ferval, élève au Lycée Henri IV (classe de M. Macé de Lépinay).

Si dans une équation, A, B, C, D *désignent quatre coefficients consécutifs positifs, ou tels tout au moins que* AC *soit positif ; si l'on a* BC = AD, *l'équation proposée a des racines imaginaires.*

Si l'on multiplie le premier membre de l'équation considérée par $Bx - C$; dans l'équation obtenue n'existera pas la puissance de x, dont B était le coefficient, et les coefficients des termes qui limiteront la lacune seront

$$B^2 - AC \text{ et } BD - C^2.$$

Or, en vertu de la relation BC = AD, l'expression $B^2 - AC$ peut s'écrire $\frac{BAD}{C} - AC$ ou $\frac{A}{C}(BD - C^2)$;

AC étant > 0, par hypothèse, la nouvelle équation présente une lacune d'un terme entre deux termes de même signe ; elle a donc, ainsi que la proposée, au moins deux racines imaginaires.

QUESTION 47

Solution par M. H. Ferval, élève au Lycée Henri IV.

Lorsque cinq coefficients consécutifs d'une équation sont :

$$A, B, C, 2B - A, 2C - B,$$

l'équation a des racines imaginaires.

Désignons par a_p, a_{p-1} ... a_{p-4} les cinq coefficients A, B, C, 2B — A, 2C — B, de l'équation considérée ; ces cinq coefficients satisfont aux deux relations :

$$a \quad - 2a_{p-1} + a_{p-3} = 0$$
$$a_{p-1} - 2a_{p-2} + a_{p-4} = 0.$$

En multipliant le premier membre de l'équation par l'expression $1 - 2x + x^2$,
qui, égalée à zéro, n'admet que des racines réelles, on obtient une équation présentant une lacune de deux termes, les puissances de x dont A et B étaient les coefficients respectifs venant à manquer; l'équation nouvelle et par suite la première ont donc au moins deux racines imaginaires.

QUESTION 48

Solution par M. H. Ferval, élève au Lycée Henri IV.

Lorsque quatre coefficients consécutifs d'une équation sont :

$$+3A \quad -A \quad -A \quad +3A,$$

l'équation a des racines imaginaires.

En désignant par a_p, a_{p-1}, a_{p-2}, a_{p-3}, ces quatre coefficients consécutifs, on voit qu'ils satisfont aux deux relations

$$a_p + 2a_{p-1} + a_{p-2} = 0$$
$$a_{p-1} + 2a_{p-2} + a_{p-3} = 0.$$

Si l'on multiplie le premier membre de l'équation par $1 + 2x + x^2$ ou $(1 + x)^2$, on fait disparaître les puissances de x qui avaient pour coefficients respectifs a_p et a_{p-1}; l'équation obtenue, ainsi que l'équation considérée, aura donc au moins deux racines imaginaires.

QUESTIONS PROPOSÉES

72. — On donne une parabole P, rapportée à ses axes ordinaires; par le pied de la directrice, on mène une transversale qui rencontre P en deux points A, B; soit C le cercle qui passe par ces points et par le foyer de P.

Lieu des centres des cercles C. Ce lieu est une parabole cubique.

Enveloppe des polaires de l'origine. Cette courbe est une cubique unicursale.

Enveloppe des cercles C; on trouvera une quartique à point triple.

Par le pied de la directrice on mène deux droites rectangulaires Δ' et Δ''; soient C' et C'' les cercles correspondants; trouver le lieu des points communs à C' et C''; ce lieu est une quartique passant doublement par les ombilics du plan.

(G. L.)

73. — On considère un triangle ABC, inscrit dans une parabole, et dont l'hypoténuse est une normale de la courbe. Trouver le lieu décrit par le centre du cercle inscrit à ce triangle. *(G. L.)*

74. — On décrit une conique osculatrice à une conique donnée en un point P, et passant par les foyers F et F'. Démontrer que les tangentes en F et F' se coupent au centre du cercle osculateur en P. *(Kœhler.)*

75. — Le nombre

$$\frac{(\sqrt{2}+1)^{2n-1}+(\sqrt{2}-1)^{2n-1}}{2\sqrt{2}}$$

est la somme de deux carrés entiers. *(Catalan.)*

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX,
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 16506-3

SUR UNE

NOUVELLE ESPÈCE DE FRACTIONS CONTINUES

Par M. **G. de Longchamps**.

L'objet de ce mémoire est le développement en fractions continues, d'un nouveau genre, des quantités irrationnelles de la forme $\alpha + \sqrt{\beta}$. α et β désignant des nombres entiers. Nous nous appuierons à plusieurs reprises, dans ce travail, sur un théorème de Lagrange; mais nous devons entrer, d'abord dans quelques détails sur ce théorème fondamental de l'analyse récurrente et nous ferons connaître la démonstration élémentaire que nous en avons donnée autrefois (1).

I. Définition des suites récurrentes. — Lorsqu'une quantité, que nous désignerons par U_n, et dont la valeur dépend du nombre entier et positif n, est liée aux quantités de même espèce $U_{n-1}, U_{n-2}, \ldots U_{n-i}$ par une relation linéaire et homogène

$$U_n + A_1 U_{n-1} + \ldots + A_i U_{n-i} = 0,$$

on dit que ces fonctions U forment une *suite récurrente* et la relation précédente constitue la *loi de récurrence* de ces fonctions. Si l'on veut des exemples de nombres récurrents, on peut d'abord citer les termes d'une progression géométrique qui vérifient constamment l'équation

$$U_n - q\, U_{n-1} = 0.$$

Dans les progressions arithmétiques, trois termes consécutifs U_n, U_{n-1}, U_{n-2} vérifient toujours la relation

$$U_n - 2U_{n-1} + U_{n-2} = 0.$$

Enfin, pour citer un dernier exemple emprunté à la trigonométrie élémentaire, nous rappellerons qu'en posant $U_n = \sin nx$ et $\cos x = \alpha$, on a

$$U_{n+1} - 2\alpha U_n + U_{n-1} = 0.$$

(1) Association française pour l'avancement des sciences. Congrès de Reims, 1880.

Lorsque les coefficients $A_1, A_2, \ldots A_i$ sont des constantes, on a une *suite récurrente proprement dite;* dans le cas où ces coefficients varient eux-mêmes avec n, on obtient ce qu'on peut nommer, pour les différencier des autres, des *suites récurrentes transcendantes.*

Une fonction U_n vérifiant l'équation de récurrence proposée est dite une *intégrale* de cette équation. Lorsque U_n renferme des *constantes arbitraires* dont le nombre est tel que toute intégrale puisse être représentée par U_n, pour des valeurs convenablement choisies des constantes, on dit que U_n est l'*intégrale générale.*

Les suites récurrentes proprement dites ont été étudiées particulièrement par Lagrange qui a donné sur elles le théorème suivant:

II. Théorème de Lagrange. — *Soit une fonction* U_n, *vérifiant l'égalité*

$$U_n + A_1 U_{n-1} + \ldots + A_i U_{n-i} = 0 \qquad (1)$$

et soit

$$z^i + A_1 z^{i-1} + \ldots + A_i = 0 \qquad (2)$$

une équation déduite de (1) *d'après une loi évidente.*

Si cette équation que nous nommerons ÉQUATION GÉNÉRATRICE *n'a pas de racines égales, l'intégrale générale de* (1) *est donnée par la formule*

$$U_n = \alpha_1 z_1^n + \alpha_2 z_2^n + \ldots + \alpha_i z_i^n \qquad (A)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_i$, *désignant des constantes arbitraires dont la valeur dépend, en général, des données initiales*

$$U_0, \quad U_1, \quad \ldots \quad U_{i-1};$$

et $z_1, z_2, \ldots z_i$ *étant les racines de l'équation génératrice.*

Posons $\quad y = U_0 + U_1 x + U_2 x^2 + \ldots + U_n x^n \qquad (3)$

et multiplions les deux membres de cette égalité, successivement par $\quad 1, A_1 x, A_2 x^2, \ldots A_i x^i$.

Si nous ajoutons ces résultats et si nous tenons compte de la relation (1) qui a lieu pour toutes les valeurs entières de n, supérieures à $(i - 1)$, nous voyons disparaître les termes en $x^i, x^{i+1}, \ldots x^n$ et nous obtenons finalement

$$y(1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_i x^i) = \varphi(x) + x^{n+1} \psi(x)$$

$\psi(x)$ et $\varphi(x)$, étant des polynômes entiers du degré $(i - 1)$ tout au plus.

Considérons maintenant la fraction $\frac{\varphi(x)}{1 + A_1 x + \ldots + A_i x^i}$; on a, identiquement, par la décomposition connue d'une fraction rationnelle en fractions simples, à coefficients réels ou imaginaires,

$$\frac{\varphi(x)}{1 + A_1 x + \ldots + A_i x^i} = \frac{\lambda_1}{x - \theta_1} + \frac{\lambda_2}{x - \theta_2} + \ldots + \frac{\lambda_i}{x - \theta_i}$$

$\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_i$ désignant les i racines de l'équation

$$F(x) = A_i x^i + \ldots + A_1 x + 1 = 0. \qquad (2')$$

On doit observer ici que les racines de (2') sont les inverses des racines de l'équation (2); celles-ci étant supposées distinctes, $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_i$, sont des nombres différents.

On a donc

$$y = \frac{\lambda_1}{x - \theta_1} + \frac{\lambda_2}{x - \theta_2} + \ldots + \frac{\lambda_i}{x - \theta_i} + x^{n+1} \frac{\psi(x)}{F(x)} \quad (3')$$

Si nous prenons n fois de suite la dérivée de y, dans les égalités (3) et (3'), nous obtenons en égalant les deux expressions de $y^{(n)}$, et en y faisant $x = 0$,

$$-U_n = \frac{\lambda_1}{\theta_1^{n+1}} + \frac{\lambda_2}{\theta_2^{n+1}} + \ldots + \frac{\lambda_i}{\theta_i^{n+1}}$$

ou encore, en posant

$$-\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{\theta_1}, \; -\alpha_2 = \frac{\lambda_2}{\theta_2}, \ldots, \; -\alpha_i = \frac{\lambda_i}{\theta_i},$$

et en remarquant que l'on a

$$z_1 = \frac{1}{\theta_1}, \; z_2 = \frac{1}{\theta_2}, \; \ldots \; z_i = \frac{1}{\theta_i}$$

$$U_n = \alpha_1 z_1^n + \alpha_2 z_2^n + \ldots + \alpha_i z_i^n.$$

C'est la formule que nous voulions établir, formule dans laquelle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_i$ désignent i constantes arbitraires; la valeur de ces constantes est déterminée quand on connaît les i premières fonctions U,

$$U_0, \quad U_1, \quad \ldots \quad U_{i-1}.$$

Nous allons développer ce dernier point, dans le paragraphe suivant, et montrer que la formule (A) donne bien l'intégrale générale.

III. Détermination des constantes arbitraires. — Une relation de récurrence entre $(i + 1)$ fonctions U

$$U_n, U_{n-1}, \ldots U_{n-i},$$

permet de calculer U_i, connaissant $U_0, U_1 \ldots U_{i-1}$; puis U_{i+1}, etc... Il y a donc i constantes arbitraires qui sont ou les i premières fonctions U. ou des quantités en nombre i, et dépendant de celles-ci. Nous voulons montrer que les constantes arbitraires de la formule (A) sont bien déterminées quand on donne les i premières fonctions U.

En effet, la formule (A) donne

$$\begin{aligned} U_0 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_i \\ U_1 &= \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \ldots + \alpha_i z_i \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_{i-1} &= \alpha_1 z_1^{i-1} + \alpha_2 z_2^{i-1} + \ldots + \alpha_i z_i^{i-1} \end{aligned}$$

Dans ces équations linéaires le déterminant des inconnues est

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ z_1 & z_2 & \ldots & z_i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_1^{i-1} & z_2^{i-1} & \ldots & z_i^{i-1} \end{vmatrix}$$

C'est un déterminant de Vandermonde, d'ordre i, et l'on sait que ce déterminant est différent de zéro quand lesquantités réelles ou imaginaires $z_1, z_2, \ldots z_i$ sont différentes hypothèse que nous avons faite.

Ainsi les paramètres α sont bien déterminés quand on donne les i premières fonctions U, et elles sont indéterminées, si une ou plusieurs de ces fonctions sont elles-mêmes indéterminées. Il résulte de cette remarque que la formule (A) donne bien l'intégrale générale, et qu'il n'existe aucune intégrale particulière qui ne puisse être donnée par cette formule quand on donne aux coefficients α des valeurs convenablement choisies.

IV. Théorème de Lagrange dans le cas des racines égales. — Lagrange a examiné le cas particulier où l'équation génératrice admet des racines multiples et a montré la modification profonde que subit, dans cette hypothèse, l'intégrale générale. La démonstration que nous venons de donner du théorème de Lagrange, dans le cas général, subsiste, en principe, quand on suppose que l'équa-

tion génératrice a des racines égales; il faut seulement, comme nous allons le montrer, effectuer la décomposition de la fraction rationnelle en fractions simples, en tenant compte des racines multiples.

Prenons, pour plus de simplicité dans nos explications, le cas d'une racine double. On a, dans cette hypothèse,

$$\frac{\varphi(x)}{1 + A_1 x + \ldots + A_i x^i} = \frac{\lambda_1}{(x-\theta_1)^2} + \frac{\lambda_2}{x-\theta_1} + \ldots + \frac{\lambda i}{x - \theta_{i-1}}.$$

La dérivée d'ordre n, $y^{(n)}$ renferme, entre autres termes,

$$\frac{(-1)^n 2.3\ldots(n+1)\lambda_1}{(x-\theta_1)^{n+2}} + \frac{(-1)^n 1.2\ldots n\lambda_2}{(x-\theta_1)^{n+1}} + \ldots$$

Si l'on fait $x = 0$, dans les deux valeurs de $y^{(n)}$, conformément à la méthode que nous avons indiquée tout à l'heure, on voit que le coefficient de z_1, z_1 étant la racine double, est de la forme $\alpha n + \beta$; α et β désignant des constantes arbitraires. L'intégrale générale est donc donnée par la formule $U_n = (\alpha n + \beta)\, z_1^n + \lambda_3 z_2^n + \ldots + \lambda_i z_{i-1}^n$.
Elle renferme encore i constantes arbitraires :

$$\alpha, \beta ; \lambda_3, \ldots \lambda_i.$$

On voit de même que si z_1 est une racine triple, l'intégrale générale est U_n, en posant

$$U_n = (\alpha n^2 + \beta n + \gamma) z_1^n + \lambda_4 z_2^n + \ldots + \lambda_i z^{i-2},$$

formule dans laquelle α, β, γ; λ_4, ... λ_i, désignent i constantes arbitraires, et ainsi de suite.

(A suivre.)

NOTE DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Par M. **Poujade**, professeur de mathématiques spéciales au Lycée de Lyon.

AXES DE LA SECTION PLANE D'UNE QUADRIQUE

Nous considérons un ellipsoïde et admettons que la question a été ramenée, comme il est aisé de le faire, à la section par un plan mené par le centre.

Soient
$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$
le plan sécant, et
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$
l'ellipsoïde; appelons (x', y', z') l'extrémité de l'un des axes de la section, l'autre satisfait aux équations
$$\alpha x' + \beta y' + \gamma z' = 0$$
$$xx' + yy' + zz' = 0$$
$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 0;$$
donc il vient pour la déterminer la condition
$$\begin{vmatrix} \frac{x}{a^2} & \frac{y}{b^2} & \frac{z}{c^2} \\ x & y & z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = \alpha yz\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) + \beta zx\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)$$
$$+ \gamma xy\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) = 0,$$
cône du second degré passant par les deux axes de la section; il passe aussi par la normale au plan et par les trois axes de coordonnées.

Posons maintenant
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$
R demi-axe de la section, on a pour calculer R à joindre à l'équation ci-dessus celle du cône et
$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0.$$
puis
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Mais sous ces conditions l'équation du cône donne
$$0 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{y}{b^2} & \frac{z}{c^2} \\ R^2 & y & z \\ 0 & \beta & \gamma \end{vmatrix} = \gamma\left(1 - \frac{R^2}{b^2}\right) - \beta z\left(1 - \frac{R^2}{c^2}\right)$$
et opérant de même sur les autres colonnes on a la suite de rapports égaux
$$\frac{x}{\dfrac{\alpha}{1 - \dfrac{R^2}{a^2}}} = \frac{y}{\dfrac{\beta}{1 - \dfrac{R^2}{b^2}}} = \frac{z}{\dfrac{\gamma}{1 - \dfrac{R^2}{c^2}}}$$

donnant enfin quand on remplace dans

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

$$\frac{\alpha^2}{1 - \frac{R^2}{a^2}} + \frac{\beta^2}{1 - \frac{R^2}{b^2}} + \frac{\gamma^2}{1 - \frac{R^2}{c^2}} = 0,$$

équation quadratique donnant les carrés des demi-axes.

SUR L'ÉQUATION AUX CARRÉS DES DIFFÉRENCES

Par M. **Edouard Lucas.**

Les méthodes connues pour former l'équation aux carrés des différences des racines d'une équation donnée de degré m sont assez longues et impraticables ; cela tient à ce que l'on se propose d'exprimer les coefficients de l'équation cherchée en fonction des m coefficients de l'équation donnée ; mais, si l'on remarque que l'équation aux carrés des différences ne change pas lorsque l'on augmente d'une même quantité arbitraire les racines de la proposée, il est possible d'exprimer les coefficients inconnus au moyen de $(m - 1)$ fonctions des coefficients de l'équation primitive, et, par exemple, au moyen des coefficients de l'équation transformée par la suppression du second terme. Nous nous proposons d'exposer une méthode assez rapide pour le troisième degré et pour le quatrième.

1. — Désignons par α, β, x les racines de l'équation

$$x^3 + px + q = 0.$$

et par z l'une des racines de l'équation aux carrés des différences ; on a

$$z = (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta ;$$

mais, d'autre part,

$$\alpha + \beta + x = 0 \text{ et } \alpha\beta x = -q.$$

Par suite $$z = x^2 + \frac{4q}{x},$$

et $$x^3 - xz + 4q = 0$$

Retranchant membre à membre de la proposée, on tire

$$x = \frac{3q}{p+z}.$$

De là le procédé suivant : *Pour obtenir l'équation aux carrés des différences des racines de l'équation*

$$x^3 + px + q = 0,$$

il suffit de remplacer x *par* $\frac{3q}{p+z}$, *et l'on trouve*

$$z^3 + 6pz^2 + 9p^2z + 4p^3 + 27q^2 = 0.$$

2. — Considérons plus généralement l'équation

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0,$$

et posons $\qquad ac - b^2 = \delta$;

en supposant d'abord $a = 1$, l'équation peut s'écrire

$$(x+b)^3 + 3\delta(x+b) + d - b^3 - 3b\delta = 0.$$

En considérant $x + b$ comme l'inconnue, l'équation aux carrés des différences est donc

$$a^4z^3 + 18a^2\delta z^2 + 81\delta^2 z - \Delta = 0,$$

et l'on a $\Delta = (ad - bc)^2 - 4(ac - b^2)(bd - c^2)$.

On retient facilement cette dernière expression en observant qu'elle est égale au résultant des dérivées partielles

$$f'_x = ax^2 + 2bxy + cy^2, \qquad f'_y = bx^2 + 2cxy + d'y^2$$

du premier membre de l'équation rendue homogène; ou encore au discriminant du hessien

$$(ax + by)(cx + dy) - (bx + cy)^2.$$

3. — Considérons maintenant l'équation du quatrième degré $\qquad ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0.$

et posons

$$16(ac - b^2) = \mathrm{D}, \qquad 4(ae - 4bd + 3c^2) = \mathrm{I},$$

$$16\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} = \mathrm{J}.$$

Nous supposerons $a = 1$; l'équation peut s'écrire

$$\left(x^2 + 2bx + \frac{y}{2}\right)^2 = x^2(4b^2 + y - 6c) + 2x(by - 2d) + \frac{y^2}{4} - e:$$

si l'on exprime que le second membre est un carré parfait on obtient une équation du troisième degré en y que l'on appelle la *réduite* de Ferrari :

$$(y^2 - 4e)(y + 4b^2 - 6c) - 4(by - 2d)^2 = 0. \qquad (1)$$

ou bien, en désignant $y - 2c$ par λ,

$$\lambda^3 - I\lambda + J = 0. \qquad (2)$$

Désignons par α, β, γ, δ les racines de la proposée, par y_1, y_2, y_3 celles de la réduite, on a

$$y_1 = \alpha\beta + \gamma\delta, \qquad y_2 = \alpha\gamma + \beta\delta, \qquad y_3 = \alpha\delta + \beta\gamma.$$

Soient u et z les racines des équations aux carrés des différences des racines de la proposée et de la réduite, il vient

$$z_1 = (y_2 - y_3)^2 = (\alpha - \beta)^2(\gamma - \delta)^2 = u_1u_4,$$
$$z^2 = (y_3 - y_1)^2 = (\alpha - \gamma)^2(\beta - \delta)^2 = u_2u_5,$$
$$z_3 = (y_1 - y_2)^2 = (\alpha - \delta)^2(\beta - \gamma)^2 = u_3u_6.$$

On a ainsi. $\qquad z_1z_2z_3 = u_1u_2u_3u_4u_5u_6.$

Donc : *Le produit des carrés des différences des racines d'une équation du quatrième degré est égal au produit des carrés des différences des racines de la réduite de Ferrari.*

En se reportant au § 1 et en prenant l'équation (2) au lieu de l'équation (1), on en déduit immédiatement l'expression $a^6(\alpha - \beta)^2(\alpha - \gamma)^2(\alpha - \delta)^2(\beta - \gamma)^2(\beta - \delta)^2(\gamma - \delta)^2 = 4I^3 - 27J^2$, qui a été obtenue, pour la première fois, par M. Cayley

4. — Par le § 1, on déduit

$$\lambda = \frac{3J}{z - I}, \qquad \text{et} \qquad z = I + \frac{3J}{\lambda}.$$

D'autre part,

$$u_1 + u_4 = (\alpha - \beta)^2 + (\gamma - \delta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 - 2y_1,$$

d'où $\qquad u_1 + u_4 = -D - 2\lambda_1.$

et $\qquad u_1u_4 = z.$

On obtient donc l'équation aux carrés des différences en éliminant λ entre les équations

$$\lambda^3 - I\lambda + J = 0,$$

et $\qquad u^2 + u(D + 2\lambda) + I + \dfrac{3J}{\lambda} = 0,$

c'est-à-dire entre les deux équations du second degré

$$(2u\lambda^2 + \lambda(u^2 + uD + I) + 3J = 0,$$
$$(3\lambda^2 - 2\lambda u - (u^2 + uD + 4I) = 0;$$

et l'on trouve ainsi, assez simplement,

$$u^3(u + D)^3 + 2I(u^2 + 2(4ID + 13J)u^3 + (6ID)^2 - 18DJ - 7I^2)u^2$$
$$+ 9I(ID - 6J)u + 4I^3 - 27J^2 = 0.$$

ÉCOLE NORMALE 1883

Solution par M. Levavasseur.

On donne la cissoïde qui, rapportée à des axes de coordonnées rectangulaires, a pour équation $(x^2 + y^2)x = ay^2$. *Soient* x' *et* y' *les coordonnées d'un point* M *du plan. On propose de former :*
1° l'équation du 3e degré qui a pour racines les coefficients angulaires des droites qui joignent le point O *aux points de contact des trois tangentes à la cissoïde issues du point* M ;
2° l'équation du cercle qui passe par les trois points de contact.

Montrer que si les trois tangentes sont réelles, le point M *est intérieur au cercle.*

On considère l'ensemble des cercles C_m *dont chacun jouit de cette propriété que les tangentes à la cissoïde en chacun des points où ils la rencontrent concourent en un même point : soit* M *ce point de concours pour le cercle* C_m.

On demande le lieu des centres des cercles C_m *qui passent par un point donné* P *du plan, ainsi que le lieu des points* M *relatifs à ces cercles. On examinera en particulier le cas où le point* P *est situé sur la cissoïde et ne fait pas partie des trois points communs au cercle* C_m *et à la cissoïde pour lesquels les trois tangentes concourent.*

Combien passe-t-il de cercles C_m *pour deux points donnés* P *et* Q *du plan ? Peut-on disposer de ces deux points de façon qu'ils appartiennent à une infinité de cercles* C_m ?

Soient α et β les coordonnées du point de contact d'une tangente issue du point M à la cissoïde. La tangente au point $\alpha\beta$ à la cissoïde a pour équation

$$x(3\alpha^2 + \beta^2) + y(2\alpha\beta - 2a\beta) - a\beta^2 = 0.$$

Si nous exprimons que cette tangente passe par le point $x'y'$, nous obtiendrons la relation

$$(3\alpha^2 + \beta^2)x' + 2\beta(\alpha - a)y' - a\beta^2 = 0. \qquad (1)$$

Le coefficient angulaire de la droite qui joint l'origine au

point $\alpha\beta$ est $\frac{\beta}{\alpha}$. D'ailleurs le point $\alpha\beta$ est sur la cissoïde, donc $(\alpha^2 + \beta^2)\alpha = a\beta^2$. (2)

Entre (1) et (2) formons une combinaison homogène par rapport aux lettres α et β.

L'équation (1) peut s'écrire

$$(3\alpha^2 + \beta^2)x' + 2\alpha\beta y' - a\beta^2 = 2a\beta y'.$$

La combinaison sera donc la suivante :

$$[(3\alpha^2 + \beta^2)x' + 2\alpha\beta y' - a\beta^2]a\beta^2 = 2a\alpha\beta y'(\alpha^2 + \beta^2).$$

Nous remarquons le facteur β qui s'explique par la considération de la droite OM, laquelle peut être appelée tangente à la cissoïde au point O, puisqu'elle rencontre la courbe en deux points confondus au point O. Ce facteur supprimé, il reste

$$\beta[(3\alpha^2 + \beta^2)x' + 2\alpha\beta y' - a\beta^2] = 2\alpha y'(\alpha^2 + \beta^2).$$

Divisons les deux membres par α^3 et posons $\frac{\beta}{\alpha} = m$. On a

$$m(3x' + m^2x' + 2my' - am^2) = 2y'(1 + m^2)$$

ou

$$\left.\begin{array}{l} 3x'm + x'm^3 + 2y'm^2 \\ \quad - am^3 - 2y'm^2 - 2y' \end{array}\right\} = 0$$

ou enfin

$$(x' - am^3 + 3x'm - 2y' = 0 \qquad (A)$$

Cherchons maintenant l'équation du cercle qui passe par les trois points de contact des tangentes issues du point M à la cissoïde.

Soit $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ l'équation de ce cercle.

Si avec cette équation et l'équation de la cissoïde, je fais une combinaison homogène en x et y, j'aurai en posant $m = \frac{y}{x}$ une équation en m qui me donnera les coefficients angulaires des droites allant de l'origine aux points d'intersection du cercle avec la cissoïde ; or l'équation

$$x^2 + y^2 + (\alpha x + \beta y)\frac{x(x^2 + y^2)}{ay^2} + \gamma\frac{x^2(x^2 + y^2)^2}{a^2y^4} = 0$$

admet un facteur évident, $x^2 + y^2$, de sorte qu'on peut dire : l'intersection d'une cissoïde et d'un cercle est un problème qui s'abaisse au 4e degré, ces courbes passant toutes les deux par les ombilics du plan. Ce facteur supprimé, il reste une équation du 4e degré.

$$a^2y^4 + axy^2(\alpha x + \beta y) + \gamma x^2(x^2 + y^2) = 0$$

ou $$a^2m^4 + am^2(\alpha + \beta m) + \gamma(1 + m^2) = 0.$$

Cette équation doit admettre les trois racines de l'équation (A).

Donc on peut écrire l'identité

$$a^2m^4 + a\beta m^3 + (a\alpha + \gamma)m^2 + \gamma$$
$$\equiv (pm + q)[(x' - a)m^3 + 3x'm - 2y']$$
$$\equiv p(x' - a)m^4 + q(x' - a)m^3 + 3px'm^2 - 2py'm - 2qy + 3qx'm.$$

J'en déduis les égalités

$$\left.\begin{array}{rl} a^2 = p(x' - a) & (1) \\ a\beta = q(x' - a) & (2) \\ a\alpha + \gamma = 3px' & (3) \\ 2py' = 3qx' & (4) \\ \gamma + 2qy' = 0 & (5) \end{array}\right\}$$

De (1) je tire $p = \dfrac{a^2}{x' - a}$. Je transporte dans (4) ce qui me donne $q = \dfrac{2a^2y'}{3x'(x'-a)}$.

Donc (2) devient

$$a\beta = \frac{2a^2y'}{3x'} \quad \text{ou} \quad \beta = \frac{2ay'}{3x'}$$

et (5) $$\gamma = -\frac{4a^2y'^2}{3x'(x'-a)}.$$

Enfin l'équation (3) me donne α.

$$a\alpha = \frac{4a^2y'^2}{3x'(x' - a)} + \frac{3a^2x'}{x' - a}.$$

donc $$\alpha = \frac{4ay'^2 + 9ax'^2}{3x'(x' - a)}.$$

L'équation du cercle cherché sera par conséquent

$$x^2 + y^2 + \frac{4ay'^2 + 9ax'^2}{3x'(x' - a)}x + \frac{2ay'}{3x'}y - \frac{4a^2y'^2}{3x'(x' - a)} = 0.$$

Nous allons montrer que si les trois tangentes issues du point M à la cissoïde sont réelles, le point M est à l'intérieur du point C_m.

L'équation A, $m^3 + \dfrac{3x'}{x' - a}m - \dfrac{2y'}{x' - a} = 0$, aura ses racines réelles si les coordonnées x' et y' satisfont à l'inégalité $\dfrac{x'^3}{(x' - a)^3} + \dfrac{y'^2}{(x' - a)^2} < 0$ ou $\dfrac{x'^3}{x' - a} + y'^2 < 0$.

Or considérons la puissance II du point M par rapport au cercle C_m

$$\Pi = x'^2 + y'^2 + ax' \frac{4y'^2 + 9x'^2}{3x'(x' - a)} + \frac{2ay'^2}{3x'} - \frac{4a^2y'^2}{3x'(x' - a)}:$$

$$3x'(x' - a)\Pi = 3x'^3(x' - a) + 3x'y'^2(x' - a)$$
$$+ a\,[4y'^2x' + 9x'^3 + 2y'^2(x' - a) - 4ay'^2].$$

Donc $\quad 3x'(x' - a)\Pi = 3x'[x'^3 + y'^2(x' - a)]$
$$+ a[4y'^2(x' - a) + 6x'^3 + 2y'^2(x' - a)]$$

ou $\quad x'(x' - a)\Pi = [x'^3 + y'^2(x' - a)](x' + 2a)$

Donc enfin $\Pi = \dfrac{x' + 2a}{x'} \cdot \left[\dfrac{x'^3}{x' - a} + y'^2\right].$

Or je remarque que si x' est négatif, la condition $\dfrac{x'^3}{x' - a} + y'^2 < 0$ ne serait pas réalisée ; x étant positif, $\dfrac{x' + 2a}{x'}$ serait positif, donc Π est négatif en même temps que le second facteur. C. Q. F. D.

Je désigne par x_0 et y_0 les coordonnées du point fixe P par lequel passent tous les cercles C_m que nous allons désormais considérer.

L'équation du lieu du point M s'obtient immédiatement en exprimant que le cercle passe par le point P

$$x_0^2 + y_0^2 + ax_0 \frac{4y^2 + 9x^2}{3x(x - a)} + \frac{2ay}{3x} y_0 - \frac{4a^2y^2}{3x(x - a)} = 0$$

ou $$3x(x - a)(x_0^2 + y_0^2) + ax_0(4y^2 + 9x^2)$$
$$+ 2ay_0y(x - a) - 4a^2y^2 = 0.$$

Ordonnons cette équation

$$\left.\begin{array}{ll} 3(x_0^2 + y_0^2)x^2 - 3a(x_0^2 + y_0^2)x + 4ax_0y^2 + 2ay_0xy - 2a^2y_0y & \\ + 9ax_0x^2 \qquad\qquad - 4a^2y^2 & \end{array}\right\} = 0$$

ou $$3(x_0^2 + y_0^2 + 3ax_0)x^2 + 4a(x_0 - a)y^2 + 2ay_0xy$$
$$= 3a(x_0^2 + y_0^2)x + 2a^2y_0y.$$

Cette conique passe par l'origine. Ce sera une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant la valeur de

$$U = a[12(x_0 - a)(x_0^2 + y_0^2 + 3ax_0) - a^2y_0^2].$$

Les coordonnées du centre du cercle C_m sont données par les équations $\quad 2x + \dfrac{4ay'^2 + 9ax'^2}{3x'(x' - a)} = 0$

et $$y + \frac{ay'}{3x'} = 0.$$

La dernière pouvant s'écrire $\frac{x'}{a} = \frac{y'}{-3y}$, je ferai une combinaison homogène entre

$$3(x_0^2 + y_0^2 + 3ax_0)x'^2 + 4a(x_0 - a)y'^2 + 2ay_0x'y'$$
$$= 3a(x_0^2 + y_0^2)x' + 2a^2y_0y'$$

et
$$6xx'^2 + 4ay'^2 + 9ax'^2 = 6axx',$$

savoir

$$[3(x_0^2 + y_0^2)x' + 2ay_0y'][6xx'^2 + 4ay'^2 + 9ax'^2]$$
$$= 6xx'[3(x_0^2 + y_0^2 + 3ax_0)x'^2 + 4a(x_0 - a)y'^2 + 2ay_0x'y']$$

Remplaçons dans cette équation x' par a, y' par $-3y$.

On a $[3(x_0^2 + y_0^2)a - 6ay_0y](6a^2x + 36ay^2 + 9a^3)$
$= 6ax[3a^2(x_0^2 + y_0^2 + 3ax_0) + 36a(x_0 - a)y^2 - 6a^2y_0y]$

ou $9a^2[(x_0^2 + y_0^2) - 2y_0y](2ax + 12y^2 + 3a^2)$
$= 18a^2x[a(x_0^2 + y_0^2) + 3a^2x_0 + 12(x_0 - a)y^2 - 2ay_0y]$

ou enfin

$$3(x_0^2 + y_0^2 - 2y_0y)(4y^2 + a^2)$$
$$= 2x\begin{bmatrix} a(x_0^2 + y_0^2) + 3a^2x_0 + 12(x_0 - a)y^2 - 2ay_0y \\ - a(x_0^2 + y_0^2) \qquad\qquad\qquad\qquad + 2ay_0y \end{bmatrix}$$

ce qui donne l'équation

$$(x_0^2 + y_0^2 - 2y_0y)(4y^2 + a^2) = 2x[4(x_0 - a)y^2 + a^2x_0]$$

Les asymptotes de cette courbe parallèles à Ox seront réelles ou imaginaires suivant le signe du produit

$$x_0(a - x_0)$$

Premier cas. — $x_0(a - x_0) > 0$. — Les deux asymptotes sont réelles.

Ce cas se divise en trois autres. En effet, les deux asymptotes, l'axe Oy et la droite $y = \frac{x_0^2 + y_0^2}{2y_0}$ séparent le plan en régions, et l'on a différents genres de courbes suivant que cette dernière droite sera intérieure aux deux asymptotes ou extérieure ou confondue avec l'une d'elles.

1° x_0 et y_0 satisfont à l'inégalité $\frac{x_0^2 + y_0^2}{y_0} < a\sqrt{\frac{x_0}{a - x_0}}$

Cherchons l'équation de la troisième asymptote

$$\varphi_m(1, c) = 8(x_0 - a)c^2 + 8y_0c^3 = 0;$$

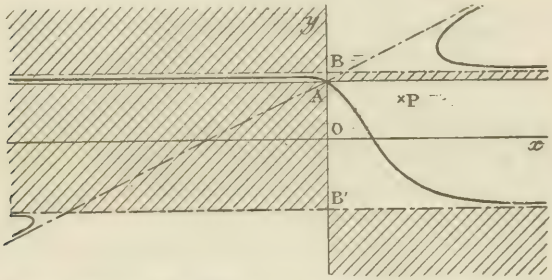
donc
$$c = \frac{a - x_0}{y_0}$$

$$\varphi'_m(1, c) = 16(x_0 - a)c24y_0c^2$$
$$\varphi_m - 1 = -4(x_0^2 + y_0^2)c^2$$
$$d = \frac{4(x_0^2 + y_0^2)c^2}{16(x_0 - a)c + 24y_0c^2} = \frac{(x_0^2 + y_0^2)c}{(4x_0 - a) + 6y_0c}$$
$$= \frac{(x_0^2 + y_0^2)\dfrac{(a - x_0)}{y_0}}{4(x_0 - a) + 6(a - x_0)} = \frac{x_0^2 + y_0^2}{2y_0}$$

L'équation de l'asymptote est donc

$$y = \frac{a - x_0}{y_0}y + \frac{x_0^2 + y_0^2}{2y_0}.$$

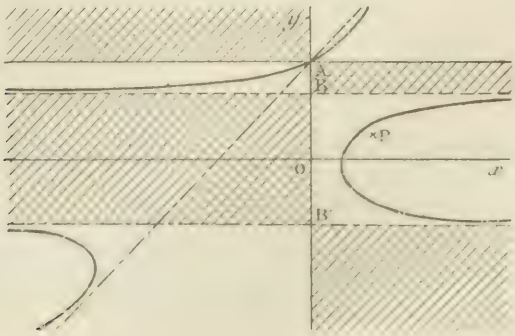
La courbe a dans ce cas la forme suivante :



2° Si au contraire nous supposons que l'on ait

$$\frac{x_0^2 + y_0^2}{y_0} > a\sqrt{\frac{x_0}{a - x_0}}$$

Alors la forme de courbe est différente ; ce sera la suivante :



3° Considérons maintenant le cas où l'on aurait

$$\frac{x_0^2 + y_0^2}{y_0} = a\sqrt{\frac{x_0}{a - x_0}}$$

et interprétons tout d'abord cette condition. Elle peut s'écrire

$$\frac{(x_0^2 + y_0^2)^2}{y_0^2} = \frac{a^2 x_0}{a - x_0}$$

ou $$a^2 x_0 y_0^2 - a(x_0^2 + y_0^2)^2 + x_0(x_0^2 + y_0^2)^2 = 0.$$

D'où je tire

$$a = \frac{(x_0^2 + y_0^2)^2 \pm \sqrt{(x_0^2 + y_0^2)^4 - 4x_0^2 y_0^2 (x_0^2 + y_0^2)^2}}{2x_0 y_0^2}$$

ou $$a = \frac{(x_0^2 + y_0^2)^2 \pm (x_0^4 - y_0^4)}{2x_0 y_0^2}.$$

Si nous prenons le signe +, on a

$$a = \frac{2x_0^4 + 2x_0^2 y_0^2}{2x_0 y_0^2} = \frac{x_0(x_0^2 + y_0^2)}{y_0^2}.$$

Cette condition veut dire que le point en ce cas est sur la cissoïde. Nous traiterons ce cas tout à l'heure.

Si nous prenons le signe —, on trouve

$$a = \frac{2x_0^2 y_0^2 + 2y_0^4}{2x_0 y_0^2}$$

ou $$x_0^2 + y_0^2 = ax_0.$$

C'est le cercle décrit sur OA comme diamètre. Je dis que pour tout point pris sur le cercle $x_0^2 + y_0^2 - ax_0 = 0$ le lieu des centres des cercles C_m se décompose en une droite et une hyperbole.

En effet, je pose $y_0 = tx_0$.

J'ai $$x_0 = \frac{a}{1 + t^2}, \qquad y_0 = \frac{at}{1 + t^2}.$$

Donc $$x_0 - a = -\frac{at^2}{1 + t^2}$$

et $$x_0^2 + y_0^2 = \frac{a^2}{(1 + t^2)^2}(1 + t^2) = \frac{a^2}{1 + t^2}.$$

L'équation de la courbe devient

$$\left(\frac{a^2}{1 + t^2} - \frac{t}{1 + t^2}\, y\right)(4y^2 + a^2) = 2x\left[\frac{a^3}{1 + t^2} - \frac{4at^2}{1 + t^2}\, y^2\right]$$

ou $$(a - 2ty)(4y^2 + a^2) = 2x(a^2 - 4t^2a^2)$$

ce qui met en évidence la droite $y = \frac{a}{2t}$.

Reste l'hyperbole $4y^2 + a^2 = 2x(a + 2ty)$.

Elle admet pour asymptote la droite $yx = -\frac{a}{2t}$.

La conique lieu du point M se décompose aussi en deux droites. Remplaçons en effet x_0 et y_0 par leurs valeurs dans l'équation de cette conique et l'on a,

$$3\left(\frac{a^2}{1+t^2} + 3\frac{a^2}{1+t^2}\right)x^2 - \frac{4a^2t^2}{1+t^2}y^2 + \frac{2a^2t}{1+t^2}xy$$
$$= \frac{3a^3}{1+t^2}x + \frac{2a^3t}{1+t^2}y$$

ou $$12x^2 - 4t^2y^2 + 2txy = 3ax + 2aty$$

ou $$3x(x - a) + 2ty(x - a) = 4t^2y^2 - 9x^2$$

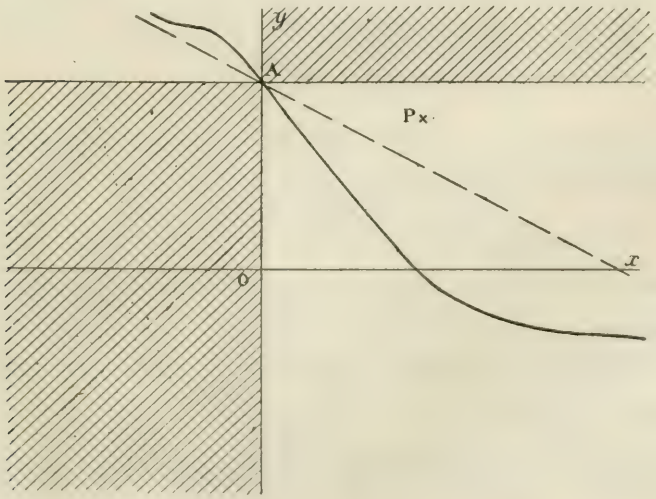
ou $$(x - a)(3x + 2ty) = 4t^2y^2 - 9x^2.$$

On voit d'abord la droite $3x + 2ty = 0$

puis la droite $$x - a = 2ty - 9x$$

ou $$10x - 2ty - a = 0.$$

Deuxième cas. — $x_0(a - x_0) < 0$. — Les asymptotes parallèles à Ox sont imaginaires



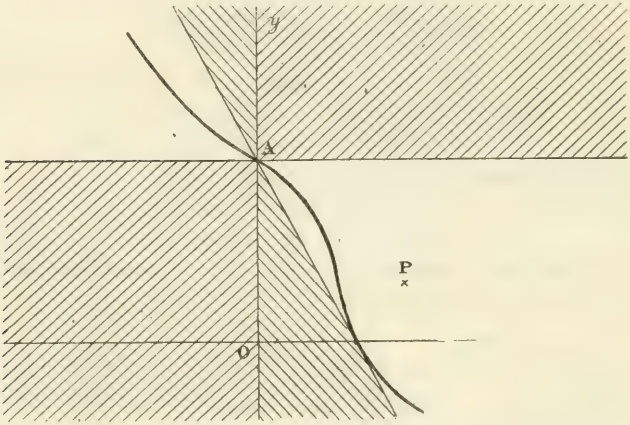
Troisième cas. — Supposons que le point P soit pris sur Oy, alors $x_0 = 0$, l'équation de la courbe devient

$$y_0 (y_0 - 2y)(4y^2 + a^2) + 8axy^2 = 0.$$

La droite $y = 0$ est une asymptote double. La troisième asymptote a pour équation

$$y = \frac{a}{y_0} x + \frac{y_0}{2}.$$

La droite $y = \frac{y_0}{2}$ et la droite $x = 0$ séparent toujours le plan en régions, et l'on obtient la forme de courbe suivante :



Quatrième cas. — Supposons enfin que $x = a_0$. L'équation de la courbe correspondant à cette hypothèse est

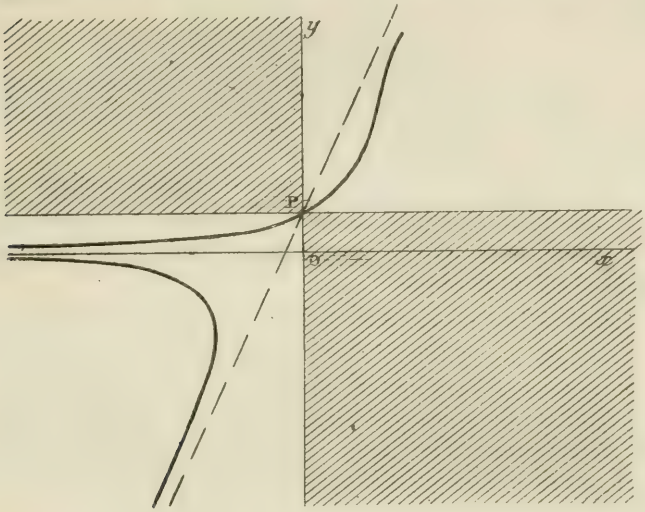
$$(a^2 + y_0^2 - 2y_0 y)(4y^2 + a^2) = 2a^3 x.$$

Il n'y a pas d'asymptotes rectilignes dans cette courbe puisque les trois droites $y = \frac{a^2 + y_0^2}{2y_0}$ et $y = \pm \frac{a}{2} t$ sont parallèles.

D'ailleurs la courbe coupe Ox en un seul point $x = \frac{a^2 + y_0^2}{2a}$.

L'équation peut d'ailleurs s'écrire $4y^2(a^2 + y_0^2 - 2y_0 y) = a^2(2ax + 2y_0 y - a^2 - y_0^2)$, ce qui donne une nouvelle

séparation en régions. La droite $2ax + 2y_0y - a^2 - y_0^2 = 0$ est tangente à la courbe au point où elle coupe Ox.



Nous allons maintenant considérer le cas particulier où le point fixe est sur la cissoïde. On a la relation $(x_0^2 + y_0^2)x_0 = ay_0^2$; si l'on pose $y_0 = tx_0$, j'en déduis

$$x_0 = \frac{at^2}{1+t^2}, \quad x_0 - a = -\frac{a}{1+t^2}, \quad x_0^2 + y_0^2 = \frac{a^2t^4}{1+t^2}.$$

L'équation de la courbe devient

$$\left(\frac{a^2t^4}{1+t^2} - \frac{2at^3}{1+t^2}\,y\right)(4y^2 + a^2) = 2x\left(\frac{a^3t^2}{1+t^2} + \frac{4a}{1+t^2}y^2\right)$$

ou $\qquad t^3(at - 2y)(4y^2 + a^2) = 2x(a^2t^2 - 4y^2),$

ce qui donne la droite $\qquad at = 2y$

et l'hyperbole $\qquad t^3(4y^2 + a^2) = 2x(at + 2y).$

L'équation du lieu du point N se décompose, lui aussi, en deux droites, comme on peut le voir par le calcul suivant :

$$3\left(\frac{a^2t^4}{1+t^2} + \frac{3a^2t^2}{1+t^2}\right)x^2 - \frac{4a^2}{1+t^2}\,y^2 + \frac{2a^2t^3}{1+t^2}\,xy$$
$$= \frac{3a^3t^4}{1+t^2}\,x + \frac{2a^3t^3}{1+t^2}\,y$$

ou $$3t^2(t^2+3)x^2-4y^2+2t^3xy=3at^4x+2at^4y$$
ou $$3t^4x(x-a)+2t^3y(x-a)=4y^2-9t^2x^2$$
ou $$t^3(x-a)(2y+3tx)=4y^2-9t^2x^2$$
ce qui donne : 1° la droite $2y+3tx=0$,
2° la droite $t^3(x-a)=2y-3tx$.

Pour que le cercle C passe par un point donné P (x_0y_0), il faut que les coordonnées $x'y'$ du point M satisfassent à l'équation de la conique

$$3(x_0^2+y_0^2+3ax_0)x^2+4a(x_0-a)y^2+2ay_0xy$$
$$=3a(x_0^2+y_0^2)x+2a^2y_0y.$$

De même, pour que C passe par le point p, le point $x'y'$ doit être sur la conique

$$3(x_1^2+y_1^2+3ax_1)x^2+4a(x_1-a)y_1^2+2ay_1xy$$
$$=3a(x_1^2+y_1^2)x+2a^2y_1y.$$

Ces deux coniques ont un premier point commun à l'origine. Mais la tangente à l'origine est une tangente singulière. Généralement les deux coniques se coupent en trois autres points différents de l'origine. Donc généralement il y aura trois cercles passant par les points P et p.

Pour qu'il y en ait une infinité, il suffit de prendre les points P et p sur la cissoïde ou sur le cercle décrit sur OA comme diamètre, A étant le pied de l'asymptote, et de faire coïncider deux des quatre droites qui forment le lieu du point M.

Quand le point P est sur le cercle, on a pour lieu du point M les droites $$3xx_0+2yy_0=0 \qquad (1)$$
et pour Q $$3xx_1+2yy_1=0 \qquad (2)$$
et $$10xx_0-2yy_0-ax_0=0 \qquad (3)$$
pour Q $$10xx_1-2yy_1-ax_1=0 \qquad (4)$$

Quand le point P est sur la cissoïde, on a les droites
$$3xy_0+2x_0y=0 \qquad (5)$$
$$3xy_1+2x_1y=0 \qquad (6)$$
$$y_0(y_0^2+3x_0^2)x-2x_0^3y-ay_0^3=0 \qquad (7)$$
et $$y_1(y_1^2+3x_1^2)x-2x_1^3y-ay_1^4=0 \qquad (8)$$

En identifiant (1) et (2) on voit que l'un des points doit être à l'origine et l'autre sur le cercle.

En identifiant (3) et (4), on trouve le même résultat.

De même en identifiant (5) et (6), (7) et (8).

En identifiant (1) et (4) on retrouve encore le même résultat.

Mais si l'on identifie (1) et (6), on trouve

$$\frac{x_0}{y_1} = \frac{y_0}{x_1} = t \quad \text{avec} \quad x_0^2 + y_0^2 = ax_0$$

et $$(x_1^2 + y_1^2)x_1 = ay_1^2.$$

J'en tire $x_0 = ty_1$ et $y_0 = tx_1$; donc $t(x_1^2 + y_1^2) = ay_1$. Je remplace $x_1^2 + y_1^2$ par sa valeur dans l'équation de la cissoïde $$x_1 \frac{ay_1}{t} = ay_1^2, \text{ ou}$$

1° $y_1 = 0$, donc $x_0 = 0$ et par suite $y_0 = 0$: nous retombons dans le premier cas;

2° $x_1 = ty_1 = y_0$ et $y_0 y_1 = x_1^2$.

Ainsi l'un des points est sur le cercle, l'autre sur la cissoïde, tous deux sur la même verticale, et le produit des ordonnées est égal au carré de l'abcisse commune

$$x_0 = x_1 = \frac{a}{t^2 + 1}, \quad y_0 = \frac{a}{t^2 + 1} t, \quad y_1 = \frac{a}{t^2 + 1} \frac{1}{t}.$$

Et ainsi de suite.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE 1883

Examens oraux (Suite).

---

13. — *Équation générale des quadriques dont un axe* Δ *est donné de position; établir,* a priori, *que la condition proposée est quadruple.*

Prenons le cas des surfaces à centre et considérons l'équation $$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 = F$$ de la quadrique rapportée à son centre et à ses axes; transportons les axes parallèlement à eux-mêmes en un point arbitraire de l'axe oz, oz étant la droite donnée Δ. Nous obtenons l'équation

$$Ax^2 + A'y^2 + A''(z - \lambda)^2 = F.$$

Enfin, dans le plan des xy faisons tourner les axes d'un angle arbitraire φ ; des formules connues donnent le résultat final

$$A(X\cos\varphi - Y\sin\varphi)^2 + A'(X\sin\varphi + Y\cos\varphi)^2 + A''(Z-\lambda)^2 = F.$$

Cette question renferme cinq paramètres variables $\frac{A}{F}$, $\frac{A'}{F}$, $\frac{A''}{F}$, λ et φ. La condition proposée est, en effet, une condition quadruple, et on le reconnaît *a priori*, en exprimant : 1° que le centre est sur Δ (deux conditions) ; 2° que la direction de Δ est une direction principale (deux conditions aussi).

On traitera de la même façon le cas des paraboloïdes.

14. — *Lieu des points de la surface* $xy = z$ *par où passent deux génératrices faisant un angle de* 60°.

En exprimant que le cosinus de l'angle des deux droites

$$x = \lambda \qquad y = \mu$$
$$y = \frac{z}{\lambda}, \qquad x = \frac{z}{\mu},$$

est égal à $\frac{1}{2}$, on trouve que le lieu est la quartique gauche intersection du paraboloïde proposé et de l'hyperboloïde de révolution à deux nappes

$$3z^2 - x^2 - y^2 = 1.$$

15. — *On donne une droite* Δ

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}$$

et par le point P, $x_0y_0z_0$, *on mène une droite* Δ' *perpendiculaire à* Δ. *Ces deux droites* Δ *et* Δ' *forment un système d'axes rectangulaires, dans le plan desquels on considère une courbe* U *ayant pour équation* $f(X, Y) = 0$; (1)
trouver l'équation de la surface de révolution engendrée par U, *tournant autour de* Δ.

On peut résoudre cette question par une voie simple, en observant que le plan mené par P, perpendiculairement à Δ, a pour équation

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0.$$

La distance Y d'un point n de U à ce plan est

$$Y = \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0). \qquad (2)$$

D'autre part, la distance X de ce même point M à Δ est donnée par la formule

$$X^2 = [\beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0)]^2 + [\gamma(y - y_0) - \beta(z - z_0)]^2 + [\alpha(z - z_0) - \gamma(x - x_0)]^2. \qquad (3)$$

Lorsque U tourne autour de Δ, X et Y conservent la même valeur et les coordonnées x, y, z du point M vérifient constamment les relations (2) et (3). En tenant compte de l'égalité (1) on a, finalement, l'équation demandée

$$f\left\{\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0), \sqrt{[\beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0)]^2 + \ldots}\right\} = 0.$$

RECTIFICATION

DE LA NOTE SUR LA FORMULE DE TAYLOR

Insérée dans le n° 4 de 1883, p. 83.

La formule attribuée à M. Schlömilch par M. Parpaite est due à Édouard Roche, professeur de mathématiques à la Faculté des sciences de Montpellier, qui a donné dans le numéro de juillet 1858 du *Journal de Liouville* cette forme simple et devenue classique du reste de la série de Taylor, renfermant comme cas particuliers les formes de Lagrange et de Cauchy

$$R = \frac{h^{n+1}(1 - \theta)^{n-p}}{1 \cdot 2 \ldots n \cdot (p + 1)} f^{n+1}(a + \theta h).$$

Dans le numéro d'avril 1864 du *Journal de Liouville*, Édouard Roche a donné une formule bien plus générale :

$$\frac{f(a + h) - f(a) - hf'(a) \ldots - \dfrac{h^n}{1 \cdot 2 \ldots n} f^n(a)}{\varphi(a + h) - \varphi(a) - h\varphi'(a) \ldots - \dfrac{h^q}{1 \cdot 2 \ldots q} \varphi^q(a)} = \frac{1 \cdot 2 \ldots q}{1 \cdot 2 \ldots n}(h - \theta h)^{n-q} \frac{f^{n+1}(a + \theta h)}{\varphi^{q+1}(a + \theta h)}$$

qui en renferme une infinité d'autres et notamment celle que M. Schlömilch en novembre 1858 avait fait connaître en France, où on ne la connaissait pas avant.

(Extrait d'une lettre de M. A. Roche, professeur au lycée de Montpellier.)

QUESTIONS PROPOSÉES

72. — On considère deux droites rectangulaires Ox et Oy, et un cercle C, tangent à l'une et à l'autre de ces droites, aux points A et B ; par O, on mène une transversale mobile qui rencontre C aux points M et N ; — 1° par les quatre points A, B, M, N, on fait passer une hyperbole équilatère H. Les tangentes à H aux points M et N se coupent en un point I. Trouver le lieu de ce point quand MN tourne autour du point O. Ce lieu est une circonférence ; — 2° on joint AM et BN ; ces droites se coupent en un point I' : trouver le lieu de ce point I' : ce lieu est une hyperbole, dont on demande l'équation lorsqu'elle est rapportée à son centre et à ses axes ; — 3° par les points A, B, M, N, on fait passer une parabole P ; démontrer que par un point du plan passent deux paraboles P, et trouver avec un seul paramètre variable l'équation générale et rationnelle des paraboles P — 4° trouver le lieu décrit par l'intersection de P avec le diamètre de cette courbe qui passe par le point O. Ce lieu est une hyperbole homothétique de celle qui a été trouvée tout à l'heure, on construira les asymptotes de ces courbes.

(G. L.)

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS — 18546-3.

SUR UNE

NOUVELLE ESPÈCE DE FRACTIONS CONTINUES

Par M. **G. de Longchamps,**

(*Suite*, voir page 193.)

V. — Nouvelle forme de l'intégrale U_n. — Nous donnerons maintenant l'intégrale U_n sous une forme nouvelle et qui nous semble réaliser un progrès sensible sur celle qu'a donnée Lagrange.

Nous touchons ici à un point important et sur lequel nous devons insister un peu.

Le théorème de Lagrange offre, en effet, deux inconvénients évidents :

1° Il exige la résolution de l'équation génératrice et cette résolution est, généralement, impossible ;

2° Quand elle est possible, le théorème de Lagrange donne, ordinairement, l'intégrale U_n sous une forme algébrique compliquée d'expressions irrationnelles. Or, la fonction U_n, si l'on se reporte à sa définition même, est une forme entière des coefficients donnés $A_1, A_2, \ldots A_i$, et des constantes initiales $U_0, U_1, \ldots U_{i-1}$.

Nous allons montrer, et c'est là ce qui constitue le progrès que nous voulions signaler, que l'on peut trouver U_n sans qu'il soit nécessaire de résoudre l'équation génératrice.

Reprenons l'équation de récurrence

$$U_n + A_1 U_{n-1} + \ldots + A_i U_{n-i} = 0. \qquad (A)$$

Effectuons un changement de fonctions et posons

$$U_n = V_n + \alpha^n ;$$

l'équation (A) donne la suivante :

$$V_n + A_1 V_{n-1} + \ldots + A_i V_{n-i} + \rho = 0,$$

en posant $\rho = \alpha^n + A_1 \alpha^{n-1} + \ldots + A_i \alpha^{n-i}$.

Disposons maintenant de l'indéterminée α de façon qu'elle soit une des racines de l'équation

$$\alpha^i + A_1 \alpha^{i-1} + \ldots + A_i = 0.$$

Les fonctions V vérifient alors la relation de récurrence

$$V_n + A_1 V_{n-1} + \ldots + A_i V_{n-i} = 0,$$

et cette relation ne diffère de celle qui détermine les fonctions U que par le simple changement des lettres U et V. On doit seulement observer que les constantes initiales sont modifiées, les nouvelles constantes V_0, V_1, ... V_{i-1}, étant liées aux anciennes par les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} U_0 &= V_0 + 1 \\ U_1 &= V_1 + \alpha \\ &\ldots\ldots \\ U_{i-1} &= V_{i-1} + \alpha^{i-1}. \end{aligned}$$

Si nous imaginons le calcul que l'on peut faire, de proche en proche, des fonctions U_i, U_{i+1}, ... U_n, nous reconnaissons qu'elles sont, sans exception, des formes algébriques linéaires et homogènes, par rapport aux constantes initiales U_0, U_1, ... U_{i-1}. Nous pouvons, d'après cette remarque, poser

$$U_n = p_0 U_{i-1} + p_1 U_{i-2} + \ldots + p_{i-1} U_0 ; \qquad (1)$$

p_0, p_1, ... p_{i-1} étant des fonctions de n et des coefficients donnés A_1, A_2, ... A_i, mais ne dépendant pas des constantes initiales.

Puisque la loi de récurrence est la même pour les fonctions U et V, on a donc aussi

$$V_n = p_0 V_{i-1} + p_1 V_{i-2} + \ldots p_{i-1} V_0. \qquad (2)$$

Les égalités (1) et (2) donnent la relation suivante :

$$U - V_n = p_0(U_{i-1} - V_{i-1}) + \ldots + p_{i-1}(U_0 - V_0),$$

ou,

$$\alpha^n = p_0 \alpha^{i-1} + p_1 \alpha^{i-2} + \ldots + p_{i-1}.$$

Désignons maintenant par α_1, α_2, ... α_i, les i racines, supposées distinctes, de l'équation génératrice ; nous obtenons les relations

$$\begin{aligned} \alpha_1^n &= p_0 \alpha_1^{i-1} + p_1 \alpha_1^{i-2} + \ldots + p_{i-1} \\ \alpha_2^n &= p_0 \alpha_2^{i-1} + p_1 \alpha_2^{i-2} + \ldots + p_{i-1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_i^n &= p_0 \alpha_i^{i-1} + p_1 \alpha_i^{i-2} + \ldots + p_{i-1}. \end{aligned}$$

Ces équations déterminent p_0, p_1, ... p_{i-1} ; le déterminant des inconnues est un déterminant de Vandermonde :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^{i-1}, & \alpha_1^{i-2}, & \dots & 1 \\ \alpha_2^{i-1}, & \alpha_2^{i-2}, & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_i^{i-1}, & \alpha_i^{i-2}, & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

et l'on sait que ce déterminant est différent de zéro, si, comme nous l'avons supposé, les racines $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_i$, de l'équation génératrice sont distinctes. On doit aussi remarquer que les inconnues $p_0, p_1, \dots p_{i-1}$ sont des *fonctions symétriques* des racines $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_i$ et, par conséquent, des *fonctions rationnelles et connues des coefficients de l'équation génératrice.*

Il n'est donc pas nécessaire de résoudre l'équation génératrice, pour obtenir la fonction U_n — et celle-ci peut toujours se déterminer. C'est là le point que nous voulions mettre en lumière.

VI. — Expression de U_n. — La fonction U_n peut aussi se calculer au moyen d'une formule que nous allons faire connaître et qui a l'avantage de n'exiger que la connaissance de la fonction qui donne la somme des puissances n des racines d'une équation donnée.

L'équation proposée étant

$$U_n + A_1 U_{n-1} + \dots + A_i U_{n-i} = 0,$$

l'équation génératrice est

$$z^i + A_1 z^{i-1} + \dots + A_i = 0,$$

et l'intégrale U_n est, d'après le théorème de Lagrange,

$$U_n = \rho_1 z_1^n + \rho_2 z_2^n + \dots + \rho_i z_i^n \qquad \text{(B)}$$

$\rho_1, \rho_2, \dots \rho_i$ étant des constantes arbitraires, $z_1, z_2, \dots z_i$ désignant les i racines, réelles ou imaginaires, de l'équation génératrice.

Posons : $S_n = z_1^n + z_2^n + \dots + z_i^n$;

nous aurons alors

$$S_{n+1} = z_1^n \cdot z_1 + z_2^n \cdot z_2 + \dots + z_i^n \cdot z_i$$
$$S_{n+2} = z_1^n \cdot z_1^2 + z_2^n \cdot z_2^2 + \dots + z_i^n \cdot z_i^2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$S_{n+i-1} = z_1^n \cdot z_1^{i-1} + z_2^n . z_2^{i-1} + \dots + z_i^n \cdot z_i^{i-1}.$$

De ces égalités, et de la relation (B), nous déduisons, en éliminant $z_1^n, z_2^n, \dots z_i^n$:

$$\begin{vmatrix} U_n & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_i \\ S_n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ S_{n+1} & z_1 & z_2 & \dots & z_i \\ S_{n+2} & z_1^2 & z_2^2 & \dots & z_i^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n+i-1} & z_1^{i-1} & z_2^{i-1} & \dots & z_i^{i-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette formule permet encore de reconnaître que U_n est une fonction symétrique des racines $z_1, z_2, \dots z_i$ et, quand on fait varier n, on voit qu'il suffit de connaître S_n pour avoir U_n.

Cette fonction S_n est, d'ailleurs, donnée par une formule bien connue, due à *Waring* (*), et qui peut s'écrire

$$S_n = \sum (-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda^m} n(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_i-1) \frac{A^{\lambda_1} A_2^{\lambda_2} \cdots A_i^{\lambda_i}}{\lambda_1!\,\lambda_2!\dots\lambda_i!},$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières, nulles et positives des exposants $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_i$ qui vérifient la relation : $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + i\lambda_i = n.$ (λ)

Mais cette formule de Waring présente l'inconvénient grave d'exiger la résolution, en nombres entiers et positifs, de l'équation (λ), et l'intégrale U_n se calcule, plus commodément, en suivant la Méthode que nous avons exposée, au paragraphe précédent. On évite ainsi l'exposition du théorème de Lagrange et, pour mieux montrer l'avantage de notre méthode, nous allons l'appliquer au cas qui se présente le plus ordinairement, nous voulons parler du cas simple où la récurrence des fonctions U_n correspond à la formule $\alpha U_n + \beta U_{n-1} + \gamma U_{n-2} = 0.$

(A suivre.)

(*) Serret. *Alg., sup.*, t. I, p. 449.

SUR LE VOLUME DU TÉTRAÈDRE

EN GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Par M. **Édouard Lucas.**

On donne habituellement dans les cours une démonstration assez compliquée de l'expression analytique du volume du tétraèdre lorsque l'on connaît les coordonnées de ses sommets. Voici comment il est facile d'obtenir directement cette expression en coordonnées rectangulaires, obliques ou tétraédriques, sans passer par la formule qui donne la distance d'un point à un plan.

Désignons par x_i, y_i, z_i, les coordonnées rectangulaires ou obliques d'un point P_i, par Δ le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

par Δ_1 et Δ_1' les résultats obtenus en remplaçant dans Δ les coordonnées x, y, z par celles des deux points P_1 et P'_1.

D'après le sixième livre de géométrie élémentaire, on sait que le volume de deux tétraèdres ($P_1P_2P_3P_4$ et $P'_1P_2P_3P_4$) de même base sont dans le rapport des hauteurs; mais les distances de P_1 et de P'_1 au plan passant par P_2, P_3, P_4, sont dans le rapport de Δ_1 à Δ'_1; on a donc

$$\frac{\text{vol. } (P_1P_2P_3P_4)}{\text{vol. } (P'_1P_2P_3P_4)} = \frac{\Delta_1}{\Delta'_1}.$$

D'après le principe des signes des distances à un plan, on doit prendre les volumes des tétraèdres dont les sommets ont un ordre donné avec les mêmes signes ou avec les signes contraires, suivant que des points P_1 et P'_1 on aperçoit le *sens de circulation* de $P_2P_3P_4$ de la même manière ou de manières différentes; ainsi l'expression analytique du volume d'un tétraèdre changera de signe lorsque l'on échangera l'ordre de deux sommets. On a donc cette proposition :

Les volumes de deux tétraèdres ayant trois sommets communs sont dans le rapport des déterminants des douze coordonnées de leurs sommets.

Plus généralement, considérons deux tétraèdres quelconques ABCD et PQRS ; par convention, nous prendrons les volumes de ces tétraèdres avec les mêmes signes ou avec les signes contraires, suivant que des points P et S on aperçoit le sens de circulation de ABC et de PQR dans le même sens de rotation ou dans des sens contraires. Comparons successivement les volumes des tétraèdres

ABCD, ABCS, ABRS, AQRS, PQRS;

deux tétraèdres consécutifs ont trois sommets communs; donc, en multipliant membre à membre les égalités obtenues par l'application de la proposition précédente, on en déduit ce théorème :

Les volumes de deux tétraèdres quelconques sont dans le rapport des déterminants des douze coordonnées de leurs sommets.

Si l'on prend pour l'un des tétraèdres celui qui a pour sommets l'origine O des coordonnées et les extrémités X, Y, Z, de longueurs égales à l'unité sur chacun des axes, on sait que l'on a

$$\mathrm{XYZO} = \frac{1}{6} \sin(x, y, z);$$

mais le déterminant des coordonnées devient

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

d'où l'on déduit

$$\mathrm{vol}\ (\mathrm{P_1P_2P_3P_4}) = \frac{1}{6} \Delta_1 \sin(x, y, z).$$

De même si x_i, y_i, z_i, t_i, sont les distances d'un point P aux quatre faces du tétraèdre de référence; h_1, h_2, h_3, h_4, les hauteurs du tetraèdre, on a

$$\mathrm{vol}\ (\mathrm{P_1\ P_2\ P_3\ P_4}) = \frac{1}{6} \frac{\Delta_1}{h_1h_2h_3h_4} \mathrm{vol}\ (\mathrm{ABCD})$$

Exercices à démontrer sur le volume du tétraèdre.

I. — Si par les sommets d'un tétraèdre on mène des parallèles à une droite donnée, elles rencontrent les faces en quatre points qui forment un tétraèdre de volume constant, quelle que soit la direction de la droite donnée.

II. — Si par les centres de quatre cercles d'un plan on élève perpendiculairement au plan des droites de longueurs respectivement proportionnelles aux puissances d'un point donné du plan par rapport aux quatre cercles, le volume du tétraèdre formé par les extrémités de ces perpendiculaires est constant, quelle que soit la position du point donné.

III. — On donne deux tétraèdres ABCD et PQRS; démontrer la relation

$$\text{ABCD} \,.\, \text{PQRS} = \text{PBCD} \,.\, \text{AQRS} + \text{PCDA} \,.\, \text{BQRS} + \text{PDAB} \,.\, \text{CQRS} + \text{PABC} \,.\, \text{DQRS},$$

qui est la généralisation d'un théorème de Fontaine et de Monge. (Chasles, *Géom. supér.* p. 23.)

IV. — On considère deux polyèdres quelconques $A_1B_1C_1D_1\ldots$ et $A_2B_2C_2D_2\ldots$; soient A'_2, $B'_2,\ldots$ les points symétriques de $A_2, B_2,\ldots$ par rapport à un point quelconque P; a_1, b_1, c_1, $d_1,\ldots$ les milieux de A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, $D_1D_2,\ldots$ et a_2, $b_2,\ldots$ les milieux de $A_1A'_2$, $B_1B'_2,\ldots$; démontrer que la somme des volumes des polyèdres $a_1b_1c_1\ldots$ et $a_2b_2c_2\ldots$ est la demi-somme des volumes des polyèdres donnés, quelle que soit la position du point P.

SUR CERTAINES COURBES GAUCHES

DU QUATRIÈME ORDRE

Par M. **Bioche**, professeur au Lycée de Poitiers.

On sait que par une courbe gauche du quatrième ordre (ou quartique gauche) déterminée par l'intersection de deux surfaces du deuxième degré, il passe une infinité de surfaces de ce degré. Il existe des quartiques gauches telles que par

une de ces courbes il ne peut passer qu'une seule surface du deuxième degré. Ces courbes ont été étudiées en particulier par Steiner.

I. — On peut obtenir ces courbes en se servant d'un système de coordonnées imaginé par M. Chasles pour l'étude des courbes tracées sur des surfaces du deuxième degré à génératrices rectilignes réelles. Soient OX et OY deux génératrices de systèmes différents; par un point quelconque M de la surface passent deux génératrices :

L'une MA, de même système que OY, rencontre OX en A ;

L'autre MB, de même système que OX, rencontre OY en B.

Au point M correspondent donc deux segments OA,OB sur les génératrices fixes. Inversement, à ces segments correspond un point et un seul. Ce système de coordonnées est analogue au système de coordonnées cartésiennes dans le plan. Une équation $f(x,y) = 0$ représentera une courbe sur la surface.

Si $f(x,y)$ est de degré m par rapport à x et de degré μ par rapport à y, la courbe représentée par $f(x,y) = 0$ rencontre m fois les génératrices de système OX et μ fois les génératrices de système OY. Elle rencontre donc $m + \mu$ fois un plan tangent quelconque ; elle est de l'ordre $m + \mu$.

Pour les courbes du quatrième ordre $m + \mu = 4$; on peut prendre $m = \mu = 2$; on a alors les courbes d'intersection de deux surfaces du second degré. Si on prend l'un des nombres égal à 3, l'autre sera égal à 1 ; et on a une courbe dite de *seconde espèce*.

Par une telle courbe il ne passe qu'une surface du deuxième degré. Car si $m = 3$ par exemple, toute surface du deuxième degré qui contiendrait la courbe proposée contiendrait également toutes les génératrices du système OX qui sont des sécantes triples de la courbe.

Toute quartique intersection de deux surfaces du deuxième degré n'admet, sur la surface, que des sécantes doubles : car chaque génératrice de l'une des surfaces rencontre l'autre, et par suite la quartique, en deux points.

On sait que neuf points de l'espace pris sur une même quartique gauche de première espèce ne déterminent pas

une surface du second degré. Neuf points pris sur une courbe de deuxième espèce sont plus que suffisants pour déterminer la courbe, comme il est facile de le voir, et déterminent complètement une seule surface du deuxième degré.

II. — Les quartiques gauches de deuxième espèce peuvent s'obtenir comme intersection d'une surface du deuxième degré et d'une du troisième. Considérons sur une surface du troisième degré Σ deux droites A, B qui ne se rencontrent pas. Par ces droites je fais passer un hyperboloïde H ; H et Σ se couperont suivant les droites A, B et une courbe gauche du quatrième ordre C ; toute génératrice de H appartenant au système A, B rencontrera Σ et par suite C en trois points. Ces génératrices forment donc un système de sécantes triples. Les génératrices du système différent ne rencontrent C qu'en un point.

On peut en particulier prendre pour surface Σ un cône ayant pour génératrice double une génératrice de l'hyperboloïde H.

III. — Les quartiques de deuxième espèce sont unicursales. Car, si on fait passer un plan par une sécante triple, il ne rencontre plus la courbe qu'en un seul point, dont les coordonnées s'exprimeront par suite rationnellement en fonction d'un paramètre.

Si on projette la courbe sur un plan en plaçant le centre de projection sur une sécante triple, on obtient une quartique plane à point triple. Sur les autres rayons projetants il n'y a qu'un seul point de la courbe, ce qui montre autrement qu'elle est unicursale.

Voir CHASLES, *Rapport sur les progrès de la géométrie*, p. 250 ; CREMONA, *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. LIII, SALMON, *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, t. V ; STEINER, *Journal de Crelle*, t. LIII.

AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES

CONCOURS DE 1883

Mathématiques élémentaires.

Trouver la hauteur AB et les bases AD, BC d'un trapèze rectangle ABCD, connaissant la longueur l du côté oblique CD, l'aire a^2 du trapèze, et le volume $\frac{3}{4}\pi b^3$ engendré par la révolution de la figure autour de CD.

Discuter des formules trouvées, et déterminer le minimum de b^3. On examinera les cas particuliers suivants :

$$l = a; \quad l = 3a.$$

Mathématiques spéciales.

D'un point donné P on mène des normales à un ellipsoïde donné.

1° Démontrer que par les pieds de ses six normales, on peut faire passer une infinité de surfaces du second ordre S concentriques à l'ellipsoïde ;

2° Trouver le lieu que doit décrire le point P pour que les surfaces S soient de révolution ;

3° Déterminer le cône lieu des axes de révolution des surfaces S ;

4° Sur la section de ce cône par un plan perpendiculaire à l'axe mineur de l'ellipsoïde, indiquer les points par lesquels passe l'axe de révolution quand la surface S est un ellipsoïde, un hyperboloïde à une ou à deux nappes, un cône, un cylindre, ou un système de deux plans parallèles.

Composition sur le programme de licence.

Théorie. — On donne un corps quelconque, dont les diverses parties sont douées d'un pouvoir attractif suivant la loi de Newton, et on admet, comme préalablement démontré, que les composantes de l'attraction exercée sur un point M,

ayant pour coordonnées x, y, z, sont représentées, à un facteur constant près, par les dérivées $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dV}{dz}$ du potentiel V, relatif au point M. Prouver qu'on a toujours

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = -4\pi\varepsilon,$$

ε étant la densité de la masse attirante au point de cette masse qui coïncide avec le point M.

Démontrer que toute fonction U qui, mise à la place de V dans l'équation précédente, satisfait à cette équation, ne diffère pas du potentiel V, si elle remplit en outre les conditions suivantes : 1° la fonction U est continue ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre; 2° les produits

$$Ux,\ Uy,\ Uz,\quad x^2\frac{dU}{dx},\ y^2\frac{dU}{dy},\ z^2\frac{dU}{dz}$$

restent finis quand une ou plusieurs des variables x, y, z deviennent infinies, la masse attirante étant limitée.

Application. — Étant donné un ellipsoïde E, on sait qu'en chaque point de l'espace se coupent trois surfaces du second degré homofocales à E; désignons par λ, μ, ν, les demi-axes de ces surfaces parallèles au grand axe de l'ellipsoïde E. On considère une masse indéfinie douée d'un pouvoir attractif suivant la loi de Newton, et dont la densité en chaque point est exprimée par une fonction de λ, μ, ν. On demande quelle doit être la forme la plus générale de cette fonction pour que les surfaces de niveau soient des ellipsoïdes homofocaux à E. Cette forme étant trouvée, calculer l'attraction de la masse sur un point quelconque.

CONCOURS D'AGRÉGATION (1883)

Solution par M. GÉRARD, professeur au collège de Cluny.

D'un point donné P *on mène des normales à un ellipsoïde donné.*

1° Démontrer que par les pieds de ces six normales on peut

faire passer une infinité de surfaces du second ordre S *concentriques à l'ellipsoïde;*

2° Trouver le lieu que doit décrire le point P *pour que les surfaces* S *soient de révolution;*

3° Déterminer le cône lieu des axes de révolution des surfaces S;

4° Sur la section de ce cône perpendiculaire à l'axe mineur de l'ellipsoïde, indiquer les points par lesquels passe l'axe de révolution quand la surface S *est un ellipsoïde, un hyperboloïde à une ou deux nappes, un cône, un cylindre ou un système de deux plans parallèles.*

I. — Soient X, Y, Z, les coordonnées du point P;

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0, \qquad (1)$$

l'équation de l'ellipsoïde.

Les coordonnées du pied d'une quelconque des normales doivent satisfaire aux relations

$$\frac{X-x}{x}a^2=\frac{Y-y}{y}b^2=\frac{Z-z}{z}c^2,$$

qui peuvent s'écrire

$$\left.\begin{array}{l}(b^2-c^2)yz+c^2Zy-b^2Yz=0\\(c^2-a^2)zx+a^2Xz-c^2Zx=0\\(a^2-b^2)xy+b^2Yx-a^2Xy=0\end{array}\right\} \qquad (2)$$

Multiplions ces équations respectivement par a^2X, b^2Y, c^2Z. nous obtenons le résultat suivant:

$$a^2(b^2-c^2)Xyz+b^2(c^2-a^2)Yzx+c^2(a^2-b^2)Zxz=0; \quad (3)$$

c'est l'équation d'un cône qui passe par les axes de l'ellipsoïde et par les six droites joignant le centre de cette surface aux pieds des normales. Ce résultat est bien connu et le cône que nous venons d'obtenir est, comme on le sait, celui qui a avec le cône de Chasles une génératrice commune et qui donne, par son intersection avec celui-ci, la cubique gauche aux pieds des normales issues du point P.

II. — D'après cela, l'équation générale des surfaces S est de la forme

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2\lambda Byz+2\lambda B'zx+2\lambda B''xy-1=0; \quad (3\ bis)$$

en posant
$$\left.\begin{aligned} A = \frac{1}{a^2},\quad A' = \frac{1}{b^2},\quad A'' = \frac{1}{c^2} \\ B = a^2(b^2 - c^2)X \\ B' = b^2(c^2 - a^2)Y \\ B'' = c^2(a^2 - b^2)Z \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Si aucun des coefficients B n'est nul, la condition pour qu'une des surfaces S soit de révolution est

$$A - \lambda\,\frac{B'B''}{B} = A' - \lambda\,\frac{B''B}{B'} = A'' - \lambda\,\frac{BB'}{B''},$$

d'où on tire

$$\lambda = \frac{(A - A')BB'}{B''(B'^2 - B^2)} = \frac{(A' - A'')B'B''}{B(B''^2 - B'^2)}$$

et par suite

$$(A' - A'')B'^2B''^2 + (A'' - A)B''^2B^2 + (A - A')B^2B'^2 = 0. \quad (5)$$

En remplaçant les coefficients A et B par leur valeur (4) on a l'équation du lieu du point P, savoir, après simplifications,

$$\frac{1}{a^2(b^2 - c^2)X^2} + \frac{1}{b^2(c^2 - a^2)Y^2} + \frac{1}{c^2(a^2 - b^2)Z^2} = 0 \quad (5\ bis)$$

C'est un cône du quatrième ordre que nous appellerons le cône V : il passe par les trois axes, et il est facile de voir que les points situés sur ces trois axes correspondent au cas où deux des coefficients des rectangles des variables sont nuls dans l'équation des surfaces S.

III. — L'équation des surfaces S étant mise sous la forme (3 *bis*) on sait que les équations de l'axe de révolution sont

$$\frac{x}{B'B''} = \frac{y}{B''B} = \frac{z}{BB'}; \qquad (6)$$

portant dans l'équation (5), on a pour le lieu des axes de révolution

$$\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)y^2 + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)z^2 = 0.$$

C'est un cône que nous appellerons le cône W. [(7)

IV. — La section du cône W par le plan

$$z = 1$$

a pour équation

$$\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)y^2 - \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)x^2 = \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right). \quad (8)$$

Si nous supposons $a > b > c$,
ce sont des hyperboles ayant pour axe transverse l'axe des y et pour axe imaginaire l'axe des x.

L'équation des surfaces S étant mise sous la forme (3 *bis*), on sait que la racine double de l'équation dite *équation en* S est

$$A'' - \lambda \frac{BB'}{B''} = \frac{A''(B'^2B''^2 - B^2B''^2) - (A - A')B^2B'^2}{B'^2B''^2 - B^2B''^2} = S' = S''$$

c'est-à-dire, d'après les équations (6),

$$S' = S'' = \frac{\frac{1}{c^2}(x^2 - y^2) + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)z^2}{x^2 - y^2}.$$

Comme la somme des trois racines de l'équation en S est $A + A' + A''$, la racine simple sera

$$A + A' + A'' - 2\left(A'' - \lambda \frac{BB'}{B''}\right) = S'''$$

$$\text{ou } S''' = \frac{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)(x^2 - y^2) - 2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)z^2}{x^2 - y^2}.$$

On voit que les racines de l'équation en S ne varient pas lorsque x, y, z ou encore B, B', B'', varient proportionnellement. Si donc on se reporte aux expressions (4) des coefficients B, on verra :

1° Que la surface S reste la même quand le point P prend diverses positions sur une arête du cône V;

2° Que les cônes V et W se correspondent arête à arête.

D'après les valeurs de S', S'', S''' données ci-dessus, on voit que *les lignes séparatrices* sur la section (8) faite dans le cône V seront, en faisant $z = 1$,

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{c^2}(x^2 - y^2) + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) &= 0 \\ \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)(x^2 - y^2) - 2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) &= 0 \\ x^2 - y^2 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

La première des lignes (9) rencontre la section (8) en quatre points M, M', M'', M''' dont les coordonnées sont

$$a^2x^2 = b^2y^2 = c^2;$$

La deuxième en quatre points N, N′, N″, N‴ qui ont pour coordonnées

$$x^2 = \frac{\frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}}$$

$$y^2 = \frac{\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}}.$$

Il est visible que le numérateur de ces deux fractions est toujours positif.

Si donc, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} > 0$,

les quatre points N seront réels.

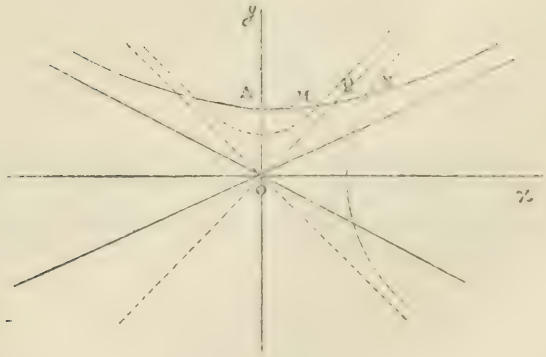
Et si $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} < 0$,

ils seront imaginaires.

Enfin la troisième des lignes (9) rencontre la section (8) en quatre points Q, Q′, Q″, Q‴, qui ont pour coordonnées

$$x^2 = y^2 = 1.$$

Fig 1



Donc

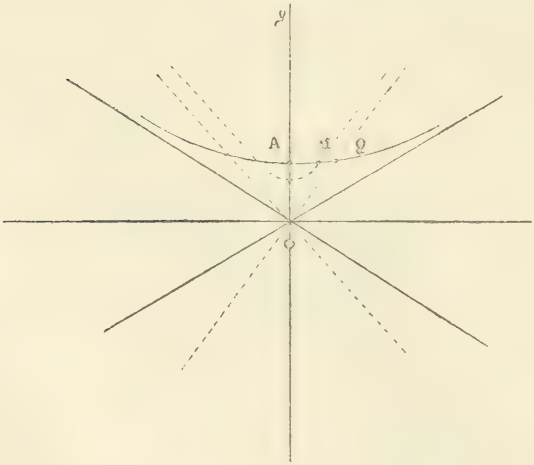
PREMIER CAS. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} > 0.$

Marquons les douze points d'intersection et le sommet A *(fig. 1)*; comme l'axe des y est réel pour la première courbe (9) et imaginaire pour la deuxième, les points se succéderont dans l'ordre A, M, Q, N.

On dressera donc le tableau suivant :

de A en M	$\begin{cases} S' > 0 \\ S''' > 0 \end{cases}$	ellipsoïde ;
en M	$S' = 0$	plans parallèles ;
de M en Q	$\begin{cases} S' < 0 \\ S''' > 0 \end{cases}$	hyperboloïde à deux nappes.
en Q	$S' = \infty$ $S'' = \infty$	cône ;
de Q en N	$\begin{cases} S' > 0 \\ S'' < 0 \end{cases}$	hyperboloïde à une nappe :
en N	$S'' = 0$	cylindre ;
de N à ∞	$\begin{cases} S' > 0 \\ S'' > 0 \end{cases}$	ellipsoïde.

Fig. 2



Deuxième cas. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0.$

Le point N passe à l'infini *(fig. 2)* ;

de A en M $\begin{cases} S' > 0 \\ S'' > 0 \end{cases}$ ellipsoïde ;

en M $S = 0$ plans parallèles

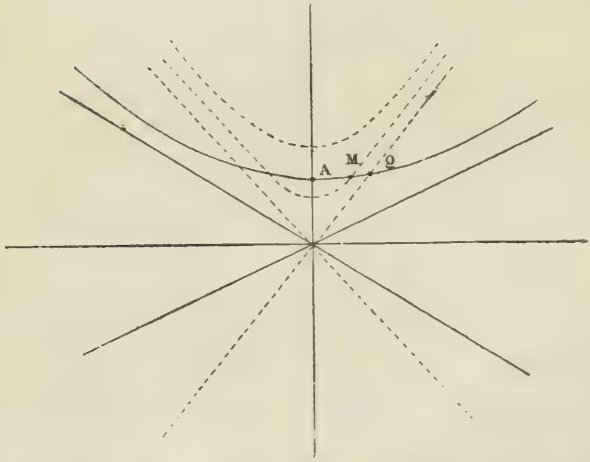
de M en Q $\begin{cases} S' < 0 \\ S'' > 0 \end{cases}$ hyperboloïde à deux nappes ;

en Q cône ;

de Q à l'infini $\begin{cases} S' > 0 \\ S'' < 0 \end{cases}$ hyperboloïde à une nappe.

TROISIÈME CAS. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} < 0.$

Fig. 3



La deuxième des courbes (9) a pour axe transverse l'axe des y et les points N deviennent imaginaires *(fig. 3)*.

On a donc absolument le même tableau que dans le cas précédent.

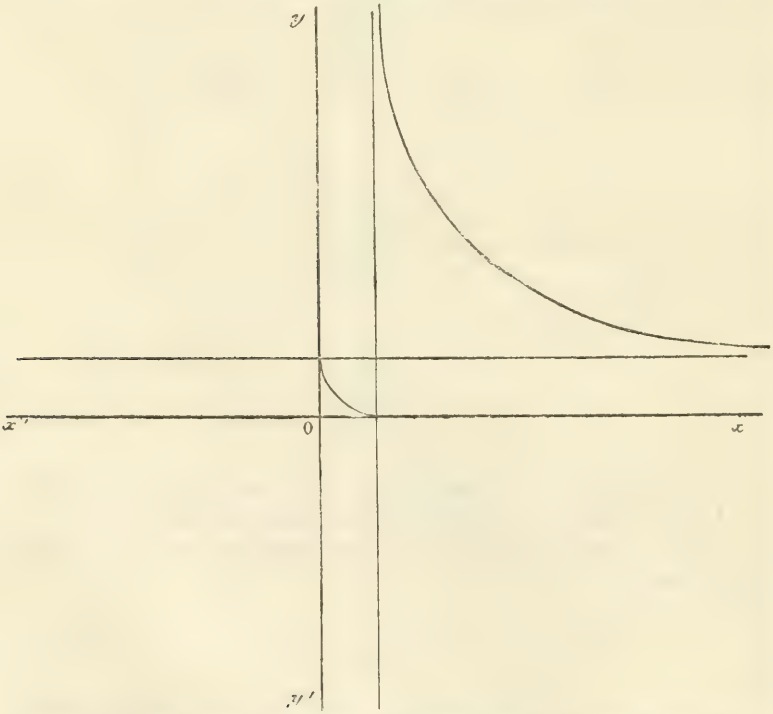
QUESTION 28

Solution par M. ALEXANDRE, élève de mathématiques spéciales au Lycée d'Angers

Construire la courbe $Lx\ Ly = K$. (Laisant.)

On a
$$Ly = \frac{K}{Lx},$$
ou
$$y = e^{\frac{K}{Lx}}$$

Dans cette fonction on ne peut faire varier x que de 0 à $+\infty$ et y est toujours positif. Mais pour la valeur 1 de x, la



fonction n'est pas continue, on devra donc faire varier x de 0 à $1 - \varepsilon$, puis de $1 + \varepsilon$ à $+\infty$.

D'ailleurs la dérivée étant toujours négative, la fonction y décroît constamment.

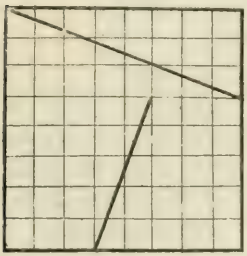
Pour $x = 0$, $y = 1$ et la tangente est Oy; x augmentant, y diminue; lorsque x est très voisin de 1, y approche beaucoup de O.

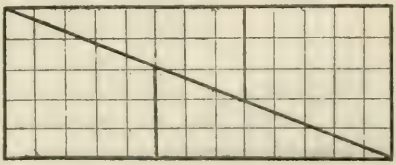
Pour une valeur de x un peu supérieure à 1, y est infini; la courbe revient de l'autre côté asymptote à $x = 1$, y diminue en même temps que x augmente. Et x augmentant indéfiniment, la courbe devient asymptote à $y = 1$.

VARIÉTÉS

UN PARADOXE GÉOMÉTRIQUE

Considérons un carré formé de 64 cases; divisons-le en deux rectangles ayant pour hauteur la hauteur du carré, et pour bases trois et cinq unités. Divisons le petit rectangle en deux parties pour une diagonale et le grand rectangle en deux trapèzes égaux. Si l'on découpe le carré en quatre





fragments, on peut les juxtaposer de manière à obtenir la figure (2); mais celle-ci contient 65 carrés, pendant que l'autre en contient 64. On aurait donc $65 = 64$. L'explication de ce paradoxe est facile. Nous avons supposé que les côtés des fragments placés le long de la diagonale du rectangle coïncidaient avec celle-ci; mais il n'en est pas ainsi, car ils laissent entre eux un espace vide équivalent à un carré. L'illusion résulte de la petite différence qui existe entre

l'inclinaison de la diagonale du rectangle des côtés 5 et 13 sur le grand côté et celle de la diagonale du rectangle des côtés 3 et 8 sur le grand côté. En effet, ces deux inclinaisons sont respectivement $\frac{5}{13}$ et $\frac{3}{8}$, dont la différence est

$$\frac{5}{13} - \frac{3}{8} = \frac{1}{104}.$$

Les nombres 5, 8, 13 appartiennent à la série

0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 . . .

que l'on obtient en ajoutant successivement deux termes consécutifs ; elle a été indiquée pour la première fois par Léonard Fibonacci de Pise, mathématicien du XIIIe siècle. Dans cette série, le carré d'un terme quelconque, diminué du produit des termes qui le comprennent, est alternativement + 1 et — 1 ; ainsi

$$8^2 - 5.13 = -1$$
$$21^2 - 13.34 = -1$$
$$55^2 - 34.89 = -1$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

On pourra donc remplacer le carré de 8 unités de côté par des carrés de 21 et 55 unités de côté, et l'on obtiendra des figures paradoxales d'approximation plus grande.

On a aussi
$$13^2 - 8.21 = +1$$
$$34^2 - 21.55 = +1$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

et l'on pourra employer des carrés de 13, 34 . . . cases de côté ; mais, afin de reproduire l'illusion précédente, il faut d'abord construire le rectangle et le découper, de telle sorte que l'intervalle vide se produise dans le carré.

Si l'on observe que cette série provient du calcul des réduites de la fraction continue la plus simple

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}$$

on peut considérer ces découpages comme une représentation géométrique de la grande approximation donnée par

les fractions continues ; il serait donc facile de construire beaucoup de figures de ce genre.

QUADRATURE DU CERCLE

On sait que, pour obtenir la longueur d'une circonférence, il faut multiplier le diamètre par un nombre fini, que l'on désigne habituellement par π, et que, pour obtenir l'aire du cercle, il faut multiplier par π le carré du rayon. Archimède a donné le premier la valeur approchée

$$\pi = \frac{22}{7}.$$

Mais on connaît depuis longtemps la valeur de π avec une très grande approximation. On a remplacé la méthode des périmètres d'Archimède et la méthode des isopérimètres de Descartes par des méthodes qui reposent sur l'emploi des séries. C'est ainsi que Leibnitz a donné la formule

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

et que Machin a donné celle-ci :

$$\frac{\pi}{4} = 4\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \,.\, 5^3} + \frac{1}{5 \,.\, 5^5} - \frac{1}{7 \,.\, 5^7} + \ldots\right]$$
$$-\left[\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \,.\, 239^3} + \frac{1}{5 \,.\, 239^5} - \ldots\right];$$

avec cette dernière formule, un géomètre anglais, M. W. Shanks, a calculé π avec *cinq cent trente* décimales.

On peut retenir facilement les trente premières décimales du nombre π au moyen du quatrain suivant :

Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages ;
Immortel Archimède, artiste ingénieur,
Qui de ton jugement peut priser la valeur?
Pour moi ton problème eut de pareils avantages.

Si l'on écrit successivement le nombre de lettres de chaque mot, on trouve ainsi les trente premières décimales :

$$\pi = 3{,}14159\ \ 26535\ \ 89793\ \ 23846\ \ 26433\ \ 83274 \ldots;$$

mais nous n'engageons personne à continuer ce travail poé-

tique pour les 530 décimales du calcul de M. Shanks (*). Pour les usages ordinaires, quatre ou cinq décimales suffisent, nous donnerons comme exemple l'application suivante :

Connaissant le centre d'un rouleau de papier peint et le nombre des feuilles depuis le rayon jusqu'à la circonférence, déterminer la longueur du rouleau.

Si l'on désigne par l la longueur du rouleau, par r le rayon et par n le nombre des feuilles, on peut considérer approximativement le profil du rouleau comme un cercle de rayon r, qui a pour surface πr^2 ; d'autre part, si l'on développait le rouleau, le profil deviendrait un rectangle de longueur l et d'épaisseur $\frac{r}{n}$; on a donc

$$l \cdot \frac{r}{n} = \pi r^2;$$

d'où

$$l = \pi r n.$$

Le problème de la quadrature du cercle consiste à trouver par des constructions géométriques le côté d'un carré équivalent au cercle ayant l'unité pour rayon. Nous avons dit, dans notre premier volume (p. 167), que c'est un préjugé pour beaucoup de personnes de croire à l'impossibilité démontrée de la quadrature du cercle ; mais il n'en est plus de même actuellement.

Lambert a démontré, en 1761, que le rapport de la circonférence au diamètre est incommensurable, il était aussi démontré que le carré de ce rapport est encore incommensurable (Legendre, *Éléments de géométrie, note IV*). D'autre part, dans un admirable mémoire sur la fonction exponentielle, M. Hermite avait démontré en 1874 que le nombre e base du système des logarithmes népériens est un nombre transcendant, c'est-à-dire que le nombre e ne peut être la racine d'une équation de degré quelconque à coefficients entiers ou formés d'irrationnelles algébriques ; mais l'illustre géomètre écrivait, dans une lettre à M. Borchardt : « Je ne me hasarderai point à la recherche d'une démonstration de

(*) D'autant que la trente et unième décimale est un zéro. (Note de la rédaction.)

la transcendance du nombre π. Que d'autres tentent l'entreprise ; nul ne sera plus heureux que moi de leur succès ; mais croyez-moi, mon cher ami, il ne laissera pas de leur en coûter quelques efforts. »

En 1882, M. Lindemann annonçait à l'Académie des sciences qu'il était parvenu à démontrer la transcendance du nombre π, et qu'il avait déduit cette proposition des formules de M. Hermite. Sa méthode n'est qu'une généralisation, mais fort habile, qui repose sur la liaison mystérieuse des nombres e et π, formulée par Euler :

$$e^{\pi\sqrt{-1}} = -1.$$

La cinquième édition de l'excellent *Traité de géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse contient le résumé et la simplification des formules de M. Hermite et des recherches de M. Lindemann ; M. Rouché ajoute que ce dernier travail si remarquable appelle d'autant plus l'attention qu'il ne semble pas devoir être le dernier mot sur ce sujet au moins sous le rapport de la simplicité. N'est-ce pas le cas de répéter avec Bacon : « Nous n'arriverons à quelque chose de définitif qu'après avoir longtemps vécu de provisoire. Mais ce provisoire ne nous fascinera pas, nous saurons qu'il n'est pas notre dernier but et, dans les champs de la science, les plus hardis travailleurs n'oublieront pas qu'il faut d'abord faire une première vendange. »

Extrait des *Récréations mathématiques* de M. Ed. Lucas, t. II.)

QUESTIONS PROPOSÉES

77. — Étant donnée une ellipse, on décrit de l'un des foyers comme centre de F par exemple, une circonférence de rayon égal à l'ordonnée de ce point. Au point F correspond une directrice ; on prend la droite DD′ symétrique de la directrice par rapport à F, et l'on mène du point F le rayon vecteur FIMM′ rencontrant le cercle, l'ellipse et la droite DD′ respectivement en I, M et M′. Prouver que

$IM.IM' = p^2$, p étant l'ordonnée du foyer. *(X. Antomari.)*

78. — Soit ABCD un quadrilatère inscriptible. Désignons par A_1 la surface du triangle BCD, et par P_1 la puissance du point A par rapport à un cercle quelconque situé dans le plan du quadrilatère. Désignons de même par B_1 et P_2 les quantités analogues pour le point B, etc. Prouver que l'on a la relation $A_1P_1 - B_1P_2 + C_1P_3 - D_1P_4 = 0$.

Déduire de là les propriétés du quadrilatère inscriptible. *(X. A.)*

79. — Un quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$ est inscrit dans un cercle O. Soit O′ le cercle passant par A_1A_2 et tangent au côté A_1A_4. Le côté A_2A_3 rencontre ce cercle en un second point I. Prouver que l'on a

$$\frac{A_1A_3}{A_2A_4} = \frac{IA_3}{A_1A_4} \qquad (X.\ A.)$$

80. — p étant un nombre premier impair, et P un polynôme entier, à coefficients entiers, l'équation

$$(x+y)^p - x^p - y^p = pxy\,(x+y)\,P^2$$

n'est vérifiée que par

$$p = 7, \qquad P = x^2 + xy + y^2. \qquad (Catalan.)$$

81. — Sommer

$$2^{n-2} + \frac{(n-4)(n-5)}{2.3}\,2^{n-6} + \frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9}{2.3.4.5}\,2^{n-10}$$

. . . . . .

et démontrer que si n est un nombre premier, les fractions

$$\frac{(n-4)(n-5)}{2.3}, \qquad \frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{2.3.4.5} \ldots\ldots$$

se réduisent à des nombres entiers. *(Catalan.)*

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS — 20642-3.

SUR UNE

NOUVELLE ESPÈCE DE FRACTIONS CONTINUES

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite.* V. p. 193, 217.)

VII. Application aux fonctions U_n du second ordre. — Ces fonctions sont déterminées par l'équation de récurrence, $U_n - 2p\,U_{n-1} + q\,U_{n-2} = 0.$ (1)

Nous allons chercher l'intégrale U_n en appliquant, directement, notre méthode et sans admettre le théorème de Lagrange.

A cet effet, posons

$$U_n = V_n + \alpha^n. \qquad (2)$$

Nous avons, entre les fonctions V, la relation

$$V_n - 2p\,V_{n-1} + q\,V_{n-2} + \alpha^{n-2}(\alpha^2 - 2\alpha p + q) = 0.$$

Considérons l'équation

$$z^2 - 2pz + q = 0.$$

Nous supposerons $p^2 - q$, différent de zéro et nous désignerons par z_1 et z_2, les deux racines de cette équation. En prenant $\alpha = z_1$, ou $\alpha = z_2$, nous avons

$$V_n - 2p\,V_{n-1} + q\,V_{n-2} = 0.$$

Si nous posons (§ V)

$$U_n = AU_0 + BU_1,$$

nous avons aussi (§ V)

$$V_n = AV_0 + BV_1;$$

et, par suite,

$$U_n - V_n = A\,(U_0 - V_0) + B\,(U_1 - V_1).$$

La relation (2) permet d'écrire cette égalité de la manière suivante : $\alpha^n = A + B\alpha.$

Cette égalité est vérifiée : 1° pour $\alpha = z_1$; 2° pour $\alpha = z_2$. Nous avons donc

$$z_1^n = A + Bz_1,$$
$$z_2^n = A + Bz_2.$$

Si nous résolvons ces équations, par rapport aux incon-

nues A et B, nous obtenons

$$A = z_1 z_2 \frac{z_1^{n-1} - z_2^{n-1}}{z_1 - z_2}, \qquad B = \frac{z_1^n - z_2^n}{z_1 - z_2}.$$

Posons maintenant

$$T_n = \frac{z_1^n - z_2^n}{z_1 - z_2};$$

nous avons, enfin,

$$A = -qT_{n-1}, \qquad B = T_n.$$

L'intégrale U^n est donc donnée par la formule

$$U_n = -qT_{n-1}U_0 + T_nU_1. \qquad (\alpha)$$

Cette formule est bien l'*intégrale générale*, car elle renferme deux constantes arbitraires U_0, U_1 et l'on peut vérifier que l'égalité précédente se réduit à une identité pour $n = 0$, et pour $n = 1$. L'expression de U_n se trouve ainsi donnée en fonction de T_n et de T_{n-1}. Ces fonctions T_n ont été étudiées, particulièrement, par M. Ed. Lucas et, avec les fonctions S_n,

$$S_n = z_1^n + z_2^n,$$

ont été nommées par lui *fonctions numériques simplement périodiques* (1).

En posant, $\Delta = 4(p^2 - q)$,

on trouve

$$T_n = \frac{n}{1} p^{n-1} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} p^{n-3}\Delta$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} p^{n-5}\Delta^2 + \ldots$$

D'après cette formule, démontrée par M. Ed. Lucas (*loc. cit.*), l'expression de U_n, en fonction de p et de q, se trouve donnée, en utilisant l'égalité (α).

VIII. — Examen du cas des racines égales. — Il nous reste à considérer le cas particulier que nous avons réservé, celui où l'on suppose $p^2 - q = 0$.

On peut encore éviter le théorème de Lagrange et chercher directement l'intégrale U_n, comme nous allons le montrer.

L'équation proposée est alors

$$U_n - 2pU_{n-1} + p^2U_{n-2} = 0.$$

(1) *Nouvelle Correspondance mathématique*, 1877; p. 369.

Cette relation peut s'écrire

$$U_n - pU_{n-1} = p(U_{n-1} - pU_{n-2}).$$

Il est alors naturel de poser

$$U_n - pU_{n-1} = \rho_n,$$

et l'on a,

$$\rho_n = p\rho_{n-1}.$$

Cette dernière égalité donne, par combinaison.

$$\rho_n = p^{n-1}\rho_1.$$

Nous avons donc le tableau suivant :

$$U_n - p\,U_{n-1} = \rho_n = p^{n-1}\rho_1,$$
$$U_{n-1} - p\,U_{n-2} = \rho_{n-1} = p^{n-2}\rho_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$U_1 - p\,U_0 = \rho_1 = p^0\rho_1..$$

Multiplions ces égalités, respectivement, par

$$1,\ p,\ p^2,\ \ldots\ p^{n-1},$$

et ajoutons ces résultats, nous obtenons la relation

$$U_n - p^n\,U_0 = np^{n-1}\rho_1.$$

Si nous remarquons enfin que $\rho_1 = U_1 - p\,U_0$. nous avons finalement

$$U_n = p_n\left\{U_0 + n\left(\frac{U_1}{p} - U_0\right)\right\}.$$

Nous allons maintenant, ces explications nécessaires étant données, aborder l'étude que nous avons en vue dans ce travail de fractions continues, d'une nouvelle espèce, représentant, comme les fractions continues ordinaires, les irrationnelles du second degré. Nous résumerons, assez fidèlement, ce que nous avons exposé jusqu'ici en faisant remarquer qu'il résulte de ce que nous venons de dire:

1° Que l'intégrale U_n, *des suites récurrentes proprement dites, peut toujours se calculer sans qu'on ait à résoudre l'équation génératrice et par le seul calcul de la fonction symétrique* S_n;

2° Que l'on peut trouver U *par une méthode directe élémentaire et qui évite la démonstration du théorème de Lagrange* ;

3° Dans le cas où la fonction U_n *vérifie la relation de récurrence :*

$$U_n - 2p\,U_{n-1} + q\,U_{n-2} = 0,$$

si l'on suppose $q = p^2$, *on a*

$$U_n = p^n\left\{U_0 + n\left(\frac{U_1}{p} - U_0\right)\right\};$$

et si $q - p^2$ *est différent de zéro, on a*

$$U_n = -q\,T_{n-1}\,U_0 + T_n U_1;$$

en posant:

$$T_n = \frac{n}{1}\,p^{n-1} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\,p^{n-3}\,\Delta + \ldots:$$

et $\Delta = 4(p^2 - q).$ *(A suivre.)*

NOTE SUR LES CUBIQUES

Par M. **H. Le Pont,** à Paris.

Étant donné un triangle ABC pris pour triangle de référence, l'équation $x^2y = z^3$ (1)
représente une cubique Γ passant par les sommets A et B de ce triangle, et ayant pour tangente de rebroussement au point B le côté BC, $x = 0$; et pour tangente d'inflexion en A, le côté AC, $y = 0$.

Posons $x = \frac{z}{t}, \quad y = t^2 z,$ (2)

l'équation d'une droite passant par deux points t_1 et t_2 de la courbe, est

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & t_1^2 & t_1 \\ 1 & t_2^2 & t_2 \end{vmatrix} = 0$$

ou en développant

$$t_1 t_2 (t_1 + t_2)x - (t_1^2 + t_1 t_2 + t^2{}_2)z + y = 0$$

et en supposant $t_1 = t_2$, cette équation devient celle de la tangente à la courbe au point t :

$$2t^3x - 3t^2z + y = 0. \quad (3)$$

L'équation $2t^3x_0 - 3t^2z_0 + y_0 = 0$ (4)
donne les valeurs de t correspondant aux trois tangentes que l'on peut mener à la cubique Γ par un point P (x_0, y_0, z_0) du plan.

L'équation aux t d'intersection de la cubique Γ avec une conique C

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy = 0 \quad (5)$$

est $a't^6 + 2bt^4 + 2b''t^3 + a''t^2 + 2b't + a = 0.$ (6)

Nous exprimerons que cette conique C passe par les points

de contact des tangentes issues du point P en identifiant l'équation (6) avec le produit

$$(2t^3x_0 - 3t^2z_0 + y_0)\ (t^3 + ut^2 + vt + w), \qquad (7)$$

ce qui donnera les relations

$$\left.\begin{aligned} \frac{2x_0}{a'} &= \frac{2vx_0 - 3uz_0}{2b} = \frac{2wz_0 - 3vz_0 + y_0}{2b''} \\ &= \frac{uy_0 - 3wz_0}{a''} = \frac{vy_0}{2b'} = \frac{wy_0}{a} \\ &2ux_0 - 3z_0 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

relations qui permettront de déterminer la nature de la conique C, suivant les données du problème proposé. En particulier, si nous voulons que les tangentes aux trois autres points d'intersection des courbes C et Γ concourent en un point Q (ξ, η, ζ) du plan, nous aurons

$$\begin{aligned} a &= -a''\ \frac{\eta y_0}{3(\eta z_0 + y_0\zeta)},\ a' = -a''\ \frac{4\xi x_0}{3(\eta z_0 + y_0\zeta)}, \\ b &= -a''\ \frac{3\zeta z_0}{2(\eta z_0 + y_0\zeta)},\ b' = 0,\ b'' = -a''\ \frac{\xi y_0 + x_0\eta}{3(\eta z_0 + y_0\zeta)}, \end{aligned} \qquad (9)$$

avec la relation $\zeta x_0 + z_0\xi = 0.$ (10)

et l'équation de la conique C s'écrira

$$\begin{aligned} \eta y_0 x^2 + 4\xi x_0 y^2 - 3(\eta z_0 + y_0\zeta)z^2 + 9\zeta z_0 yz \\ + 2\,(\xi y_0 + x_0\eta)xy = 0 \end{aligned} \qquad (11)$$

Nous pouvons donc énoncer les théorèmes suivants :

I. — *Étant donnés deux points* $P(x_0, y_0, z_0)$ *et* $Q(\xi, \eta, \zeta)$ *dont les coordonnées satisfont à la relation*

$$\zeta x_0 + z_0\xi = 0,$$

on peut toujours déterminer une conique C *et une seule passant par les points de contact des six tangentes menées à la cubique* Γ *par les points* P *et* Q.

II. — *On peut toujours mener six coniques circonscrites au triangle de référence et tangentes à la cubique* Γ; *ces six coniques se coupent trois à trois en deux points* P *et* Q *d'une septième conique circonscrite au même triangle et dont les coordonnées* (x_0, y_0, z_0), (ξ, η, ζ) *satisfont à l'équation*

$$\zeta x_0 + z_0\xi = 0.$$

CONIQUES

PASSANT PAR TROIS DES QUATRE POINTS COMMUNS A DEUX CONIQUES DONNÉES

Par M. **Poujade**, professeur de mathématiques spéciales au Lycée de Lyon.

Premier cas. — Le point laissé de côté est à distance finie. Nous le prenons pour origine. L'équation d'une des coniques qui y passent peut s'écrire $\alpha x + \beta y = 0$, α, β étant des fonctions linéaires données de x et y. Écrivons

$$x(\alpha + \lambda y) + y(\beta - \lambda x) = 0,$$

λ constante arbitraire. De même la seconde conique a pour équation, je suppose

$$x(\alpha' + \lambda' y) + y(\beta' - \lambda' x) = 0.$$

Pour que des valeurs de x et y, qui ne sont pas nulles à la fois, satisfassent à ces deux conditions, il faut et suffit qu'on ait $(\alpha + \lambda y)(\beta' - \lambda' x) - (\alpha' + \lambda' y)(\beta - \lambda x) = 0$.

Cette équation représente une conique qui passe donc par les trois points, autres que l'origine, communs aux deux coniques données. Développée, elle renferme au premier degré seulement les constantes arbitraires λ et λ'; donc on pourra faire passer la conique par deux autres points arbitraires. Nous avons l'équation générale des coniques passant par les trois points considérés.

Application. — Cercles passant par les pieds de trois normales menées d'un point P (α, β) à l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \text{ (axes rectangulaires).}$$

Les pieds des quatre normales sont à l'intersection de l'ellipse et de

$$c^2 xy + b^2 \beta x - a^2 \alpha y = 0.$$

Soit M $(x'y')$ l'un d'entre eux laissé de côté, on trouve, en appliquant la méthode précédente, ou, ce qui revient ici au même, en écrivant les deux équations ainsi:

$$\frac{x-x'}{a^2}(x+x')+\frac{y-y'}{b^2}(y+y')=0.$$

$$-b^2(x-x')\left(y-\beta-\frac{b^2}{a^2}y'\right)$$

$$+a^2(y-y')\left(x-\alpha-\frac{b^2}{a^2}x'\right)=0;$$

l'équation du cercle cherché sous la forme

$$(x+x')\left(x-\alpha+\frac{b^2}{a^2}x'\right)$$

$$+(y+y')\left(y-\beta-\frac{a^2}{b^2}y'\right)=0.$$

On voit que ce cercle a pour quatrième point commun avec l'ellipse le point M′ $(-x', -y')$ diamétralement opposé au pied M laissé de côté. (Théorème de Joachimsthal.) Son centre I a pour coordonnées $\frac{1}{2}\left(\alpha-\frac{c^2x'}{a^2}\right), \frac{1}{2}\left(\beta+\frac{c^2y'}{b^2}\right)$. Pour le construire, soit Q le point qui se projette sur les axes aux points où ils sont rencontrés par la normale en M à l'ellipse; son symétrique par rapport à O étant Q′, le point I est au milieu de PQ′. Le cercle est déterminé.

Il est aisé de vérifier que la parallèle menée de I à la normale en M passe par le point $\left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}\right)$ milieu de OP′, P′ étant symétrique de P par rapport à O. Ce point est donc commun aux quatre droites ainsi obtenues. (Propriété indiquée par M. Laguerre.)

Enfin il est visible que pour que le cercle ci-dessus passe par le point M $(x'y')$, il faut et suffit que P soit le point de contact de la normale en M et de la développée. Mais cette condition donne $x'\left(\alpha-\frac{c^2x'}{a^2}\right)+y'\left(\beta+\frac{c^2y'}{b^2}\right)=0$.

Donc pour construire l'extrémité du rayon de courbure en M, il suffit ayant tracé la normale en ce point qui coupe les axes en D, E, projections sur ces axes d'un point Q, d'abaisser de ce point Q une perpendiculaire sur le diamètre OM; elle rencontre la normale au point P cherché.

Deuxième cas. — Le point laissé de côté est à l'infini.

Supposons qu'il est dans la direction de l'axe des x, direction asymptotique commune.

Il suffit de rendre les équations homogènes et de remarquer qu'elles sont de la forme $\beta y + \gamma z = 0$, β, γ fonctions linéaires de x, y, z pour être ramené à un calcul tout semblable au premier.

Application au cercle passant par les pieds des trois normales menées d'un point à une parabole. — On vérifie qu'il passe encore par le sommet de la parabole.

Remarque. — Nous avons vu dans l'application du premier cas qu'il n'est pas indispensable de faire le changement d'origine. De même dans le second cas, si la direction asymptotique était $y = mx$ on pourrait écrire les équations sous la forme $\beta(y - mx) + \gamma z = 0$ de façon à éviter le changement d'axes.

NOTE

SUR LA MANIÈRE D'ÉCRIRE $(x + h)^m$ SOUS FORME DE DÉTERMINANT

Par M. **Marchand**, ancien élève de l'Ecole polytechnique.

Le développement du binôme pour des puissances entières peut se mettre sous la forme d'un déterminant à l'aide des considérations des plus élémentaires, empruntées à la théorie de la division algébrique.

Cette dernière nous donne l'identité

$$(x + h)^{m+1} - x^{m+1} = h(x + h)^m + h(x + h)^{m-1}x$$
$$+ h(x + h)^{m-2}\, x^2 \ldots\ldots + h(x + h)x^{m-1} + hx^m.$$

qu'on peut écrire

$$(x + h)^{m+1} - h(x + h)^m - h(x + h)^{m-1}\, x - h(x + h)^{m-2}\, x^2$$
$$\ldots\ldots - h(x + h)y^{m-1} = x^{m+1} + hx^m.$$

Donc en attribuant à m la série des valeurs entières comprises de 0 à m, et remplaçant pour simplifier l'écriture $x + h$ par ξ, on obtiendra les $(m + 1)$ relations linéaires en

ξ^{m+1}, ξ^m, ... etc. ξ,

$$\begin{aligned}
\xi^{m+1} - h\xi^m - hx\,\xi^{m-2} - hx^2\xi^{m-2} \ldots\ldots - hx^{m-1}\xi &= x^{m+1} + hx^m \\
\xi^m - h\,\xi^{m-1} - hx\,\xi^{m-2} \ldots\ldots - hx^{m-2}\xi &= x^m + hx^{m-1} \\
\xi^{m-1} - h\,\xi^{m-1} \ldots\ldots - hx^{m-1}\xi &= x^{m-1} + hx^{m-2} \\
\xi^2 - h\xi &= x^2 + hx \\
\xi &= x + h,
\end{aligned}$$

que l'on peut considérer comme formant un système d'équations simultanées.

Le déterminant du système ayant évidemment l'unité pour valeur, on pourra écrire

$$(1)\ \xi^{m+1} = (x+h)^{m+1} = \begin{vmatrix}
x^{m+1} + hx^m & -h & -hx \ldots & -hx^{m-1} \\
x^m + hx^{m-1} & 1 & -h \ldots & -hx^{m-2} \\
x^{m+2} + hx^{m-2} & 0 & 1 \ldots & -hx^{m-3} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
x^1 + hx & 0 & 0 \ldots 1 & -h \\
x + h & 0 & 0 \ldots 0 & 1
\end{vmatrix}$$

ou encore, en remarquant que le déterminant que nous venons d'écrire est divisible par $x + h$,

$$(2)\ (x+h)^m = \begin{vmatrix}
x^m & -h & -hx \ldots\ldots & -hx^{m-1} \\
x^{m-1} & 1 & -h \ldots\ldots & -hx^{m-2} \\
x^{m-2} & 0 & 1 \ldots\ldots & -hx^{m-3} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
x & 0 & 0 \ldots 1 & -h \\
1 & 0 & 0 \ldots 0 & 1
\end{vmatrix}$$

qui répond à la question que nous nous sommes posée.

Première Remarque. — Prenant cette formule (2) *à priori*, il serait facile de démontrer qu'elle donne bien la valeur de $(x+h)_m$; il suffirait pour cela de retrancher la dernière colonne de la première; car on mettrait alors en évidence un facteur $x+h$, en ramenant le déterminant (2) à une forme identique à celle qu'il a dans la relation (1); de proche en

proche en abaissant l'ordre du déterminant d'une unité, au fur et à mesure qu'on mettraitun facteur $(x+h)$ en évidence, on arriverait donc à le ramenerà la valeur $(x+h)^m$.

Deuxième Remarque. — Il est clair que si on remplace dans cette formule h par $-h$, ce qui revient à changer les signes de tous les termes situés à droite de la diagonale allant de l'extrémité supérieure gauche à l'extrémité inférieure droite, c'est le développement de $(x-h)^m$ que l'on obtiendra.

Nous laissons maintenant aux jeunes lecteurs de ce journal le soin de tirer, de cette formule, les résultats intéressants qu'elle comporte à première vue, et notamment la forme qu'elle permet de donner aux puissances entières des nombres entiers, ou encore au développement de $\cos^m x$ et $\sin^m x$, en fonction de puissances imaginaires du nombre e et de $\cos^m x$ et $\sin^m x$ en fonction des puissances de $\cos x$ et de $\sin x$.

ÉCOLE CENTRALE (PREMIÈRE SESSION 1883)

Géométrie analytique.

On donne deux axes Ox, Oy, un point A sur Ox, un point B sur Oy :

1° Former l'équation générale des paraboles telles que, pour chacune d'elles, Oy soit la corde des contacts des tangentes menées du point A, et Ox la corde des contacts des tangentes menées du point B.

2° Trouver le lieu des points de rencontre de chacune de ces paraboles avec celui de ses diamètres qui passe par un point H donné sur Oy.

On déterminera un nombre de conditions géométriques suffisant pour pouvoir tracer le lieu et on cherchera comment doit être placé le point H, pour que ce lieu se réduise à des droites.

3° Déterminer le paramètre variable que renferme l'équa-

tion générale du n° 1, de façon qu'elle représente une parabole passant par un point donné P, et chercher dans quelles régions du plan doit se trouver le point P, pour que le problème soit possible.

Trigonométrie.

Résoudre un triangle, connaissant deux côtés et l'angle compris, savoir :

$$a = 4326^{m},829$$
$$b = 7843^{m},435$$
$$C = 123^{\circ}\,7'\,43'',2.$$

Calculer A, B, c et l'aire du triangle.

Physique.

Un thermomètre renferme à 0°, jusqu'au point A, un poids P de mercure et un cylindre B en fer, de poids P′; cet appareil étant porté dans une enceinte de température x, inconnue, le liquide s'élève jusqu'au point C. La tige a été divisée préalablement, au-dessus du point A, en parties d'égale capacité v, jaugées à 0°; l'intervalle AC comprend n de ces divisions.

D et D′ sont les densités à 0° du mercure et du fer.

f et k sont les coefficients de dilatation cubique du fer et du verre; m est le coefficient de dilatation cubique absolue du mercure.

Quelle est la température X de l'enceinte?

Exemple numérique :

	Mercure	Fer
$n = 266$	$P = 197^{g},1$	$P' = 180^{g},2$
$v = 0^{cc},0013$	$D = 13,59$	$D' = 7,8$
$k = 0,000025$	$m = 0,00018$	$f = 0,000035$

Chimie.

1° Indiquer sommairement les préparations usuelles du chlore dans les laboratoires et dans l'industrie, et donner les formules qui les représentent.

2° Calculer le volume du chlore (mesuré à la température 0° et à la pression de $0^{m},760$ de mercure) nécessaire pour trans-

former en acide sulfurique, en présence de l'eau, 10 litres d'acide sulfureux (mesuré à la température de 0° et, à la pression de $0^m,760$ de mercure).

	Equivalents en poids	Equivalents en volume	Densités
Cl	35,5	2	2,46
SO^2	32	2	2,22

Poids d'un litre d'air : 1^g293 mesuré à la température de 0° et sous la pression de $0^m,760$ de mercure.

Épure.

Hyperboloïde de révolution à une nappe, entaillé par quatre cônes.

L'hyperboloïde a son axe (z,z') vertical à $0^m,110$ du plan vertical et au milieu de la feuille; sa trace horizontale Θ touche la ligne de terre; la cote de son centre est $0^m,103$ et ses génératrices rectilignes font un angle de 45° avec le plan horizontal. Les quatre cônes sont parallèles au cône asymptote de l'hyperboloïde; leurs sommets, projetés horizontalement aux extrémités (s_1, s_2, s_3, s_4) de deux diamètres du cercle Θ respectivement parallèle et perpendiculaire à la ligne de terre, ont pour cote commune $0^m,80$.

On demande de construire les projections du corps constitué par la partie de l'hyperboloïde, supposé plein et opaque, qui, placée à l'extérieur des quatre cônes, se trouve comprise entre le plan horizontal de projection et le plan bissecteur du dièdre antérieur supérieur.

On indiquera, à l'encre rouge, les constructions employées pour obtenir un point quelconque des différentes lignes d'intersection et les tangentes en ces points. Ces constructions seront succinctement expliquées à l'aide d'une légende placée au bas de l'épure.

Titre extérieur : Géométrie descriptive.

Titre intérieur : Tronc d'hyperboloïde entaillé par des cônes.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à $0^m,250$ du petit côté inférieur.

ÉCOLE CENTRALE (2e SESSION 1883)

Géométrie analytique.

On donne, dans un plan, un rectangle ABCD et un point quelconque P; par ce point, on mène une droite de direction arbitraire PR; des quatre sommets du rectangle on abaisse des perpendiculaires AA′, BB′, CC′, DD′ sur cette droite.

Ceci posé, on demande de démontrer :

1° Que, parmi toutes les droites PR, issues du point P, il en existe une, PR′, pour laquelle la somme r^2 des carrés des distances des quatre sommets du rectangle à cette droite est maxima, et une autre, PR″, pour laquelle cette somme est minima;

2° Que les deux droites PR′ et PR″ sont rectangulaires;

3° Que le lieu des points P, pour lesquels le maximum de r^2 conserve une valeur donnée μ^2, est une conique, et que la tangente à cette conique au point P est la droite PR′. — Que, de même, le lieu des points P, pour lesquels le minimum de r^2 conserve une valeur donnée λ^2, est une conique, et que la tangente à cette conique au point P est la droite PR″;

4° Que ces deux coniques sont homofocales et que leurs foyers communs sont indépendants des valeurs attribuées aux deux paramètres μ^2, λ^2. Donner la position de ces foyers et examiner en particulier le cas où l'une des deux dimensions du rectangle s'annulerait.

Trigonométrie.

Calculer les angles et la surface d'un triangle connaissant les trois côtés, savoir :

$$a = 4528^m,74$$
$$b = 3254^m,67$$
$$c = 3121^m,54.$$

Épure.

On donne un carré, dont le centre est à $0^m,110$ des deux plans de projection, dont les diagonales $(bd, b'd')$ $(ac, a'c')$ ont $0^m,088$ de longueur, et sont respectivement verticale et parallèle à la ligne de terre. Dans le plan de ce carré, du point cc' comme centre, avec un rayon égal au côté du carré, on trace un cercle ; ce cercle, en tournant autour de la diagonale verticale $(bd, b'd)'$, engendre un tore, et le côté $(bc, b'c')$ prolongé engendre, en tournant autour de $(ad, a'd')$, un cylindre.

On demande de représenter la partie, supposée opaque, de la *surface* du tore comprise dans le cylindre.

On indiquera, à l'encre rouge, les constructions relatives à la recherche d'un point quelconque de la ligne commune au tore et au cylindre et de la tangente à cette ligne.

Ces constructions seront succinctement expliquées à l'aide d'une légende placée au bas de l'épure.

Titre extérieur : Géométrie Descriptive.

Titre intérieur : Surface d'un tore comprise dans un cylindre.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à $0^m,230$ du petit côté supérieur, et l'axe du tore au milieu de la feuille.

Physique.

Un récipient de volume invariable renferme de l'air sec comprimé. On laisse échapper, par un robinet, une partie du gaz ; par suite de cette détente, le gaz restant se refroidit et prend la température t. On ferme alors le robinet et on observe, au même moment, la pression h donnée par un manomètre qui communique avec l'intérieur du récipient. Lorsque l'air qui reste dans le récipient est revenu à la température ambiante T, on observe la pression H donnée par le manomètre. — Calculer la température t.

On appliquera la formule obtenue aux données particulières suivantes :

T, température ambiante $= 20^\circ$.

h, pression à la fermeture du robinet $= 0^m,800$ de mercure.

H, pression finale $= 0^m.8587$ de mercure.

α, coefficient de dilatation de l'air $= 0,00367$.

Chimie.

1° Préparation du phosphore à l'aide des os ; sa purification ; sa transformation en phosphore rouge.

2° Combien faut-il employer de litres d'oxygène sec, à la température de 15° et à la pression de $0^m,745$ de mercure, pour obtenir 50 grammes d'acide phosphorique anhydre par la combustion du phosphore.

Équivalents en poids, du phosphore : 31 ; de l'oxygène : 8. Densité de l'oxygène à la température de 0° et à la pression de $0^m,760$ de mercure : 1,1056.

Coefficient de dilatation de l'oxygène : $\alpha = 0,00367$.

QUESTION 37

Solution par M. Callé, élève de mathématiques spéciales au Lycée de Grenoble.

On considère une parabole P, *et sur cette courbe un point* C. *Soit* N *la normale en ce point. 1° Trouver sur cette normale un point* D, *tellement choisi que le cercle* S *décrit de* D *comme centre avec* DC *pour rayon rencontre* P *en deux points* A *et* B, *en ligne droite avec* D.

2° Démontrer que la surface du segment parabolique qui a pour corde AB *est constante quand le point* C *se déplace sur la courbe* P.

3° Équation générale de la droite AB. *Démontrer, au moyen de cette équation générale, que l'enveloppe de ces droites est une parabole égale à la proposée.*

4° Reconnaître que cette enveloppe se confond avec le lieu des centres des cercles S. *Expliquer cette coïncidence.*

5° Aux cercles S *on mène des tangentes parallèles à la droite*

AB. *Démontrer que le lieu des points de contact est formé de deux paraboles dont l'une est égale à la proposée quand on déplace celle-ci parallèlement à elle-même de la longueur* 4 p, *dans la direction positive de son axe.* (G. L.)

1° L'équation de la normale en fonction du coefficient angulaire est : $y + pm = m\left(x - \frac{pm^2}{2}\right)$.

Le coefficient angulaire de la tangente à la parabole, au pied de la normale, étant $-\frac{1}{m}$, celui de la corde AB sera $\frac{1}{m}$. Donc, le point D se trouvera à l'intersection de la normale et du diamètre conjugué de la direction $\frac{1}{m}$:

$$y - pm = 0.$$

Les coordonnées du point D sont donc : $\begin{cases} x = \frac{p(4 + m^2)}{2}, \\ y = pm. \end{cases}$

2° L'équation de la droite AB, est

$$2x - 2my - p(4 - m^2) = 0.$$

Les ordonnées des points d'intersection de la parabole et de la droite AB sont données par l'équation

$$y^2 - 2pmy - p^2(4 - m^2) = 0,$$

d'où l'on tire $y' - y'' = 4p$,

ce qui montre que le segment parabolique qui a pour corde AB, est bien de surface constante et égale à $\frac{16p^2}{3}$.

3° Pour avoir l'enveloppe de la droite AB, éliminons m entre l'équation de la droite et $y = pm$, équation donnée par sa dérivée prise par rapport à m.

On a ainsi pour l'enveloppe demandée

$$y^2 = 2p(x - 2p),$$

ce qui représente une parabole égale à la première.

4° Le lieu du point D s'obtient en éliminant m entre

$$y = pm \text{ et } x = \frac{p(4 + m^2)}{2}.$$

Le lieu est le même que le précédent.

Ce résultat pouvait être prévu: car l'enveloppe d'une corde déterminant sur une courbe un segment de surface constante, n'est autre chose que le lieu du milieu de la corde.

5° Cherchons la longueur de AB, on a

$$y' - y'' = 4p;$$

mais de l'équation de la droite on tire

$$x' - x'' = m(y' - y'') = 4pm,$$

d'où $$\delta^2 = 16p^2(1 + m^2).$$

L'équation du cercle S est donc

$$(y - pm)^2 + \left(x - \frac{p + 4m^2}{2}\right)^2 = 4p^2(1 + m^2).$$

Le lieu s'obtiendra donc en éliminant m entre l'équation du cercle et celle d'une perpendiculaire à AB menée par le point D : $$y - pm = -m\left(x - \frac{p(4 + m^2)}{2}\right)$$

d'où l'on tire $$x - p\,\frac{4 + m^2}{2} = \frac{y - pm}{m}.$$

Portons cette valeur dans l'équation du cercle; on obtient

$$(y - pm)^2 = 4p^2m^2,$$

ce qui se dédouble en

$$y = 3pm, \quad y = -pm,$$

d'où $$m = \frac{y}{3p}, \quad m = -\frac{y}{p}.$$

Portons successivement ces valeurs dans l'équation de la perpendiculaire. On obtient pour le lieu demandé les deux paraboles $$y^2 = 18px; \quad y^2 = 2p(x - 4p).$$

NOTA. — La même question a été résolue par M. Kauffmann, à Bordeaux.

Seconde solution par M. L. JACOB, à Lorient.

On considère une parabole P *et sur cette courbe un point* C. *Soit* N *la normale en ce point.*

1° Trouver sur cette normale un point D *tellement choisi que le cercle* S *décrit de* D *comme centre avec* DC *pour rayon rencontre* P *en deux points* A *et* B *en ligne droite avec* D.

Soit CF la normale en C; CT la tangente au point C et TX

l'axe de la parabole donnée(*). Supposons le problème résolu et soit CAB le cercle cherché ; la droite AB d'après une propriété connue du cercle fait avec TX un angle égal à XTC, le point D étant le milieu de AB se trouve sur le diamètre conjugué des cordes parallèles à AB, d'où la construction suivante.

Posez le point C′ symétrique de C par rapport à l'axe et par le point C′ menez C′D parallèle à l'axe, son intersection avec la normale donne le point D.

Remarque. — La sous-normale EF étant égale à p, la droite C′D a pour longueur $2p$.

2° *Démontrer que la surface du segment parabolique qui a pour corde* AB *est constante quand le point* C *se déplace sur* P.

Par les points A et B menons AA′ et BB′ parallèles à l'axe; on sait que l'aire du segment AC′B est les deux tiers de l'aire AA′BB′. On a donc

$$S = \frac{2}{3}\,AA'BB' = \frac{4}{3}\,AA'C'D = \frac{8}{3}\,AC'D.$$

Or les triangles C′AD, C′CD sont entre eux comme leurs hauteurs, donc

$$\frac{C'AD}{C'CD} = \frac{AD \sin\alpha}{CD \cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

α désignant l'angle de la tangente en C avec TX, et remarquant que $AD = CD$;

d'ailleurs on a $C'D = 2p.\quad CC' = 2y.$

donc $C'CD = 2py,$

$$C'AD = 2py \operatorname{tg}\alpha.$$

Or $y \operatorname{tg}\alpha = p$, comme le montre le triangle CEF, donc

$$C'AD = 2p^2,$$

par suite $$S = \frac{16}{3}\,p^2.$$ C. Q. F. D.

3° *Équation générale de la droite* AB. *Démontrer, au moyen de cette équation générale, que l'enveloppe de ces droites est une parabole égale à la proposée.*

L'équation de la tangente A′B′ peut s'écrire

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

$$y = mx + \frac{p}{2m},$$

et le point D étant tel que $C'D = 2p$, l'équation de la droite sera

$$y = m(x - 2p) + \frac{p}{2m},$$

l'enveloppe de cette droite est exactement la parabole

$$y^2 = 2p(x - 2p) \qquad \text{C. Q. F. D}$$

Nous nous proposons dans ce qui suit d'établir les résultats précédents dans le cas de l'ellipse.

1° Soit D le point cherché sur la normale CN, la corde DAB passant par ce point est avec la tangente CT également inclinée sur les axes de la conique ; pour avoir le point D il faut donc avoir précédemment déterminé les cordes conjuguées des cordes parallèles à AB, ce qui se fait en prenant le point C' symétrique de C et joignant OC'.

2° Cherchons le lieu du point D. Soit m le coefficient angulaire de la normale en C; cette normale a pour équation

$$y = mx + \frac{c^2 m}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}};$$

le coefficient angulaire de la droite AB étant $\frac{1}{m}$, le diamètre CC' a pour équation

$$b^2 x + \frac{1}{m} a^2 y = 0$$

et le lieu du point D s'obtient en éliminant m entre ces deux équations :

$$m = -\frac{a^2 y}{b^2 x}, \quad y = -\frac{a^2 y}{b^2} - \frac{c^2 \frac{a^2 y}{b^2 x}}{\sqrt{a^2 + b^2 \frac{a^4 y^2}{b^4 x^2}}}$$

$$y^2 \frac{(a^2 + b^2)^2}{b^4} = \frac{c^4 a^2 y^2}{a^2 b^4 x^2 + b^2 a^4 y^2}$$

ou bien $$b^2 x^2 + a^2 y^2 = \frac{c^4 a^2 b^2}{(a^2 + b^2)^2};$$

d'où il suit que le lieu est une ellipse homothétique de l'ellipse donnée et que par suite AB est la tangente en D à cette ellipse.

3° Cherchons la variation de l'aire du segment ACB. Soient AMB, A_1MB_1 deux positions voisines du segment AB; on a en désignant par ΔS l'accroissement de l'aire

$$\Delta S = BMB_1 - AMA_1 = \frac{1}{2}\sin M \left\{ BM \,.\, B_1M - AM \,.\, A_1M \right\}$$

$$\Delta S = \frac{1}{2} AM \,.\, A_1M \left\{ \frac{BM}{AM} \,.\, \frac{B_1M}{A_1M} - 1 \right\}$$

Or à la limite les points M, I et I_1 coïncident, on a donc

$$\frac{AM}{BM} = 1 \qquad \frac{B_1M}{A_1M} = 1 \qquad \text{d'où} \quad \Delta S = 0,$$

l'accroissement de l'aire étant nulle, *l'aire est constante.*

On voit que l'on peut retrouver ce théorème bien connu :

Théorème. — *Si une sécante mobile roule sur une conique homothétique et concentrique d'une conique donnée, elle détermine sur cette dernière un segment dont l'aire est constante.*

4° Reconnaître que cette enveloppe se confond avec le lieu des centres des cercles S. Expliquer cette coïncidence.

En effet, soient $x'y'$ les coordonnées du point D, x et y celle du point C, on a $\quad y = y' \qquad x' = x + 2p,$

comme $\quad y^2 = 2px,$

on a $\quad y'^2 = 2p(x' - 2p),$

ce qui démontre la proposition.

Pour expliquer ce fait, remarquons que le segment ACB est d'aire constante, soit I le point où la droite AB touche son enveloppe et A_1B_1 une position voisine de AB d'après la propriété des enveloppes, à la limite, A_1B_1 passera par le point I et l'on aura

$$\text{aire } AA_1I = \text{aire } BB_1I.$$

Or on aura $\quad \text{aire } AA_1I = \dfrac{AI \times A_1I}{2} \sin AIA'_1$

$$\text{aire } BB_1I = \frac{BI \times B_1I}{2} \sin BIB'_1;$$

d'où $\quad AI \times A_1I = BI \times B_1I, \qquad \dfrac{AI}{BC} = \dfrac{B_1I}{A_1I}.$

Soit I_1 le point où A_1B_1 touche son enveloppe; à la limite, le point I se confond avec I_1, et

$$\frac{A_1I}{B_1I} = \frac{A_1I_1}{B_1I_1},$$

donc
$$\frac{AI}{BI} = \frac{B_1I_1}{A_1I_1};$$

de même
$$\frac{B_1I_1}{A_1I_1} = \frac{A_2I_2}{B_2I_2} \text{ etc., } = c.$$

Considérons la position de la droite AB, laquelle est perpendiculaire à l'axe, on a alors évidemment

$$\frac{A'I}{B'I} = 1;$$

on aura donc
$$\frac{AI}{BI} = 1 = \frac{B_1I_1}{B_1I_1},$$

donc $AI = BI$, $B_1I_1 = A_1I_1$, etc. C. Q. F. D.

5° Aux cercles S on mène des tangentes parallèles à la droite AB. *Démontrer que le lieu des points de contact est formé de deux paraboles dont l'une est égale à la proposée quand on déplace celle-ci parallèlement à elle-même de la longueur* 4p. *dans la direction positive de son axe.*

Menons par le point D une perpendiculaire MD à AB et portons sur cette perpendiculaire des longueurs DM et DN égales à DA, il faut trouver le lieu des points M et N. Or la droite DM est normale en D à la parabole P′, lieu du point D, laquelle est égale à la parabole donnée ; d'ailleurs le point D est placé sur cette parabole comme le point C sur la parabole P, : donc le lieu du point M est par rapport à P′ le même que celui de D par rapport à P, c'est donc la parabole
$$y^2 = 2p(x - 4p). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Pour avoir le lieu du point N, désignons par x et y ses coordonnées, par $x'y'$ celles D, par x_0y_0 celles de M ; on a

$$2y' = y_0 + y, \qquad 2x' = x_0 + x,$$
$$y'^2 = 2p(x' - 2p), \qquad y_0^2 = 2p(x_0 - 4p);$$

d'ailleurs, d'après notre remarque à la question 1,

$$x_0' - x' = 2p;$$

donc
$$\begin{cases} x' = x + 2p, & y'^2 = 2px \\ x_0 = x + 4p, & y_0^2 = 2px \end{cases}$$

d'où l'on conclut $y' = \pm y_0$. On sait d'après la position de la figure que l'on doit prendre $y' = y_0$, donc $y = 3y'$ et il vient

$$\frac{y^2}{9} = 2px, \qquad y^2 = 18px,$$

parabole de paramètre $9p$. C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

Questions de Géométrie Descriptive (Mathématiques spéciales), par *E. Jurisch*, professeur à l'École Colbert. — Paris, Librairie Delagrave.

M. Jurisch vient de continuer la publication de son Cours de Géométrie Descriptive en faisant paraître un recueil de questions, destinées aux élèves de Mathématiques Spéciales. Ces problèmes sont pris exclusivement parmi les questions d'examen données à l'École Centrale et à l'École Polytechnique; à ce point de vue, elles seront intéressantes pour les élèves, auxquels elles fourniront de très bons exercices préparatoires à l'examen.

L'auteur fait comprendre aux élèves comment on applique les théories du cours à la résolution d'une épure et quels sont, par ordre, les différents points qu'il faut déterminer : ce livre est donc un complément des cours de Géométrie Descriptive aussi utile, sinon plus, que les recueils bien faits de problèmes pour les autres parties du cours.

Mettant à profit les connaissances que les élèves de Mathématiques spéciales ont en Géométrie Analytique, M. Jurisch leur montre comment ils peuvent, par le calcul, vérifier au besoin les résultats que le dessin leur a signalés.

Nous croyons que les élèves sérieux tireront un réel avantage de ce recueil de questions, et nous souhaitons vivement que l'auteur nous donne prochainement un recueil de problèmes destinés aux élèves des classes de Mathématiques Élémentaires, qui ont un si grand besoin de comprendre la Géométrie Descriptive, et de voir comment les problèmes que l'on étudie au cours servent à la solution d'une question qui peut souvent avoir une grande importance pour eux, à cause des examens.

A. M.

CORRESPONDANCE

La solution de la question 28, par M. Alexandre, publiée dans le numéro d'octobre 1883, est très exacte, mais incomplète. Il faudrait effectivement examiner aussi le cas où le second membre est négatif, ce qui change complètement la forme de la courbe.

Je recommande particulièrement à vos lecteurs le rapprochement entre les deux courbes,

$$Lx\,Ly = +K,\quad Lx\,Ly = -K,$$

qui présentent l'une et l'autre deux points d'arrêt. Lorsqu'on les réunit toutes deux, ce qui donne la courbe $(Lx\,Ly)^2 = K^2$, on les *soude* en quelque sorte l'une à l'autre, et les points d'arrêt disparaissent ainsi.

LAISANT.

QUESTIONS PROPOSÉES

82. — Soient A, B, C, trois points pris sur une ellipse de foyer F, et distants de ce point respectivement de α, β, γ. Il existe sur la courbe un quatrième point D tel que l'on ait

$$d(a\alpha^2 - b\beta^2 + c\gamma^2) - (a\alpha - b\beta + c\gamma)^2 = a,$$

a désignant la surface du triangle BCD, b celle du triangle CDA, etc. Trouver ce point. *(X. Antomari.)*

83. — Étant donné un quadrilatère, on joint un point quelconque I de son plan à un autre point F, également quelconque dans le même plan, et l'on projette les quatre sommets du quadrilatère sur IF. On multiplie ensuite la distance du point I à la projection de l'un des sommets, par l'aire du triangle formé par les trois autres sommets. Prouver que la somme des produits relatifs à deux sommets opposés est égale à la somme des deux autres. *(X. A.)*

84. — On donne une ellipse ayant pour foyers F et F', et un point $P(\alpha, \beta)$. Par le point P, on mène les tangentes PM et PM' à la courbe, puis on mène les normales en M et M'. Ces normales coupent PF et PF' aux points A, B, C, D. Le quadrilatère ABCD ainsi obtenu est inscriptible. — 1° Trouver l'équation du cercle circonscrit (C). — 2° A chaque point P correspond un cercle (C); on mène à l'un de ces cercles les tangentes Fm et F'm'. Calculer le rapport $\frac{Fm}{F'm'}$. — 3° Que devient le cercle (C) quand le point P décrit le

cercle circonscrit à l'ellipse? Quand il décrit le cercle de rayon $\sqrt{a^2+b^2}$, a et b étant les demi-axes de la courbe? — 4° Trouver le lieu géométrique des points P pour lesquels le cercle (C) passe par un point donné; cas où le point est l'un des foyers. — 5° Trouver l'enveloppe des cercles (C) quand le point P décrit l'une des tangentes aux extrémités du grand axe. *(X. A.)*

85. — On considère un cercle C rapporté à deux diamètres rectangulaires Ox, Oy. Soient A, A′, deux tangentes parallèles fixes, et PMQ, une tangente mobile, ayant M pour point de contact et rencontrant A en P, A′ en Q : 1° sur MP et MQ comme diamètres, on décrit des cercles ; le lieu décrit par le centre de similitude de ces circonférences est une quartique unicursale. — 2° Soit B le point de contact de A avec C; la droite BM rencontre le cercle décrit sur PQ comme diamètre en des points dont le lieu est une cubique.

(G. L.)

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS — 23063-3.

THÉORIE DE L'INVOLUTION DU SECOND DEGRÉ

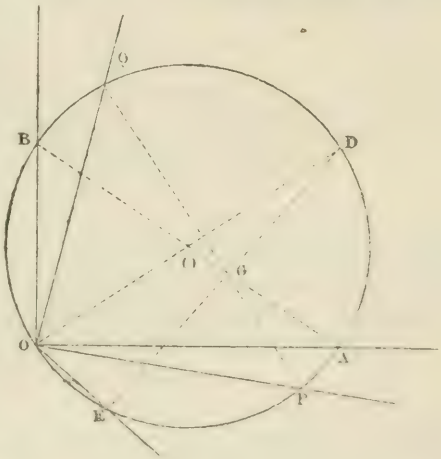
Par M. E. Vazeille.

(*Suite*, voir p. 121 et 169.)

Nous allons indiquer maintenant quelques applications de la théorie de l'Involution aux courbes du second ordre.

Problème. — *Construire un système de diamètres conjugués qui fassent entre eux un angle donné.*

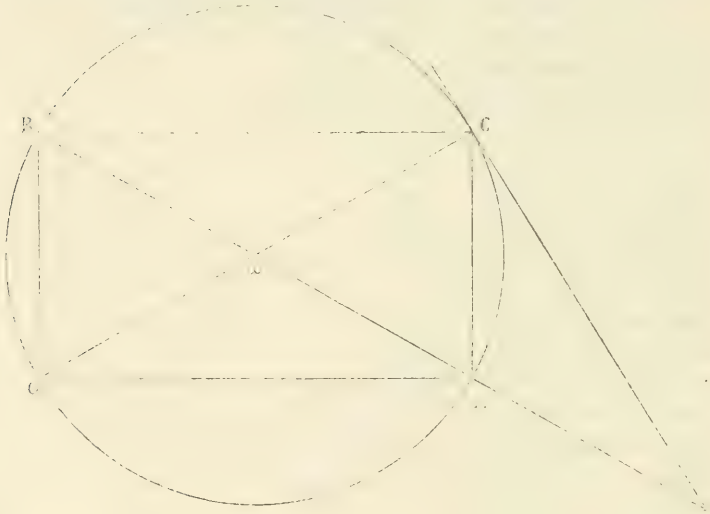
(a) Cas de l'ellipse. — Soient OA et OB les demi-axes de l'ellipse ; et décrivons sur AB comme diamètre une circonférence, puis construisons le rectangle OADB, et le point D′ symétrique de D′ relativement à OA ; OD et OD′ sont les deux diamètres conjugués égaux ; ils déterminent sur la circonférence la corde DE qui vient couper, à angle droit, en G la corde diamétrale AB; toutes



les cordes qui sous-tendent un système de diamètres conjugués passeront par le point G, d'après un théorème précédemment démontré; en conséquence inscrivez dans le cercle une corde qui soit vue du centre ω de ce cercle sous un angle 2θ, les extrémités P et Q de cette corde jointes au point O feront entre elles un angle θ ; et si cette corde passe au point G, ce seront deux diamètres conjugués de l'ellipse; et ils feront entre eux l'angle θ ; or toutes les cordes qui sont vues du centre ω du cercle sous un angle 2θ sont tan-

gentes à une circonférence décrite du point ω comme centre ; et le problème sera possible tant que le point G sera extérieur à cette circonférence auxiliaire ; et la limite de possibilité du problème sera atteinte, lorsque la circonférence auxiliaire passera par le point G ; à cet état limite, les deux solutions que comporte le problème pour une valeur quelconque de θ, coïncideront entre elles, en produisant les deux diamètres conjugués égaux OD et OE' ; ainsi se trouvent établis très simplement les théorèmes sur la variation de l'angle θ dans l'ellipse.

(b) Cas de l'hyperbole. — Soient OA le demi-axe transverse, et OB le demi-axe non transverse ; décrivez la circonférence



sur AB comme diamètre ; la corde AB et la tangente en C se couperont au point fixe fondamental I ; et l'on continuera comme pour l'ellipse ; mais ici le point I est extérieur à la circonférence ω, et le problème a deux solutions toujours réelles pour toute valeur de l'angle θ.

Problème. — *Étant données deux coniques concentriques, déterminer le système de diamètres conjugués commun aux deux coniques.*

D'après une remarque faite précédemment, le problème revient à déterminer le segment commun à deux involutions tracées sur une même droite ; on est ainsi ramené à un problème déjà résolu, et nous laissons à nos jeunes lecteurs le soin de le discuter.

Mais les applications les plus importantes résultent surtout du *théorème de Désargues* ; et comme ce théorème, malgré sa fécondité et son élégance, n'appartient pas régulièrement à l'enseignement classique, nous croyons devoir en donner ici la démonstration et les principales conséquences.

Soient $U(x,y) = 0, \quad V(x,y) = 0$

les équations de deux coniques qui se coupent en quatre points réels ou imaginaires ; si par un point fixe $M_0\,[x_0,y_0]$ du plan nous menons une transversale arbitraire représentée par les équations

$$x = x_0 + ar$$
$$y = y_0 + br$$

et si nous posons :

$$U(x_0 + ar, y_0 + br) = f(r)$$
$$V(x_0 + ar, y_0 + br) = g(r)$$

l'équation $f(r) + \lambda\, g(r) = 0$

déterminera les rayons vecteurs, comptés de M_0, des rencontres de la transversale supposée fixe par une quelconque des coniques du faisceau [U, V], coniques que l'on produit successivement en modifiant d'une manière continue le paramètre λ; donc d'après la forme de l'équation

$$[r, \lambda]\ f(r) + \lambda\, g(r) = 0$$

les segments déterminés par les coniques successives d'un faisceau sur une même transversale sont les segments consécutifs d'une même involution : c'est précisément le théorème de Désargues ; et si nous ne nous trompons, la démonstration que nous venons d'exposer ne diffère pas, au fond, de celle qui fut donnée par *Sturm* dans les annales de Gergonne.

Le discriminant de $[r, \lambda]$ est un trinôme du second degré : $G\,\lambda^2 + 2H\,\lambda + K$;

d'où l'on conclut : *Dans un faisceau de coniques, il y en a deux qui sont tangentes à une droite donnée* ; et les points de contact sont les points doubles de l'involution déterminée sur la droite donnée par la série des coniques.

En particulier, *il y a deux paraboles qui passent par quatre points donnés, c'est-à-dire : il y a deux coniques qui passent par quatre points donnés et touchent la droite de l'infini.*

On voit ainsi, sans entrer dans le détail des constructions, que la détermination d'une conique par quatre points et une tangente revient à la détermination des points doubles d'une involution dont on connaît au moins deux segments.

Un cas important du théorème de Désargues doit être signalé à cause de ses fréquentes applications, et a été signalé par M. *Chasles* : c'est celui où il s'agit de coniques qui touchent deux droites données en deux points donnés ; dans ce cas, l'une des coniques du faisceau est précisément la double corde de contact qui joint les deux points fixes ; et par suite *l'involution que les coniques successives déterminent sur une transversale fixe a un de ses points doubles sur la corde de contact.*

Ce théorème nous fournit l'occasion d'ajouter quelques détails à ce que nous avons déjà dit sur l'Involution en général, et sur un de ses états particuliers : d'abord nous remarquons que si l'extrémité d'un segment vient au centre, l'autre extrémité va à l'infini et réciproquement; en second lieu, que si la relation d'involution se réduit à la forme linéaire

$$u + v = \text{constante},$$

le centre se trouve transporté à l'infini, et tous les segments ont le même milieu.

Mais quand on prend les coniques qui touchent deux droites données en deux points donnés, et que ces deux points de contact se transportent à l'infini, on a la suite des hyperboles qui sont asymptotes à deux droites données; donc :

Quand on prend la suite des hyperboles qui ont pour asymptotes deux droites données, l'involution déterminée par ces coniques sur toute droite de leur plan a l'un de ses points doubles transporté à l'infini ; et par suite tous ses segments ont le même milieu; ce qui nous montre comment une propriété, très particulière en apparence, de l'hyperbole se déduit simplement d'une proposition générale sur les coniques ; et nous croyons qu'il importe, surtout dans l'enseignement, de ré-

duire le plus possible le nombre des propriétés qui se traduisent par des énoncés essentiellement distincts ; c'est d'ailleurs le moyen, le seul, de se conformer aux principes de la géométrie moderne si vivement mis en évidence par *Poncelet* d'abord, et ensuite par *Chasles*.

Comme il faut savoir se borner, nous terminerons ici cet article; mais nous serons heureux s'il peut servir à familiariser nos jeunes lecteurs avec une théorie que nous exposons régulièrement dans nos cours, ainsi qu'en peuvent témoigner nos élèves, et aussi M. Bourget, notre ancien directeur des études à Sainte-Barbe.

SUR UNE

NOUVELLE ESPÈCE DE FRACTIONS CONTINUES

(Par M. **G. de Longchamps.**

Suite, voir pages 197, 213 et 241.)

IX. — Définition des nouvelles fractions. — Considérons la relation de récurrence

$$U_n - 2pU_{n-1} + qU_{n-2} = 0, \quad (p^2 - q) > 0, \qquad (F)$$

et désignons par α_n et β_n deux intégrales particulières de cette équation. Posons

$$\begin{array}{ll} X_0 = \alpha_0 & Y_0 = \beta_0 \\ X_1 = \alpha_0 + \alpha_1 & Y_1 = \beta_0 + \beta_1 \\ X_2 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 & Y_2 = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ X_n = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n, & Y_n = \beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_n, \end{array}$$

et considérons les fractions suivantes :

$$\frac{X_0}{Y_0}, \quad \frac{X_1}{Y_1}, \quad \frac{X_2}{Y_2}, \quad \dots, \quad \frac{X_n}{Y_n}.$$

Nous supposerons que $(p^2 - q)$ est positif et nous établirons d'abord que les fractions que nous venons d'imaginer ont une limite, quand n croît au delà de toute limite. Mais il est nécessaire d'entrer, au préalable, dans quelques détails.

X. — Nous aurons à considérer, dans ce qui va suivre, l'équation génératrice

$$x^2 - 2px + q = 0, \qquad \text{(G)}$$

et nous appellerons x' et x'' ses racines. Nous supposerons que x' et x'' sont des quantités différentes et que l'on a $x' < 1$ et $x'' > 1$.

Pour légitimer cette dernière hypothèse nous ferons observer, avant d'aller plus loin, qu'il est toujours possible de satisfaire aux conditions

$$x' < 1, \quad x'' > 1.$$

En effet, si l'on suppose $q > 0$ et $1 - 2p + q < 0$, le nombre 1 sépare bien les deux racines x', x''. Mais, si l'on suppose $1 - 2p + q > 0$, alors on pourra poser $U_n = \lambda^n V_n$ et les fonctions V_n vérifient la formule suivante :

$$\lambda^2 V_n - 2\lambda p V_{n-1} + q V_{n-2} = 0.$$

L'équation génératrice est alors

$$\lambda^2 x^2 - 2\lambda p x + q = 0,$$

et en substituant l'unité on trouve $\lambda^2 - 2\lambda p + q$; d'ailleurs, le trinôme $x^2 - 2px + q$ prend nécessairement des valeurs négatives pour des valeurs convenables de x, puisqu'on suppose $p^2 - q > 0$. On pourra donc trouver des valeurs de λ telles que l'on ait $\lambda^2 - 2\lambda p + q < 0$. Par conséquent, en changeant, si la chose est nécessaire, les coefficients donnés, on pourra toujours supposer que les racines de l'équation génératrice sont séparées par l'unité.

On verra tout à l'heure pourquoi nous insistons sur la réalisation, toujours possible, de l'hypothèse que nous venons de faire. Dans tous les cas, il résulte de ce que nous venons de dire que la plus grande racine x'' de l'équation génératrice pourra toujours être supposée supérieure à l'unité; c'est là, à proprement parler, le fait important, et s'il arrive que la seconde racine x' soit plus grande que l'unité, ceci n'empêchera pas les conclusions auxquelles nous allons aboutir d'être vraies; la seule chose essentielle étant, en résumé, que *l'une au moins des deux racines soit supérieure à l'unité.*

Si l'on ne veut pas que les deux racines soient séparées par l'unité, si l'on tient seulement à s'assurer que l'une

d'elles, au moins, est supérieure à 1, nous ferons remarquer, incidemment, que cette condition se trouve réalisée très simplement par le changement de fonctions que nous allons indiquer.

Si l'on suppose $q > 1$, une racine, au moins, est plus grande que 1; supposons donc $q < 1$ et posons

$$U_n = pq^n V_n.$$

Les fonctions V satisfont à la relation suivante :

$$pq^n V_n - p^2 q^{n-1} V_{n-1} + pq^{n-1} V_{n-2} = 0,$$

équation qui peut s'écrire

$$V_n - \frac{p}{q} V_{n-1} + \frac{1}{q} V_{n-2} = 0.$$

Puisqu'on suppose $q < 1$, l'équation génératrice qui correspond à cette relation de récurrence aura deux racines, dont l'une, au moins, est supérieure à l'unité.

XI. — Théorème. — *La fraction* $\frac{X_n}{Y_n}$ *a une valeur bien déterminée, quand* n *croît indéfiniment.*

En effet, puisque α_n et β_n sont deux intégrales particulières de l'équation (F), il résulte du théorème de Lagrange qu'on peut poser

$$\alpha_n = \lambda_1 x'^n + \lambda_2 x''^n$$

et

$$\beta_n = \mu_1 x'^n + \mu_2 x''^n.$$

Dans ces égalités, x' et x'' désignent les racines de l'équation (G) et nous rappelons ici que nous supposons ces racines réelles et inégales, et que l'une d'elles, au moins, est supérieure à l'unité. Posons donc

$$x' < x'' \qquad (1)$$

et

$$1 < x''. \qquad (2)$$

Nous avons d'ailleurs :

$$\frac{X_n}{Y_n} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2) + (\lambda_1 x' + \lambda_2 x'') + \ldots + (\lambda_1 x'^n + \lambda_2 x''^n)}{(\mu_1 + \mu_2) + (\mu_1 x' + \mu_2 x'') + \ldots + (\mu_1 x'^n + \mu_2 x''^n)}$$

et, par suite,

$$\frac{X_n}{Y_n} = \frac{\lambda_1 \dfrac{(x'^{n+1} - 1)}{x' - 1} + \lambda_2 \dfrac{x''^{n+1} - 1}{x'' - 1}}{\mu_1 \dfrac{x'^{n+1} - 1}{x' - 1} + \mu_2 \dfrac{x''^{n+1} - 1}{x'' - 1}}.$$

Cette relation peut s'écrire encore

$$\frac{x'^{n+1}-1}{x'-1}\left(\lambda_1-\mu_1\frac{X_n}{Y_n}\right)=\frac{x''^{n+1}-1}{x''-1}\left(\mu_2\frac{X_n}{Y_n}-\lambda_2\right)$$

ou
$$\frac{x'^{n+1}-1}{x''^{n+1}-1}\cdot\frac{x''-1}{x'-1}=\frac{\mu_2\dfrac{X_n}{Y_n}-\lambda_2}{\lambda_1-\mu_1\dfrac{X_n}{Y_n}}. \qquad (3)$$

Cherchons la limite du premier membre de cette égalité, quand n croît au delà de toute limite. A cet effet remarquons que nous avons, identiquement,

$$\frac{x'^{n+1}-1}{x''^{n+1}-1}=\frac{\left(\dfrac{x'}{x''}\right)^{n+1}-\dfrac{1}{x''^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{x''^{n+1}}}.$$

Les inégalités (1) et (2) prouvent donc que

$$\lim\frac{x'^{n+1}-1}{x''^{n+1}-1}=0, \quad (\text{pour } n=\infty).$$

Le second membre de l'égalité (3) a donc pour limite zéro, ce qui donne

$$\lim\left(\frac{X_n}{Y_n}\right)=\frac{\lambda_2}{\mu_2}, \quad (\text{pour } n=\infty).$$

XII. — On peut objecter pourtant que cette conclusion n'est plus exacte si l'on suppose que $\frac{X_n}{Y_n}$ croisse au delà de toute limite en même temps que n, le numérateur et le dénominateur du second membre de l'égalité (3) croissant, l'un et l'autre, au delà de toute limite. Cette objection est d'autant plus spécieuse que nous voulons montrer que $\frac{X_n}{Y_n}$ admet une limite. Mais nous allons reconnaître que cette hypothèse est inadmissible, si, comme nous le supposons formellement, les racines de l'équation génératrice sont des nombres incommensurables.

En effet, le second membre de (3) peut s'écrire

$$\frac{\mu_2-\lambda_2\dfrac{Y_n}{X_n}}{\lambda_1\dfrac{Y_n}{X_n}-\mu_1}. \qquad (4)$$

Si l'on suppose que $\frac{X_n}{Y_n}$ croisse au delà de toute limite, $\frac{Y_n}{X_n}$ a pour limite zéro et la limite de l'expression (4) est $-\frac{\mu_2}{\mu_1}$. Cette limite est toujours égale à celle du premier membre de (3), c'est-à-dire égale à zéro.

Ainsi, dans le cas singulier qui nous occupe, il faut supposer que l'on a $\mu_2 = 0$.

Mais l'égalité $\beta_n = \mu_1 x'^n + \mu_2 x''^n$,

devient alors $\beta_n = \mu_1 x'^n$,

et l'on a $\beta_0 = \mu_1$,

$$\beta_1 = \mu_1 x' ;$$

et par suite $$\beta_0 x' = \beta_1. \qquad (5)$$

Les nombres β_0, β_1 qui sont, avec α_0 et α_1, les valeurs initiales données, sont, bien entendu, des quantités commensurables, et l'égalité (5) donnerait pour x' une valeur commensurable, ce que nous ne supposons pas. Ainsi μ_2 est une quantité nécessairement différente de zéro, et, pour $n = \infty$, $\frac{X_n}{Y_n}$ a une limite bien déterminée et égale à $\frac{\lambda_2}{\mu_2}$.

Nous allons maintenant préciser la valeur de $\frac{\lambda_2}{\mu_2}$.

XIII. — Dans le problème qui nous occupe les données sont : 1° les coefficients p et q de l'équation (G), équation dont nous désignons les racines par x' et x''; 2° les constantes initiales α_0, α_1 qui permettent le calcul, par voie récurrente, des fonctions $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$; 3° les constantes initiales β_0, β_1 qui, de la même façon permettent le calcul de β_2, β_3, $\ldots$, β_n.

Les paramètres que nous avons introduits λ_1, λ_2; μ_1, μ_2; sont liés à ces données par les égalités suivantes :

$$\alpha_0 = \lambda_1 + \lambda_2,$$
$$\alpha_1 = \lambda_1 x' + \lambda_2 x'' ;$$

et

$$\beta_0 = \mu_1 + \mu_2,$$
$$\beta_1 = \mu_1 x' + \mu_2 x''.$$

On déduit de ces relations, par combinaison,

$$\frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{\alpha_1 - \alpha_0 x'}{\beta_1 - \beta_0 x'} .$$

Telle est la valeur de $\frac{\lambda_2}{\mu_2}$, valeur qui est incommensurable, si le déterminant $\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \beta_0 & \beta_1 \end{vmatrix}$ est différent de zéro. Il faut observer d'ailleurs que cette condition est nécessairement remplie dans l'hypothèse où nous nous sommes placé. En effet, si l'on a

$$\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 = 0,$$

toutes les fractions

$$\frac{X_0}{Y_0}, \quad \frac{X_1}{Y_1}, \quad \frac{X_2}{Y_2}, \quad \ldots, \quad \frac{X_n}{Y_n}, \quad \ldots$$

ont la même valeur. Nous supposerons donc que les quatre constantes initiales, *qu'on peut choisir arbitrairement*, pour développer, par notre méthode, une irrationnelle du second degré, ne forment pas une proportion. Avec cette réserve, nous pourrons maintenant énoncer le théorème suivant, qui est la base de cette théorie :

Théorème fondamental. — *La fraction* $\frac{X_n}{Y_n}$, *pour* $n = \infty$, *a une valeur limite bien déterminée, savoir celle de*

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_0 x'}{\beta_1 - \beta_0 x'}.$$

Dans cette expression, α_0, α_1 ; β_0, β_1 *sont des nombres arbitraires, mais non en proportion, et* x' *désigne la plus petite des racines de l'équation génératrice, équation ayant des racines réelles et incommensurables.* *(A suivre.)*

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Par M. **H. Le Pont.**

Nous nous proposons, dans cette note, d'établir les deux théorèmes suivants :

I. — *Les coordonnées d'une courbe d'ordre* n *qui n'a que* $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 3$ *points doubles différents, s'expriment*

rationnellement en fonction d'un paramètre λ *et de l'expression*

$$k = j\sqrt[3]{u(\lambda) + \varepsilon\sqrt{v(\lambda)}}$$

ε *et* j *désignant une racine carrée et une racine cubique de l'unité ;* $u(\lambda)$ *et* $v(\lambda)$ *des fonctions entières de* λ.

II. — *Les coordonnées d'une courbe d'ordre* n *qui n'a que* $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 4$ *points doubles différents s'expriment rationnellement au moyen d'un paramètre* λ *et de la racine carrée d'une fonction* k.

Soit $$f(x,y) = 0$$

l'équation d'une courbe C_n d'ordre n possédant $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 3$ points doubles D.

Par les points D et par un point quelconque P pris arbitrairement sur la courbe C_n, nous pouvons toujours faire passer une courbe d'ordre $(n-3)$: car le nombre $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 2$ de ces points est moindre d'une unité que le nombre $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1$ de points nécessaires pour déterminer cette courbe.

Soient $$\varphi(x,y) = 0, \qquad \psi(x,y) = 0,$$
les équations de deux courbes C'_{n-3} et C''_{n-3} d'ordre $(n-3)$ passant par le point P et les points D. L'équation

$$\varphi(x,y) + \lambda\psi(x,y) = 0, \qquad (1)$$

où λ est un paramètre variable, représente un faisceau de courbes C_{n-3} d'ordre $(n-3)$, ayant pour points fondamentaux le point P et les points D. Chacune de ces courbes rencontre la courbe C_n en trois autres points. Donc

A chaque valeur du paramètre λ correspondent trois points de la courbe C_n, et à chaque point de C_n correspond une seule valeur λ.

Nous pouvons de même par les points doubles D et n points fixes $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$, choisis arbitrairement sur la courbe C, faire passer un faisceau de courbes C_{n-2} d'ordre $(n-2)$:

$$\chi(x,y) + \rho\omega(x,y) = 0 \qquad (2)$$

ρ étant un paramètre variable, et

$$\chi(x,y) = 0 \qquad \omega(x,y) = 0,$$

désignant deux courbes quelconques C'_{n-2} et C''_{n-2}, d'ordre $(n-2)$ passant par les points D et par les points Q; et chaque courbe de ce faisceau rencontre C_n en quatre autres points. Donc

A chaque valeur du paramètre ρ correspondent quatre points de la courbe C_n, et à chaque point de C_n correspond une seule valeur de ρ.

Par suite, à chaque valeur de λ correspondent trois valeurs de ρ, et à chaque valeur de ρ correspondent quatre valeurs de λ; λ et ρ sont donc liés par une équation de la forme

$$F(\lambda,\rho) = \omega_0(\lambda)\rho^3 + 3\omega_1(\lambda)\rho^2 + 3\omega_2(\lambda)\rho + \omega_3(\lambda) = 0, \quad (3)$$

les $\omega(\lambda)$ étant des polynômes entiers du quatrième degré en λ.

Ceci posé, d'après la détermination de nos courbes C_{n-2} et C_{n-3}, les équations

$$\varphi(x,y) + \lambda\psi(x,y) = 0 \qquad \chi(x,y) + \rho\omega(x,y) = 0 \qquad f(x,y) = 0$$

n'ont qu'une solution en x et en y, excepté quand x et y correspondent aux points fondamentaux des faisceaux C_{n-2} et C_{n-3}. Les coordonnées d'un point quelconque de la courbe C_n s'exprimeront donc rationnellement en λ et en ρ, c'est-à-dire en λ et en k: car les racines de l'équation (3) sont une somme de fonctions k. C. Q. F. D.

Le second théorème se démontre de la même manière:

On prend un faisceau de courbes d'ordre $(n-3)$ déterminé par les points doubles de C_n et deux points fixes arbitraires P_1 et P_2 de cette courbe: un second faisceau de courbes d'ordre $(n-2)$ aura pour points fondamentaux les points doubles de C_n et $(n+1)$. points choisis à volonté sur la courbe. Chaque courbe C_{n-3} rencontre C_n en quatre nouveaux points, chaque courbe C_{n-2} la rencontre en cinq, et l'équation

$$F(\lambda,\rho) = 0$$

est du quatrième degré en λ et du cinquième en ρ, et aura ses coefficients entiers et rationnels. On pourra toujours, par une substitution rationnelle, exprimer les quatre valeurs de ρ qui satisfont à cette équation, au moyen des sommes trois à trois des racines d'une équation bicubique:

$$H(\lambda,\rho) = \theta_0(\lambda)\mu^6 + 3\theta_1(\lambda)\mu^4 + 3\theta_2(\lambda)\mu^2 + \theta_3(\lambda) = 0,$$

où les $\theta(\lambda)$ sont des fonctions rationnelles de λ; ce qui démontre le théorème.

Remarque. — Lorsqu'une courbe d'ordre n a moins de $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 4$ points doubles, ses coordonnées ne peuvent plus s'exprimer rationnellement au moyen d'un paramètre et de fonctions algébriques de ce paramètre.

En effet, soit $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - p$ le nombre des points doubles de la courbe C_n : le faisceau des courbes C_{n-3} aura pour points fondamentaux les points doubles et $(p-2)$, points fixes arbitraires de C_n; celui des courbes C_{n-2} sera défini par les points doubles de C_n et $(n+p-3)$, points pris à volonté sur cette courbe, et l'équation

$$F(\lambda,\rho) = 0$$

sera de degré p en ρ et de degré $(p+1)$ en λ. Pour $p > 4$, ρ ne peut plus s'exprimer par des fonctions algébriques des coefficients de cette équation, et par suite, x et y ne peuvent plus être rationnels par rapport à λ et à une fonction algébrique de λ.

Nous croyons utile, en terminant, de rappeler qu'une courbe d'ordre n possédant $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ points doubles est quarrable par les fonctions algébriques et logarithmiques, et par les fonctions circulaires inverses; qu'une courbe d'ordre n possédant $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1$ points doubles est quarrable par les fonctions elliptiques. (Voir Laurent, *Théorie des fonctions elliptiques.*)

Enfin, M. Schwartz a fait voir que les coordonnées d'un point d'une courbe d'ordre n qui présente $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 2$ points doubles, s'expriment rationnellement au moyen d'un paramètre et de la racine carrée d'une fonction entière du cinquième ou du sixième degré de ce paramètre. (Voir *Journal de Liouville*, 1880.)

CONCOURS D'AGRÉGATION 1882

Solution par M. H. Le Pont.

On donne une ellipse et un point P *dans son plan :*

1° Trouver le nombre des cercles osculateurs à l'ellipse tels que chacune des cordes communes à l'ellipse et à ces différents cercles passent par le point P ;

2° Trouver pour chacune des positions du point P *combien de ces cercles sont réels ;*

3° Démontrer que les points de contact de l'ellipse et des cercles osculateurs sont sur un même cercle C ;

4° Trouver l'enveloppe E *de ces cercles* C, *quand le point* P *décrit l'ellipse donnée ;*

5° La courbe E *peut être considérée comme l'enveloppe d'une série de cercles qui coupent à angle droit un cercle fixe et dont les centres sont une conique. Chercher de combien de manières différentes est susceptible ce mode de génération.*

Soient
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$
l'ellipse donnée, et (x_0, y_0) les coordonnées du point P. L'équation d'un cercle tangent à l'ellipse aux points (ξ, η) et tel que la corde commune passe par le point P est
$$\left(\frac{\xi x}{a^2}+\frac{\eta y}{b^2}-1\right)\left[\frac{\xi(x-x_0)}{a^2}-\frac{\eta(y-y_0)}{b^2}\right]=k\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)$$
Déterminant k pour la condition que le contact soit du second ordre, c'est-à-dire que la corde d'intersection passe par le point (ξ, η), il vient
$$k=\frac{\xi(\xi-x_0)}{a^2}-\frac{\eta(\eta-y_0)}{b^2}$$
ce qui donne pour équation du cercle osculateur
$$\left(\frac{\xi x}{a^2}+\frac{\eta y}{b^2}-1\right)\left[\frac{\xi(x-x_0)}{a^2}-\frac{\eta(y-y_0)}{b^2}\right]$$
$$=\left[\frac{\xi(\xi-x_0)}{a^2}-\frac{\eta(\eta-y_0)}{b^2}\right]\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right) \qquad (2)$$

Les coefficients de x^2 et de y^2 étant égaux dans cette équation, nous avons entre ξ et η la relation

$$C = \frac{\xi^2 + \eta^2}{c^2} - \frac{\xi x_0}{a^2} + \frac{\eta y_0}{b^2} = 0 \qquad (3)$$

c^2 désignant suivant l'usage la quantité $a^2 - b^2$.

On voit que les points de contact des cercles osculateurs considérés et de l'ellipse sont les points d'intersection de cette courbe et du cercle C.

Le nombre des cercles osculateurs réels ou imaginaires satisfaisant à la question est évidemment le même que le nombre des normales réelles ou imaginaires menées à l'ellipse donnée par le centre (X, Y) :

$$X = \frac{c^2}{2}\frac{x_0}{a^2}, \qquad Y = -\frac{c^2}{2}\frac{y^0}{b^2}, \qquad (4)$$

du cercle C. Remplaçant alors dans l'équation de la développée de cette ellipse

$$(aX)^{\frac{2}{3}} + (bY)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}$$

X et Y par leurs valeurs en fonction de x_0 et de y_0, il vient

$$\left(\frac{x_0}{2a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y_0}{2b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1. \qquad (5)$$

C'est la développée de l'ellipse

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{4a^2b^2}{c^4}.$$

Nous avons donc : lorsque le point P est à l'intérieur de cette développée, quatre cercles osculateurs réels : trois cercles réels lorsque le point P est sur la courbe, et deux seulement lorsqu'il est à l'extérieur.

L'enveloppe des cercles C, quand le point P décrit l'ellipse donnée, s'obtient en éliminant x_0 et y_0 entre les équations

$$\frac{x^2_0}{a^2} + \frac{y^2_0}{b^2} = 1 \qquad \frac{\xi}{x_0} = -\frac{\eta}{y_0}$$

et l'équation (3), ce qui donne l'équation

$$E = \frac{(\xi^2 + \eta^2)^2}{c^4} - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 0. \qquad (6)$$

C'est l'inverse de l'ellipse donnée en prenant son centre pour pôle et pour module le carré de sa distance focale. Si nous remarquons que le point P décrivant l'ellipse donnée,

le centre (X, Y) du cercle C décrit l'ellipse

$$S = \frac{X^2}{b^2} + \frac{Y^2}{a^2} - \frac{c^4}{4a^2b^2} = 0, \qquad (7)$$

nous voyons que la courbe E est l'enveloppe d'un système de cercles orthogonaux à un cercle fixe et dont les centres sont sur une conique; car les cercles C peuvent être considérés comme coupant à angle droit un cercle de rayon nul concentrique à l'ellipse.

Ce mode de génération n'est d'ailleurs possible que de cette seule manière, Considérons en effet un cercle fixe

$$x^2 + y^2 + 2mx + 2ny - r^2 = 0, \qquad (8)$$

et un cercle quelconque le coupant à angle droit

$$x^2 + y^2 + 2p(x + m) + 2q(y + n) + r^2 = 0, \quad (9)$$

dont le centre $(-p, -q)$ décrit la conique

$$L(x + u)^2 + 2M(x + u)(y + v) + N(y + v)^2 = 1. \quad (10)$$

Nous obtiendrons l'enveloppe de ce cercle en éliminant p et q entre les équations

$$\left.\begin{array}{l} L(p - u)^2 + 2M(p - u)(q - v) + N(q - v)^2 = 1 \\ \dfrac{L(p - u) + M(q - v)}{x + m} = \dfrac{M(p - u) + N(q - v)}{y + n} \end{array}\right\} (11)$$

et l'équation (9), ce qui donne

$$\{(x^2 + y^2 + r^2) + 2[x + m) + v\,(y + n]\}\sqrt{LN - M^2}$$
$$= \pm\sqrt{L(y + n)^2 - 2M(x + m)(y + n) + N(x + m)^2}$$

Élevant au carré et identifiant avec l'équation

$$(x^2 + y^2)^2 = C^4\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right),$$

nous obtenons d'abord

$$u = 0, \quad v = 0, \quad m = 0, \quad n = 0, \quad M = 0,$$

ce qui résultait *à priori* de la symétrie des courbes E et S,

et par suite $\quad r = 0, \quad L = \dfrac{c^4}{4b^2}\ N, = \dfrac{c^4}{4a^2}$,

ce qui nous donne les cercles et l'ellipse indiqués précédemment.

QUESTION 395

Solution par M. Lelieuvre, élève au Lycée de Rouen.

On donné une ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *et un point* P *de coordonnées* α, β. *On mène les tangentes* PA *et* PB *à l'ellipse, puis les normales* AI *et* IB *en* A *et* B. *Du point* I *on mène les deux autres normales* IC *et* ID *et les tangentes en* C *et* D *qui se coupent en* M. *1° Exprimer les coordonnées du point* M *avec celles de* P; *2° lieu de* M *quand* P *se déplace, de façon que les normales* AI *et* IB *fassent toujours un angle droit.*

Établissons d'abord le théorème suivant : Le produit des ordonnées à l'origine de deux quelconques des droites qui joignent deux à deux les pieds des quatre normales menées d'un point à une ellipse, est égal à $-b^2$, et le produit de leurs coefficients angulaires $= \frac{b^2}{a^2}$.

En effet, les pieds des quatre normales menées d'un point pq à une ellipse sont sur l'hyperbole

$$(a^2 - b^2)xy + b^2qx - a^2py = 0.$$

Soient $y - kx - h = 0$ et $y - tx - s = 0$ les deux droites qui forment un des systèmes de sécantes communes à l'ellipse et à l'hyperbole; l'équation d'une conique passant par les intersections de l'ellipse et de ces deux droites est de la forme

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 + \lambda(y - kx - h)(y - tx - s) = 0.$$

En identifiant cette équation et celle de l'hyperbole, on aura des équations qui donneront k, h, t et s. D'ailleurs, en remarquant que l'équation de l'hyperbole ne contient pas de terme en x^2, en y^2 ni de terme constant, on a de suite

$$a^2 + \lambda = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \lambda = -a^2,$$

$$b^2 + \lambda kt = 0 \qquad \text{ou} \qquad kt = \frac{b^2}{a^2},$$

et $$\lambda hs - a^2b^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad hs = -b^2,$$

ce qui démontre le théorème.

Or, supposons que l'une des droites, AB, soit la polaire du point $\alpha\beta$. Son équation sera

$$a^2\beta y + b^2\alpha x - a^2b^2 = 0$$

ou

$$y = -\frac{b^2\alpha}{a^2\beta}x + \frac{b^2}{\beta}.$$

L'ordonnée à l'origine est $\frac{b^2}{\beta}$; donc celle de la droite CD est $-\beta$, puisque leur produit est $-b^2$. De même le coefficient angulaire de CD $= -\frac{b^2a^2\beta}{a^2b^2\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha}$.

Donc l'équation de la droite CD est

$$y = -\frac{\beta}{\alpha}x - \beta \text{ ou } -\frac{y}{\beta} - \frac{x}{\alpha} = 1.$$

Alors il est facile d'avoir les coordonnées du point M qui est le pôle de CD. Car si x_0y_0 sont ces coordonnées, CD a aussi pour équation

$$a^2y_0y + b^2x_0x = a^2b^2,$$

$$y = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}x + \frac{b^2}{y_0};$$

d'où, en identifiant,

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b^2x_0}{a^2y_0}, \qquad \frac{b^2}{y_0} = -\beta;$$

$$y_0 = -\frac{b^2}{\beta}, \qquad x_0 = \frac{a^2}{\alpha}.$$

Alors, si les normales AI et BI se déplacent en faisant toujours entre elles un angle droit, il en est de même des tangentes PA et PB, et par suite le point P décrit le cercle lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'ellipse; par suite ses coordonnées sont liées par la relation

$$\alpha^2 + \beta^2 = a^2 + b^2;$$

or

$$\alpha = -\frac{a^2}{x_0}, \qquad \beta = -\frac{b^2}{y_0}.$$

Donc le lieu du point M a pour équation

$$\frac{a^4}{x^2} + \frac{b^4}{y^2} = a^2 + b^2.$$

Cette équation représente une courbe symétrique par rapport aux axes et présentant quatre asymptotes parallèles

deux à deux aux axes et dont les équations sont

$$y = \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad x = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Cazemajou, Desplans, à Marseille; Houdry, à Melun; Cartier, à Angoulême.

QUESTION 39

Solution par M. KAUFFMANN, élève au Lycée de Bordeaux.

On considère une hyperbole H *ayant pour asymptotes les droites* Ox, Oy. *Soit* M *un point de cette courbe. On mène une parallèle à* Ox *qui rencontre* Oy *en un point* I. *Soit* Q *le symétrique de* P *par rapport à* M. *Par* Q *on mène une parallèle à* Oy *qui rencontre* H *en* R *et par* R *on mène une parallèle* D *à* Ox.

On propose de démontrer que toute transversale D′ *menée par* M *rencontre* QR *et* H *en des points équidistants de* D. *Soit* T *le point où la tangente en* S *rencontre* O*y* : *démontrer que la parallèle à* D′ *menée par* T *et* QR *se coupent sur* O*x*.

1° Pour démontrer la première partie il nous suffit de démontrer que E est le milieu de AS. (Le lecteur est prié de faire la figure.)

Par S je mène des parallèles à O*x* et à O*y*. La première coupe QR en F, la seconde O*x* en I.

Les deux triangles GMP, MQA sont égaux.

Donc PG = AQ. Les triangles égaux GMP, SIK me donnent PG = SI. Donc SI = AQ = BF.

Comme le point R est le milieu de QB, R sera aussi le milieu de AF ; ce qui nous montre que E est le milieu de AS ;

2° Je mène BT. Les triangles OBT, SIK sont semblables. Comme S est le milieu de TT′, OT = 2SI ; IK = PM ; donc OB = PQ = 2IK. Les droites BT et SK sont deux parallèles.

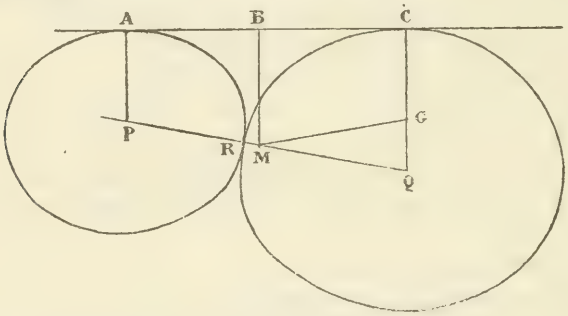
NOTA. — La même question a été résolue par MM. de Kerdrel, à Keruzoret ; Clément, à Rouen ; Callé à Grenoble.

QUESTION 43

Solution par M. Callé, élève de Mathématiques spéciales au Lycée de Grenoble.

On donne une droite terminée aux points P *et* Q; *soit* R *un point pris sur* PQ; *du point* P *comme centre avec* PR *pour rayon, on décrit un cercle, et du point* Q *avec* QR, *un autre cercle; on mène une tangente commune à ces cercles, et l'on demande de démontrer que le lieu décrit par les points de contact est l'ensemble de deux quartiques.* (G. L.)

Prenons PQ pour axe des x, et pour axe des y la perpendiculaire en son milieu. Soit $PQ = 2a$.



Les équations des deux cercles sont

$$(x-a)^2 + y^2 = \rho^2; \qquad (x+a)^2\, y^2 = (2a-\rho)^2.$$

Les tangentes au point (φ) aux deux cercles sont respectivement

$$(x-a)\cos\varphi + y\sin\varphi = \rho; \quad (x-a)\cos\varphi + y\sin\varphi = 2a-\rho.$$

Exprimons qu'elles se confondent; pour cela, on doit avoir

$$\rho = a(1-\cos\varphi); \text{ ou } \rho - 2a = -a(1+\cos\varphi);$$

ce qui représente deux limaçons de Pascal égaux, ayant respectivement un point de rebroussement, aux points P et Q.

Solution géométrique. — Considérons deux cercles satisfaisant aux conditions énoncées, et la tangente commune

à ces deux cercles; du milieu de PQ abaissons une perpendiculaire sur la tangente : cette droite est égale à la demi-somme des rayons, c'est-à-dire à $\frac{PQ}{2}$. Donc, le lieu demandé se compose des podaires des points P et Q par rapport au cercle décrit sur PQ comme diamètre.

QUESTION 43

Solution par M. Kauffmann, au Lycée de Bordeaux.

On donne une droite terminée aux points P *et* Q. *Soit* R *un point pris sur* PQ. *Du point* P *comme centre avec* PR *pour rayon on décrit un cercle et du point* φ *avec* φR *un autre cercle ; on mène une tangente commune à ces deux cercles, et l'on demande de démontrer que le lieu décrit par les points de contact est l'ensemble de deux quartiques.*

Soient A et C deux points du lieu, A étant sur la circonférence décrite du point P comme centre et C sur la circonférence décrite du point Q. Soit M le milieu de PQ. La perpendiculaire MB abaissée du point M sur AC est égale à $\frac{AP + QC}{2} = \frac{PQ}{2}$. Si par le point M je mène une parallèle à AC, le lieu du point G sera un cercle et comme la longueur CG est égale à MB, c'est-à-dire est constante, le lieu du point C est un limaçon. On démontrerait de même que le lieu du point A est un limaçon.

Le lieu décrit par les points A et C est l'ensemble des deux quartiques.

VARIÉTÉS (*)

Supposons que deux nombres u_n, u_{n-1} soient liés par l'équation de récurrence

$$u_n = 2u_{n-1} + 1 \qquad \text{(A)}$$

et proposons-nous de trouver u_n qui est une fonction de n et de la donnée initiale u_0. Il est facile de faire rentrer (A) dans les équations récurrentes proprement dites, ou équations de Lagrange, que nous avons étudiées récemment dans ce journal (**).

En effet, l'équation (A) donne la suivante :

$$u_{n-1} = 2u_{n-2} + 1. \qquad \text{(A')}$$

La combinaison des relations (A), (A') donne l'égalité

$$u_n - 3u_{n-1} + 2u_{n-2} = 0. \qquad \text{(B)}$$

L'équation génératrice est donc

$$z^2 - 3z + 2 = 0.$$

dont les racines sont 1 et 2. L'intégrale générale de l'équation (B) est donc, d'après le théorème de Lagrange, auquel nous avons fait allusion tout à l'heure,

$$u_n = \lambda \,.\, 1^n + \mu 2^n;$$

ou,

$$u = \lambda + \mu 2^n. \qquad \text{(C)}$$

Dans cette égalité les paramètres λ et μ ne sont pas deux constantes arbitraires, parce que, d'après l'équation (A), on a

$$u_1 = 2u_0 + 1.$$

Or, l'égalité (C) donne

$$u_0 = \lambda + \mu,$$

et,

$$u_1 = \lambda + 2\mu.$$

On a donc, $\lambda + 2\mu = 2\lambda + 2\mu + 1$,

ou

$$\lambda = -1.$$

Ainsi l'intégrale générale de l'équation (A), avec le seul

(*) A propos de cet article, on peut consulter : RÉCRÉATIONS MATHÉMATIQUES *par* M. ED. LUCAS, *professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis.* (2 vol., chez GAUTHIER-VILLARS.)

(**) Voir *Journal*, p. 193.

paramètre arbitraire qu'elle exige, est

$$u_n = \mu 2^n - 1.$$

Le cas le plus simple que l'on puisse imaginer est celui où la constante initiale u_0 est nulle.

Dans cette hypothèse on a

$$\lambda + \mu = 0,$$

et, par suite, $\mu = 1$.

L'intégrale de (A) est alors une fonction de n, bien définie et correspondant à la formule

$$u_n = 2^n - 1.$$

Cette application d'idées plus générales que nous avons développées ici (*loc. cit.*), nous a été inspirée par une lettre que nous avons reçue, en ces temps derniers, du professeur N. Claus.

Demandant, pour une fois, la permission de quitter un instant le ton grave ordinaire aux articles de ce journal, nous dirons quelques mots de cette lettre et du sujet dont elle nous entretenait. Nous laisserons ensuite à nos lecteurs le mérite de faire le rapprochement nécessaire entre le calcul qui précède et l'application ingénieuse qui suit.

La lettre du professeur N. Claus est relative à un jeu qui constitue une intéressante récréation mathématique, qu'il a nommée la *tour d'Hanoï*. Les pions, de grandeur inégale, sont au nombre de huit et forment une tour quand ils sont superposés en nombre : 1, 2, 3, ... 8 ; mais dans un ordre décroissant, quand on va de la base au sommet. Trois clous verticaux étant donnés, le problème proposé consiste à déplacer la tour donnée de façon que les matériaux transportés soient toujours situés dans l'ordre décroissant.

Le jeu est toujours possible, et demande deux fois plus de temps chaque fois que l'on ajoute un étage à la tour.

Pour une tour de deux étages il faut trois coups, au minimum :

$$2^2 - 1 ;$$

pour une tour de trois étages, sept coups, au minimum :

$$2^3 - 1 ;$$

en général, pour une tour de p étages il faut, au minimum, un nombre de coups égal à

$$2^p - 1.$$

G. L.

QUESTIONS PROPOSÉES

86. — Si l'équation

$$x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \ldots \pm a^n = 0.$$

n'admet que des racines entières et positives,

1° L'expression

$$\frac{a_n (1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(1 + 2a_1 + 4a_2 + \ldots + 2^n a_n)}{6^n}$$

représente un nombre entier, décomposable en une somme de a_n carrés;

2° L'expression

$$\frac{a_n^2 (1 + a_1 + \ldots + a_n)^2}{4^n}$$

représente un nombre entier décomposable en une somme de a_n cubes;

3° Le nombre $a_n^2 (1 + 2a_1 + \ldots + 2^n a_n)$ est décomposable en une somme algébrique de $2^n a_n$ carrés.

(Laisant.)

87. — Trouver le terme général de la série

$$6, \quad 210, \quad 7140, \quad 242556 \ldots$$

qui renferme, dans leur ordre de grandeur croissante, tous les nombres qui sont, à la fois, triangulaires et doubles d'un triangulaire. *(S. Réalis.)*

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS — 25976-3.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

Pages.

Algèbre.

Note sur le théorème de Descartes, par M. *Walecki*. 25
Sur une nouvelle approximation des racines incommensurables, par M. *Collin*. 53
Sur la formule de Taylor, par M. *Parpaite*. 82
Démonstration du théorème de d'Alembert, d'après M. Walecki, par M. *de Longchamps*. 97
Résolution algébrique des équations du troisième degré, par M. *de Longchamps*. 102
Théorie de l'involution du second degré, par M. *Vazeille*. 121, 169, 265
Théorème de d'Alembert, d'après M. *Amigues*. . . . 145
Sur l'équation du troisième degré, par M. *Ed. Lucas*. 174
Sur l'équation du quatrième degré, par M. *Ed. Lucas*. 178
Note d'algèbre, sur la décomposition des fractions, par M. *Poujade*. 186
Sur une nouvelle espèce de fractions continues, par M. *G. de Longchamps*. 193, 217, 241. 269
Sur l'équation aux carrés des différences, par M. *Ed. Lucas*. 199
Note sur la manière d'écrire $(x+h)^m$ sous la forme d'un déterminant par M. *Marchand*. 248

Géométrie analytique.

Étude sur de nouveaux points remarquables du plan d'un triangle, par M. *Em. Lemoine*. 3, 26, 49
Équation du système des tangentes menées à une conique par un point donné, par M. *Poujade*. 6
Note de géométrie, sur le lieu des sommets des angles constants circonscrits à une courbe d'ordre n, par M. *H. Bourget* 55
Théorèmes sur les droites menées par un point du plan d'un triangle parallèlement à ses côtés, par M. *Em. Lemoine*. . . . 73
Un lieu géométrique, par M. *E. V.* 78
Note de géométrie, sur les axes de la section plane d'une quadrique, par M. *Poujade*. 197
Sur le volume du tétraèdre en géométrie analytique, par M. *Ed. Lucas*. . . . 221
Sur certaines courbes gauches du quatrième ordre, par M. *Bioche*. 223
Note sur les cubiques, par M. *Le Pont*. 244
Conique passant par trois des quatre points communs à deux coniques données par M. *Poujade*. 246
Note de géométrie, par M. *H. Le Pont*. 274

Questions d'examen.

Concours général de 1883. 147
Concours pour l'École Polytechnique 153
Concours pour l'École Normale supérieure. 160
Questions d'examen pour

Pages.
l'École Polytechnique . . 163, 179, 213
Agrégation de mathématiques. Concours de 1883. 226
École Centrale. Concours de 1883. . . . . 250, 253

Bibliographie.

Traité de balistique rationnelle par M. Bailly, compte rendu par M. *Brisse*. . . 142
Questions de géométrie descriptive par M. *Jurisch*; compte rendu par M. *Morel* 262

Mélanges.

Extrait d'une lettre de Fermat à Mersenne. 16
Erratum sur la question 53. 72
Note sur la question 42, par M. *E. V*. 95
Correspondance sur les séries de Taylor et de Mac Laurin, par M. *J. Bourget*. 118
Correspondance sur la résolution et l'équation du troisième degré. 141
Rectification de la note sur la formule de Taylor, par M. *A. Roche* 215
Variétés extraites des Récréations mathématiques de M. *Ed. Lucas*. 235
Correspondance de M. *Laisant* sur la question 28. . 262
Variétés, par M. *de Longchamps*. 286

Questions proposées.

Questions 44 à 49 23
— 50 à 55 47
— 56 à 58 96
— 59 à 61 119
— 62 à 65 143
— 66 à 71 166
— 72 à 75 191
— 76. 216
Pages.
Questions 77 à 81 239
— 82 à 85 263
— 86 et 87 288

Solutions de questions d'examens.

Concours d'agrégation de 1881, par M. *Levavasseur* 84
Concours de l'École Polytechnique en 1883. 154-163-179 213
Concours de l'École Normale en 1883, par M. *Levavasseur* 202
Concours d'agrégation en 1883, par M. *Gérard* . . 227
Concours général de 1883, par M. *Bertagne*. 147
Concours d'agrégation de 1882, par M. *H. Le Pont* 278

Solution de questions proposées.

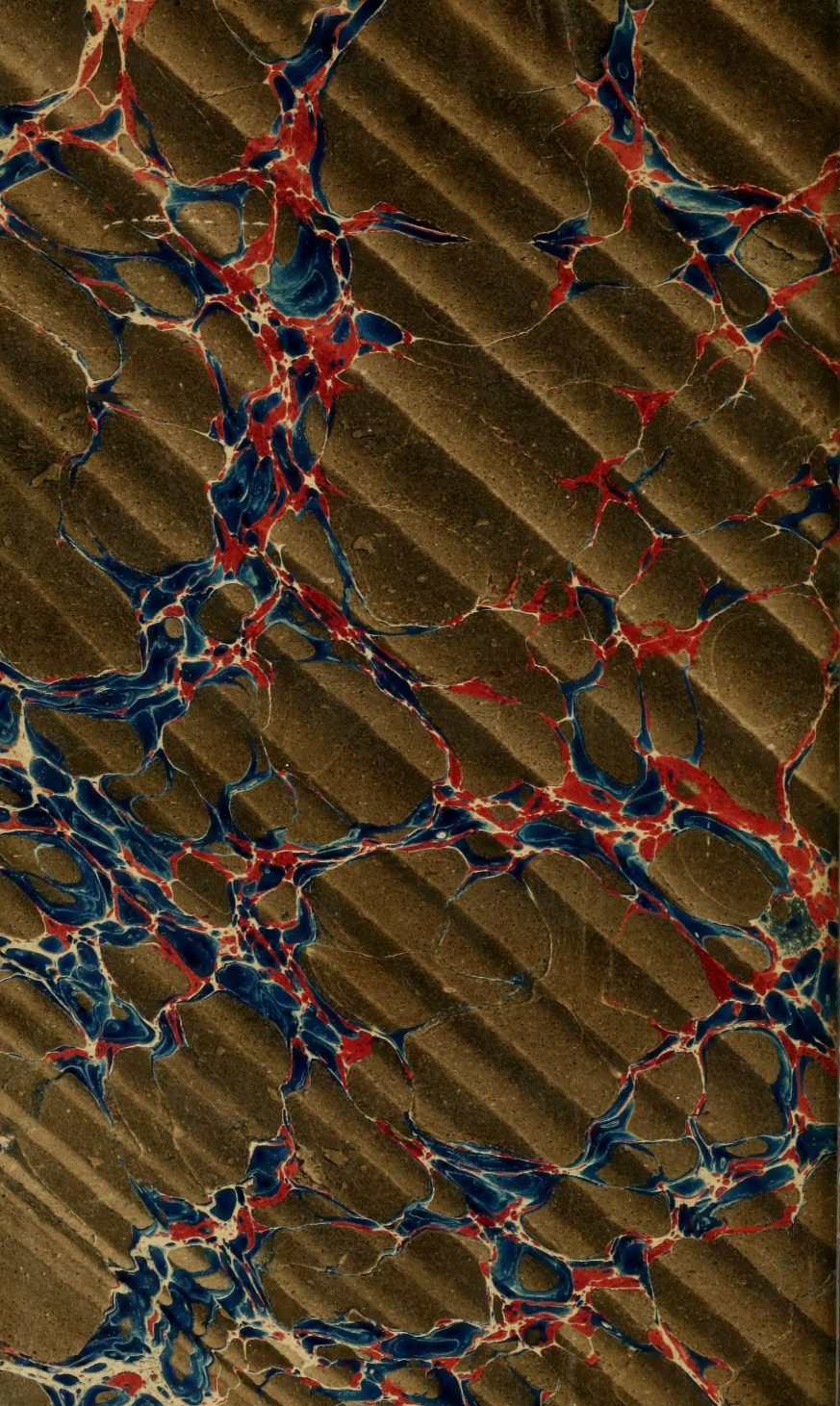
Question 355 par M. *Quiquet*. . . . 94
— 356, par M. *Dupuy* 117
— 359, par M. *Petit*. 126
386, par M. *Jullien* 127
— 388, par M. *Boulogne* 128
— 395, par M. *Lelieuvre* 281
396 130
— 1, par M. *Griffon* 58
— 2, par M. *Kœhler* 89
— 3, par M. *Kœhler* 132
— 4, par M. *Kœhler* 187
— 5, par M. *Alexandre*. . . . 8
— 6, par M. *Ferval* 190
— 7, par M. *Griffon* 9
— 10, par M. *Gaullaider*. . . 61
— 13, par M. *Gaullaider*. . . 39
— 15 bis, par M. *Toqué*. . . . 91
— 16 bis, par M. *Toqué*. . . . 92
— 25, par M. *Griffon* 44
— 28, par M. *Alexandre* 234
— 30 40

		Pages.
Question 31, par M. *Griffon*		63
— 32, par M. *Jaggi*		65
— 34, par M. *Forest*		10
— 35, par M. *Forest*		33
— 36, par M. *Alexandre*		45
— 37, par M. *Callé* .		255
— 37, par M. *Jacob.*		257
— 39, par M. *Kauffmann*. . .		283
— 41, par M. *Kauffmann*. . .		68
Question 42, par M. *Pornay*		69
— 43, par M. *Callé.*		284
— 43, par M. *Kauffmann*. . .		285
— 44, par M. *Callé.*		107
— 46, par M. *Genin*		135
— 47, par M. *Ferval*		190
— 48, par M. *Ferval*		191
— 54, par M. *Levavasseur*. . .		136
— Variétés.		286

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

ALEXANDRE, *à Angers*, 8, 9, 44, 45, 63, 65, 68, 234.
AMIGUES, *professeur à Marseille*, 119, 145, 167.
ANTOMARI, *professeur à Carcassonne*, 240, 263, 264.
BAILLI, *lieutenant de vaisseau*, 142.
BARON, *à Paris*, 130.
BERTAGNE, *à Marseille*, 147.
BIOCHE, *professeur à Poitiers*, 223.
BOULOGNE, *lycée Saint-Louis à Paris*, 128.
BOURGET (J.), *rédacteur*, 118.
BOURGET (H.), *à Aix*, 44, 55.
BRISSE, *professeur au lycée Fontanes, à Paris*, 141, 142.
CADOT, *lycée Saint-Louis, à Paris*, 44, 89.
CALLÉ, *à Grenoble*, 107, 255, 284.
CATALAN, *professeur à Liége*, 192, 240.
COLLIN, *ancien élève de l'École Polytechnique*, 53.
DEREINS, *lycée Louis-le-Grand, à Paris*, 152.
DUPUY, *à Grenoble*, 117, 130.
E. V..., 78, 95.
FERMAT, 16.
FERVAL, *lycée Henri IV, à Paris*, 190, 191.
FOREST, *lycée Charlemagne à Paris*, 10, 33.
GAULLAIDER, *lycée Saint-Louis à Paris*, 39, 61.
GENIN, *lycée Louis-le-Grand à Paris*, 135.
GÉRARD, *professeur au collège de Cluny*, 227.
GODEFROY (P.), *à Lyon*, 8, 9, 44.
GRIFFON, *à Montpellier*, 9, 44, 58 63, 94.
HARANG, *à Nancy*, 9.
HELLOT, *à Rouen*, 44, 65.
JACOB, *à Lorient*, 257.
JAGGI, *à Besançon*, 65.
JULLIEN, *lycée Henri IV, à Paris*, 127
KAUFFMANN, *à Bordeaux*, 68, 283, 285
KŒHLER, *professeur à Paris*, 89, 96, 132, 144, 187, 192.
LACHESNAIS, *lycée Saint-Louis, à Paris*, 8.
LAISANT, *député*, 234, 262.
LELIEUVRE, *à Rouen*, 65, 281.
LEMOINE, *ancien élève de l'École Polytechnique*, 3, 26, 47, 49, 73.
LE PONT, *à Paris*, 244, 274, 278.
LEVAVASSEUR, *lycée Charlemagne à Paris*, 84, 136, 202.
LONGCHAMPS (de), *rédacteur*, 23, 24, 47, 48, 96, 97, 102, 120, 141, 192, 193, 197, 216, 217, 241, 264, 269, 286.
LUCAS, *professeur au lycée Saint-Louis, à Paris*, 47, 144, 168, 174, 178, 199, 221, 235.
MARCHAND, *ancien élève de l'École polytechnique*, 248.
MAYON, *lycée Henri IV, à Paris*, 61.
MERSENNE, 16.
METTETAL, *à Besançon*, 8.
MOREL, *secrétaire*, 262.
MOSNAT, *à Thiers*, 9.
OGER, *à Saint-Servan*, 61.
PARPAITE, *professeur à Angers*, 82, 215.
PERCERAU, *à Besançon*, 68.
PETIT, *à Grenoble*, 126.
PORNAY, *à Toulouse*, 69.
POUJADE, *professeur à Lyon*, 6, 186, 197, 246.
QUIQUET, *à Lille*, 94.
RÉALIS, *professeur à Milan*, 167.
ROBILLARD, *lycée Saint-Louis, à Paris*, 61.
ROCHE, *professeur à Montpellier*, 215.
THÉREL, *à Versailles*, 94.
TOQUÉ, *lycée Charlemagne, à Paris*, 91, 92.
VAZEILLE, *rédacteur*, 121, 169.
VAZOU, *collège Rollin, à Paris*, 61.
WALECKI, *professeur au lycée Fontanes à Paris*, 25, 48, 97.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 25976-3



QA
1
J6836
sér.2
t.2

Math.

Journal de mathématiques
élémentaires

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY